

۱. x را عدد مورد نظر می گیریم. الف) $2\sqrt{x} = x$

x را عدد مورد نظر می گیریم. ب) $x^3 > 7x + 5$

x و y را عددهای مورد نظر می گیریم. پ) $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq x + y$

x و y را عددهای مورد نظر می گیریم. ت) $x^3 + y^3 \geq (x + y)^3$

x را عدد مورد نظر می گیریم. ث) $x \geq \frac{1}{x}$ (با شرط $x \neq 0$)

۲. الف) گزاره نیست. جملات سوالی گزاره نیستند.

ب) گزاره است. ارزش گزاره درست است.

پ) گزاره است. ارزش گزاره نادرست است $\sqrt{2}$ عددی گنگ است.

ت) گزاره است. ارزش گزاره نادرست است ارسطو شاگرد افلاطون بوده است.

ث) گزاره است. ارزش گزاره نادرست است.

$$2 + 3 \times 4 = 14$$

ج) گزاره است. ارزش گزاره نادرست است.

$(-1)^n$ برای n های زوج برابر ۱ و برای n های فرد برابر -1 است.

چ) گزاره نیست. جمله های خبری که نتوانیم ارزش آنها را تعیین کنیم گزاره نیستند.

ح) گزاره نیست. جملات امری گزاره نیستند.

۳. $\sim p$

۴.

| ردیف | گزاره | درست | نادرست |
|------|--|------|--------|
| ۱ | اگر ۷ زوج است، آنگاه ۲۵ مربع کامل است. | ✓ | |
| ۲ | اگر ۹ مربع کامل است، آنگاه $\sqrt{9}$ مربع کامل است. | | ✓ |
| ۳ | اگر ۲۹ اول است، آنگاه ۲ زوج است. | ✓ | |
| ۴ | اگر ۵ فرد باشد آنگاه ۷ زوج است. | ✓ | |
| ۵ | اگر ۵ زوج باشد آنگاه ۷ زوج است. | ✓ | |
| ۶ | اگر ۷ فرد است، آنگاه ۲۵ مربع کامل است. | ✓ | |
| ۷ | اگر ۶ فرد باشد آنگاه ۹۹ اول است. | ✓ | |

ترکیب شرطی $q \Rightarrow p$ فقط زمانی نادرست است که مقدم (p) درست و تالی (q) نادرست باشد. در بقیه حالت درست است.

۵. ایراد در گام سوم است، چون نمی دانیم علامت c مثبت است یا منفی تا بر اساس آن جهت نامساوی را تعیین نماییم.

* می دانیم اگر عددی منفی را در نامساوی ضرب کنیم جهت نامساوی عوض می شود.

۶. الف) عدد ۲، عددی اول است و $\sqrt{5}$ عددی گویا است.

ب) عدد ۲، عددی اول است یا $\sqrt{5}$ عددی گویا است.

۷. درست، یک ترکیب شرطی، فقط وقتی نادرست است که مقدم درست و تالی نادرست باشد.

(نادرست \equiv نادرست \Rightarrow درست)

۸. نادرست، (نادرست \equiv نادرست \Rightarrow درست)

۹. درست - نادرست، بدیهی است یکی از گزاره های P و $\sim P$ درست و دیگری نادرست است.

بنابراین ترکیب فصلی آن ها $(P \vee \sim P)$ درست و ترکیب عطفی آن ها $(P \wedge \sim P)$ نادرست است.

۱۰. درست:

با توجه به جدول ارزش گزاره ها داریم:

| P | $P \Rightarrow P$ |
|-----|-------------------|
| د | د |
| ن | د |

۱۱. الف) در گزاره بیان شده است که طول (x) و عرض (y) مستطیل را دو برابر کنیم اما در استدلال

ریاضی ذکر شده حاصل ضرب آن ها (xy) را دو برابر کرده است.

استدلال صحیح:

$S = xy$ مساحت: y عرض: x طول:



$S = (2x)(2y) = 4(xy)$ مساحت: $2y$ عرض: $2x$ طول:



گزاره صحیح: اگر طول و عرض یک مستطیل را دو برابر کنیم، آن گاه مساحت آن چهار برابر خواهد شد.

۱۲. نمودار پیکانی (ب) نمایشگر تابع نیست، زیرا از یک عضو مجموعه اول (یعنی عدد ۱) دو پیکان به

سمت دو عضو متمایز مجموعه دوم (یعنی a و b) خارج شده است.

