تاریخ :	وقت : دقیقه	سریال ۹۱۸۱۵۳
نام و نام خانوادگی :	تعداد سوالات: ۲۲	
موضوع	آموزشگاه آبادگران	

۱. الف: $U=\{۵,۱۰,۱۵,۲۰,۲۵,۳۰,\cdots\}$

ب: نامتناهی

پ: $A=\{۵,۱۰,۱۵\}$

ت: $C\subseteq D\subseteq U$, $D=\{۵,۱۰,۱۵,۲۰\}$, $C=\{۵,۱۰\}$

۲.

می‌دانیم: جمله عمومی دنباله حسابی با جمله اول $t_۱$ و قدرنسبت d برابر $t_n=t_۱+(n-۱)d$ است.

$$\begin{cases} t_۳=۲۰ \\ t_۷=۵۶ \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} t_۱+۲d=۲۰ \\ t_۱+۶d=۵۶ \end{cases}$$

$$۴d=۳۶\Rightarrow d=۹$$

$$t_۳=t_۱+۲d\Rightarrow ۲۰=t_۱+۱۸\Rightarrow t_۱=۲$$

دنباله: $۲,۱۱,۲۰,۲۹,۳۸,\cdots$

۳.

می‌دانیم: جمله عمومی دنباله حسابی با جمله اول $t_۱$ و قدرنسبت d برابر $t_n=t_۱+(n-۱)d$ است.

$$\begin{cases} t_۱+t_۲+t_۳=۳ \\ t_۴+t_۵+t_۶=۳۹ \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} t_۱+t_۱+d+t_۱+۲d=۳ \\ t_۱+۳d+t_۱+۴d+t_۱+۵d=۳۹ \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} ۳t_۱+۳d=۳ \\ ۳t_۱+۱۲d=۳۹ \end{cases}$$

$$۹d=۳۶\Rightarrow d=۴$$

$$۳t_۱+۳d=۳\Rightarrow ۳t_۱=۳-۳d\overset{d=۴}{=\!=\!=}۳-۱۲=-۹\Rightarrow t_۱=-۳$$

دنباله : $-۳,۱,۵,۹,\cdots$

۴.

$N=\{۱,۲,۳,\cdots\}$

$W=\{۰,۱,۲,۳,\cdots\}$

$Z=\{\cdots,-۳,-۲,-۱,۰,۱,۲,۳,\cdots\}$

$Q=\{\frac{m}{n}\mid m,n\in Z,n\neq ۰\}$

$Q'=$ مجموعه اعدادی که نتوانی آن‌ها را به صورت نسبت دو عدد صحیح نشان داد

$R=Q\cup Q'$

الف) نادرست: $\sqrt{۵}$ را نمی‌توان به صورت نسبت دو عدد صحیح با مخرج غیر صفر نشان داد.

ب) نادرست: $N=\{۱,۲,۳,\cdots\}$

پ) نادرست: $\frac{۳}{۲}$ یک عدد گویا است و جزء اعداد گویا (Q) به حساب می‌آید.

ت) نادرست: $\sqrt{۵}$ عددی گنگ است و $\frac{-\sqrt{۵}}{۲}$ که نسبت $-\sqrt{۵}$ به ۲ است نسبت عددی گنگ به عددی صحیح است؛ پس $\frac{-\sqrt{۵}}{۲}$ گویا نیست.

ث) صحیح: می‌دانیم π عددی گنگ است پس تمامی نسبت‌های آن نیز گنگ است و $\frac{\pi}{۱۶}$ عددی گنگ به شمار می‌آید.

ج) نادرست:با توجه به $Z=\{\cdots,-۱,۰,۱,\cdots\}$ ؛ ۳٫۹ عددی اعشاری است و جزء مجموعه اعداد صحیح نیست.

۵. الف) نادرست: از اشتراک دو مجموعه متناهی و نامتناهی، همواره مجموعه‌ای متناهی به دست می‌آید.

ب) درست: برای مثال $N\subseteq W$

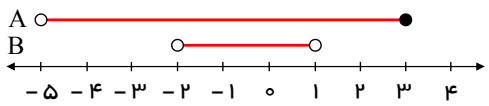
abadgaranedu.ir

پ) نادرست:اگر $A \subseteq B$ و B متناهی باشد، A حتماً متناهی خواهد بود.