۱۳. مجموعه ای که پیکان ها از آن خارج شده دامنه و مجموعه ای که پیکان ها به آن وارد شده برد تابع

است.

$$Df = \{a, b, c, d\}$$

$$Rf = \{e, f, g, h\}$$

۱۴. در نمایش زوج مرتبی یک تابع مؤلفه های اول، دامنه و مؤلفه های دوم، برد تابع است.

$$Df = \{1, 2, 3, 4\}$$

$$Rf = \{1, 5, 7, -1\}$$

۱۵. در تابع ثابت، برد تنها شامل یک عضو است. در نمایش زوج مرتبی تابع ثابت، تمام مؤلفه های دوم

(مقادیر y) با یکدیگر مساوی هستند، بنابراین:

$$b=4$$

$$b=4, a+b=4 \longrightarrow a+4=4 \longrightarrow a=0$$

۱۶. در نمودار یک تابع هر خط موازی محور عرض ها، نمودار را حداکثر در یک نقطه قطع می کند با

توجه به این مطلب داریم:

الف) تابع است.

ب) تابع نیست.

پ) تابع نیست.

ت) تابع است.

۱۷. دو زوج مرتب دارای مؤلفه‌های اول یکسان هستند برای اینکه این زوج مرتب‌ها مربوط به یک تابع باشند باید مؤلفه‌های دومشان نیز با هم برابر باشند. (با توجه به تعریف تابع) در نتیجه داریم:

$$4m + 2 = 3m - 1 \Rightarrow 4m - 3m = -1 - 2$$

$$\Rightarrow m = -3$$

۱۸. گام اول: در تابع ثابت، برد تنها شامل یک عضو است.

چون f تابع ثابت است، مؤلفه دوم (y) همه زوج مرتب‌ها با یکدیگر برابر است.

$$f = \left\{ (-1, \underbrace{n^2 - 2n}_{y_1}), (m - 4, \underbrace{3}_{y_2}), (m + n, \underbrace{t}_{y_3}) \right\}$$

$$f \text{ تابع ثابت} \Rightarrow y_1 = y_2 = y_3$$

$$\text{الف) } y_3 = y_2 \Rightarrow t = 3$$

$$\text{ب) } y_1 = y_2 \Rightarrow n^2 - 2n = 3$$

برای حل معادله فوق بعد از مرتب کردن معادله، آن را با استفاده از اتحاد جمله مشترک تجزیه می‌کنیم.

$$n^2 - 2n = 3 \xrightarrow{\text{مرتب}} n^2 - 2n - 3 = 0 \xrightarrow{\text{جمله مشترک}} (n - 3)(n + 1) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} n - 3 = 0 \Rightarrow n = 3 \\ n + 1 = 0 \Rightarrow n = -1 \notin \mathbb{N} \end{cases}$$

تذکر: در سوال ذکر شده $m, n \in \mathbb{N}$ یعنی m و n اعداد طبیعی می‌باشند، اما $n = -1$ عدد طبیعی نیست، بنابراین غیرقابل قبول است.

گام دوم: برای آن که دامنه تابع دو عضوی باشد، باید مؤلفه‌های اول (x) دو تا از زوج مرتب‌ها با یکدیگر برابر باشد.

$$f = \left\{ (\underbrace{-1}_{x_1}, n^2 - 2n), (\underbrace{m - 4}_{x_2}, 3), (\underbrace{m + n}_{x_3}, t) \right\}$$

حالت اول:

$$x_2 = x_3 \xrightarrow{n=3} m - 4 = m + n \Rightarrow m - 4 = m + 3 \Rightarrow m - 4 - m - 3 = 0 \Rightarrow -7 = 0 \text{ (این تساوی ناممکن است)}$$

حالت دوم:

$$x_3 = x_1 \xrightarrow{n=3} m + n = -1 \Rightarrow m + 3 = -1 \Rightarrow m = -1 - 3 \Rightarrow m = -4 \notin \mathbb{N}$$

تذکر: در سوال ذکر شده است $m \in \mathbb{N}$ ، در حالیکه $m = -4$ عدد طبیعی نیست بنابراین غیرقابل قبول است.

حالت سوم:

$$x_2 = x_1 \Rightarrow m - 4 = -1 \Rightarrow m = -1 + 4 \Rightarrow m = 3$$

گام سوم: در گام اول مقدار $t = 3$ و در گام دوم مقدار $m = 3$ به دست آمد، بنابراین مقدار $m + t$ به دست می‌آید:

$$m + t = 3 + 3 = 6$$

۱۹.

برای تعیین مقدار تابع به ازای هریک از مقادیر x لازم است ابتدا مشخص کنیم مقدار x در دامنه کدام ضابطه قرار دارد.