ت) درست

ث) نادرست: تهی مجموعه‌ای بدون عضو و متناهی است چرا که تعداد اعضای آن صفر است و صفر عددی متناهی است.

۶. باتوجه به شکل داریم:



الف) $A \cap B = (-۲, ۱)$

ب) $A \cup B = (-۵, ۳]$

ج) $A - B = (-۵, -۲] \cup [۱, ۳]$

د) $B - A = \varnothing$

۷.

می‌دانیم: جمله عمومی دنباله هندسی با جمله اول $t_۱$ و قدر نسبت r برابر با $t_n = t_۱ r^{n-۱}$ است.

$$\begin{cases} t_۳ = t_۱ r^۲ = ۱۲ \\ t_۶ = t_۱ r^۵ = ۹۶ \end{cases} \Rightarrow \frac{t_۱ r^۵}{t_۱ r^۲} = r^۳ = \frac{۹۶}{۱۲} = ۸ \Rightarrow r = ۲$$

$$t_۱ r^۲ = ۱۲ \xrightarrow{r=۲} t_۱ \times ۴ = ۱۲ \Rightarrow t_۱ = ۳$$

دنباله : $۳, ۶, ۱۲, ۲۴, ۴۸, ۹۶, \cdots$

۸.

$$\sin\theta = \frac{\text{مقابل}}{\text{وتر}} = \frac{۳}{۶} = \frac{۱}{۲}$$

$$\cos\theta = \frac{\text{مجاور}}{\text{وتر}} = \frac{۳\sqrt{۳}}{۶} = \frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

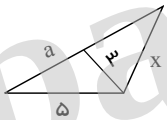
$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{\frac{۱}{۲}}{\frac{\sqrt{۳}}{۲}} = \frac{۱}{\sqrt{۳}} = \frac{\sqrt{۳}}{۳}$$

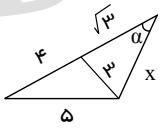
$$\cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta} = \frac{\frac{\sqrt{۳}}{۲}}{\frac{۱}{۲}} = \sqrt{۳}$$

باتوجه به مقادیر بدست آمده، اندازه زاویه‌ی θ ، ۳۰° است.

۹. باتوجه به رابطه‌ی فیثاغورس داریم:

$$۳^۲ + a^۲ = ۵^۲ \Rightarrow ۹ + a^۲ = ۲۵ \Rightarrow a^۲ = ۱۶ \Rightarrow a = ۴$$





$$\tan\alpha = \frac{۳}{\sqrt{۳}} \times \frac{\sqrt{۳}}{\sqrt{۳}} = \frac{۳\sqrt{۳}}{۳} = \sqrt{۳}$$

$$\tan\alpha = \sqrt{۳} \Rightarrow \alpha = ۶۰^\circ$$

$$\cos ۶۰^\circ = \frac{۱}{۲} = \frac{\sqrt{۳}}{x} \Rightarrow x = ۲\sqrt{۳}$$

۱۰. الف) ۴۵° ب) ۳۰° پ) ۶۰°

۱۱.

$$A = \frac{(\frac{\sqrt{۲}}{۲})^۲}{۲} - \frac{۱}{۲} + ۱ = \frac{۱}{۲} - \frac{۱}{۶} + ۱ = \frac{۱}{۴} - \frac{۱}{۶} + ۱ = \frac{۳ - ۲ + ۱۲}{۱۲} = \frac{۱۳}{۱۲} \Rightarrow ۲A = \frac{۱۳}{۶}$$

$$\Rightarrow ۲A - \frac{۱}{۶} = \frac{۱۳}{۶} - \frac{۱}{۶} = \frac{۱۲}{۶} = ۲$$

۱۲.

$$\frac{۱}{۲} \times AB \times AC \times \sin\theta$$

θ: زاویه بین AB و AC

abadgaranedu.ir

$$\boxed{\hat{\theta}=\hat{A}=۳۰^\circ}$$

$$\sin\theta=\sin ۳۰=\frac{۱}{۲}\to S=\frac{۱}{۲}\times ۳\times ۵\times\frac{۱}{۲}=\frac{۱۵}{۴}$$

.۱۳

$$\sin^۲\theta+\cos^۲\theta=۱\to\cos^۲\theta=۱-\frac{۲۴}{۴۹}=\frac{۲۵}{۴۹}$$

$$\to\cos\theta=\pm\frac{۵}{۷}$$

از آن‌جا که θ در ربع دوم است، کسینوس آن منفی است؛ پس:

$$\cos\theta=-\frac{۵}{۷}\to\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{\frac{۲\sqrt{۶}}{۷}}{-\frac{۵}{۷}}=-\frac{۲\sqrt{۶}}{۵}$$

.۱۴

$$\cot\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=۲\Rightarrow\cos\alpha=۲\sin\alpha$$

با جایگذاری $\cos\alpha=۲\sin\alpha$ خواهیم داشت:

$$\frac{۲(۲\sin\alpha)-\sin\alpha}{۳\sin\alpha+۲\sin\alpha}=\frac{۴\sin\alpha-\sin\alpha}{۵\sin\alpha}=\frac{۳\sin\alpha}{۵\sin\alpha}=\frac{۳}{۵}$$

.۱۵

راه اول:

$$\frac{۱-\cos\alpha}{\tan^۲\alpha}=\frac{۱-\cos\alpha}{\frac{\sin^۲\alpha}{\cos^۲\alpha}}\xrightarrow[\text{صورت و مخرج}]{\cos\alpha\times}\frac{(۱-\cos\alpha)(\cos^۲\alpha)}{\sin^۲\alpha}=\frac{(۱-\cos\alpha)(\cos^۲\alpha)}{(۱-\cos^۲\alpha)}$$

$$=\frac{\cancel{(۱-\cos\alpha)}(\cos^۲\alpha)}{\cancel{(۱-\cos\alpha)}(۱+\cos\alpha)}=\frac{\cos^۲\alpha}{۱+\cos\alpha}$$

راه دوم: طرفین وسطین می‌کنیم و ساده می‌کنیم تا به عبارتی بدیهی برسیم.

$$\frac{۱-\cos\alpha}{\tan^۲\alpha}=\frac{\cos^۲\alpha}{۱+\cos\alpha}$$

$$\Rightarrow(۱-\cos\alpha)(۱+\cos\alpha)=\cos^۲\alpha\tan^۲\alpha\Rightarrow ۱-\cos^۲\alpha=\cos^۲\alpha\times\frac{\sin^۲\alpha}{\cos^۲\alpha}$$

$$\Rightarrow\sin^۲\alpha=\sin^۲\alpha$$ **همواره برقرار است.**

.۱۶

$$\frac{۱+\sin x-\cos^۲x}{۱+\sin x}=\frac{\sin x+۱-\cos^۲x}{۱+\sin x}=\frac{\sin x+\sin^۲x}{۱+\sin x}=\frac{\sin x(۱+\sin x)}{۱+\sin x}=\sin x$$

.۱۷

الف) $x^۴-y^۴=(x^۲-y^۲)(x^۲+y^۲)=(x-y)(x+y)(x^۲+y^۲)$

ب) $x^۶-y^۶=(x^۳-y^۳)(x^۳+y^۳)=(x-y)(x^۲+xy+y^۲)(x+y)(x^۲-xy+y^۲)$

پ) $۸a^۳+۲۷=(۲a)^۳+۳^۳=(۲a+۳)(۴a^۲-۶a+۹)$

ت) $a^۳b^۶-۸=(ab^۲)^۳-۲^۳=(ab^۲-۲)(a^۲b^۴+۲ab^۲+۴)$

abadgaranedu.ir

۱۸.

اگر n فرد باشد:

$$(\sqrt[n]{a})^n = \underbrace{\sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{a} \times \cdots \times \sqrt[n]{a}}_{n \text{ بار}} \overset{*}{=} \sqrt[n]{a^n} = a$$

$*: \sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$

علامت a اهمیتی ندارد.

اگر n زوج باشد و $a \geq ۰$

باتوجه به اینکه زیررادیکال با فرجه‌ی زوج تنها اعداد بزرگتر مساوی صفر قرار می‌گیرند.

$$(\sqrt[n]{a})^n = \sqrt[n]{a^n} = |a| \overset{a \geq ۰}{=\!=} a \qquad a \geq ۰$$

پس می‌توان گفت:

در صورت فرد بودن فرجه تساوی همواره برقرار است.

اما اگر فرجه زوج بود، a باید بزرگتر مساوی صفر باشد تا تساوی برقرار شود.

۱۹.