الف) $x = 2$ متعلق به دامنه $-1 \leq x \leq 2$ می‌باشد، بنابراین مقدار تابع را با ضابطه دوم تعیین می‌کنیم:

$$f(x) = x^2, \quad -1 \leq x \leq 2$$

$$f(2) = 2^2 = 4$$

ب) $x = 3$ متعلق به دامنه $x > 2$ می‌باشد، بنابراین مقدار تابع را با ضابطه سوم تعیین می‌کنیم و

$x = -1$ متعلق به دامنه $-1 \leq x \leq 2$ می‌باشد، بنابراین مقدار تابع را با ضابطه دوم تعیین می‌کنیم:

$$f(x) = 5 \quad x > 2 \Rightarrow f(3) = 5$$

$$f(x) = x^2 \quad -1 \leq x \leq 2 \Rightarrow f(-1) = (-1)^2 = 1$$

$$f(3) + f(-1) = 5 + 1 = 6$$

ج) $x = -\sqrt{2} \approx -1,4$ متعلق به دامنه $x < -1$ می‌باشد، بنابراین مقدار تابع را با ضابطه اول تعیین

می‌کنیم و $x = \sqrt{3} \approx 1,7$ متعلق به دامنه $-1 \leq x \leq 2$ می‌باشد، بنابراین مقدار تابع را با ضابطه مقدار تابع را با ضابطه دوم تعیین می‌کنیم.

$$f(x) = x \quad x < -1 \Rightarrow f(-\sqrt{2}) = -\sqrt{2}$$

$$f(x) = x^2 \quad -1 \leq x \leq 2 \Rightarrow f(\sqrt{3}) = \sqrt{3}^2 = 3$$

$$f(-\sqrt{2}) + f(\sqrt{3}) = -\sqrt{2} + 3$$

د) $x = \sqrt{2} \approx 1,4$ متعلق به دامنه $-1 \leq x \leq 2$ می‌باشد، بنابراین مقدار تابع را با ضابطه دوم تعیین

می‌کنیم و $x = 5$ متعلق به دامنه $x > 2$ می‌باشد، بنابراین مقدار تابع را با ضابطه سوم تعیین می‌کنیم.

$$f(x) = x^2 \quad -1 \leq x \leq 2 \Rightarrow f(\sqrt{2}) = \sqrt{2}^2 = 2$$

$$f(x) = 5 \quad x > 2 \Rightarrow f(5) = 5$$

$$f(\sqrt{2}) + f(5) = 2 + 5 = 7$$

۲۰. الف) عرض‌ها (ب) x طول و y عرض

۲۱. در نمایش زوج مرتبی تابع همانی مؤلفه اول و دوم هر زوج مرتب با هم برابرند.

$$(3a - b, 5) \xrightarrow{\text{تابع همانی}} \begin{cases} 3a - b = 5 \\ 3a + b = 7 \end{cases}$$

$$(7, 3a + b) \xrightarrow{\text{تابع همانی}} \frac{3a + b = 7}{6a = 12 \Rightarrow a = 2}$$

$$a = 2 \Rightarrow 3a - b = 5 \rightarrow 3 \times 2 - b = 5 \Rightarrow 6 - b = 5 \Rightarrow b = 1$$

۲۲. ضابطه تابع همانی به صورت $f(x) = x$ است.

با توجه به ضابطه تابع همانی باید ضریب x یعنی $a + 2$ برابر ۱ و مقدار ثابت $b - 3$ برابر صفر شود.

$$a + 2 = 1 \Rightarrow a = -1, \quad b - 3 = 0 \Rightarrow b = 3$$

۲۳. در نمایش زوج مرتبی تابع ثابت تمام مؤلفه‌های دوم با هم برابرند.

$$f = \{(1, 4), (2, 4), (3, 4)\}$$

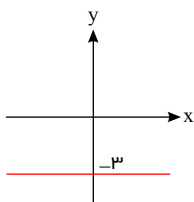
۲۴. در نمایش زوج مرتبی تابع ثابت همه مؤلفه‌های دوم با هم برابرند در نتیجه داریم:

$$a + 1 = 6 \Rightarrow a = 5$$

با جایگذاری مقدار $a + b + 1$ در $a + b + 1$ داریم:

$$a + b + 1 = 6 \xrightarrow{a=5} 5 + b + 1 = 6 \Rightarrow b = 0$$

۲۵. ضابطه $f(x) = -3$ تابع ثابت با مجموعه برد $Rf = \{-3\}$ است.



abadgaranedu.ir