$\sqrt[n]{a^n} = \lvert a \rvert$	**زوج** n
$\sqrt[n]{a^n} = a$	**فرد** n

$$a^۲ < ۱ \Rightarrow -۱ < a < ۱ \qquad (۱)$$

$$\sqrt{a^۲} = |a| = -a \Rightarrow a < ۰ \qquad (۲)$$

$$\xrightarrow{(۱),(۲)} -۱ < a < ۰$$

$$\rightarrow ۱ - a > ۰$$

$$a - ۱ < ۰$$

$$\frac{\sqrt{(۱-a)^۲}}{\sqrt{(a-۱)^۲}} = \frac{|۱-a|}{|a-۱|} \quad \overset{\substack{۱-a>۰ \\ a-۱<۰}}{=\!=\!=} \quad \frac{۱-a}{-(a-۱)} = \frac{۱-a}{۱-a} = ۱$$

۲۰. $\boxed{a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} \quad a \geq ۰}$

الف) $۳^{\frac{۴}{۵}} \square ۳^{\frac{۳}{۴}} \xrightarrow[\text{به توان ۲۰}]{\text{طرفین}} ۳^{۱۶} \square ۳^{۱۵} \rightarrow ۳^{۱۶} > ۳^{۱۵}$

ب) $۳^{\frac{۲}{۳}} \square ۲^{\frac{۳}{۲}} \xrightarrow[\text{به توان ۶}]{\text{طرفین}} ۳^۴ \square ۲^۹ \rightarrow ۸۱ < ۵۱۲$

ج) $(۰/۱)^{\frac{۲}{۳}} \square ۰/۱^{\frac{۴}{۵}} \xrightarrow[\text{به توان ۱۵}]{\text{طرفین}} (۰/۱)^{۱۰} \square (۰/۱)^{۱۲} \rightarrow (۰/۱)^{۱۰} > (۰/۱)^{۱۲}$

اعداد بین صفر و یک هرچه به توان بزرگتری برسند، کوچک‌تر می‌شوند.

۲۱. $\boxed{a^{\frac{۱}{n}} = \sqrt[n]{a} \quad n \geq ۲ \ , \ a \geq ۰}$

الف) $۲^{\frac{۱}{۲}} = \sqrt{۲}$

ب) $۳^{\frac{۱}{۳}} = \sqrt[۳]{۳}$

ج) $(-۲)^{\frac{۱}{۲}}$

از آنجایی که پایه منفی است (-۲) نمی‌توان $(-۲)^{\frac{۱}{۲}}$ را به صورت رادیکالی نوشت.

abadgaranedu.ir

د) $(-۳)^{\frac{۱}{۳}}$

چون فرجه فرد است می‌توان (-۳) را به صورت رادیکالی نوشت:

$$(-۳)^{\frac{۱}{۳}} = \sqrt[۳]{-۳}$$

.۲۲

$$(a+b)(a-b) = a^۲ - b^۲$$
$$(x+a)(x+b) = x^۲ + (a+b)x + ab$$
$$(a+b)(a^۲ - ab + b^۲) = a^۳ + b^۳$$
$$(a-b)(a^۲ + ab + b^۲) = a^۳ - b^۳$$
$$(a-b)^۳ = a^۳ - ۳a^۲b + ۳ab^۲ - b^۳$$

الف) $x^۲ - ۱۶ = (x-۴)(x+۴)$

ب) $x^۲ + ۷x + ۱۲ = (x+۳)(x+۴)$

پ) $x^۲ - ۵x - ۱۴ = (x-۷)(x+۲)$

ت) $x^۶ + ۲۷ = (x^۲)^۳ + (۳)^۳ = (x^۲+۳)(x^۴ - ۳x^۲ + ۹)$

ث) $x^۳ - ۱ = (x-۱)(x^۲ + x + ۱)$

ج) $x^{۱۲} - ۱ = (x^۶ - ۱)(x^۶ + ۱) = (x^۲ - ۱)(x^۴ + x^۲ + ۱)(x^۲ + ۱)(x^۴ - x^۲ + ۱)$
$= (x-۱)(x+۱)(x^۴ + x^۲ - ۱)(x^۲ + ۱)(x^۴ - x^۲ + ۱)$

چ) $x^۳ - ۶x^۲ + ۱۲x - ۸ = (x)^۳ - ۳(x)^۲ \times (۲) + ۳(x)(۲^۲) - (۲)^۳ = (x-۲)^۳$

abadgaranedu.ir