تاریخ :	وقت : دقیقه	سریال ۳۴۳۵۹۴
نام و نام خانوادگی :	تعداد سوالات: ۲۰	
موضوع		آموزشگاه آبادگران

۱. نمودار $y = x^{۳}$ ابتدا ۳ واحد به چپ و سپس ۲ واحد به بالا منتقل شده است تا نمودار داده‌شده حاصل شود، پس داریم:

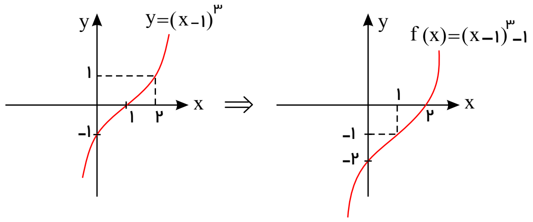
$$y = x^{۳} \xrightarrow[x \to x+۳]{\text{۳واحد به چپ}} y = (x+۳)^{۳} \xrightarrow{\text{۲واحد به بالا}} y = (x+۳)^{۳} + ۲$$

در مقایسه با تابع $y = (x+a)^{۳} + b$ داریم:

$$a = ۳ \quad , \quad b = ۲$$

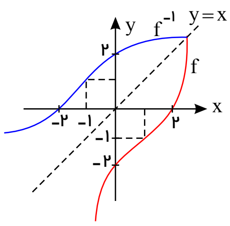
.۲

الف) برای رسم $f(x) = (x-۱)^{۳} - ۱$ باید $y = x^{۳}$ را یک واحد به راست و سپس یک واحد به پایین منتقل کنیم.



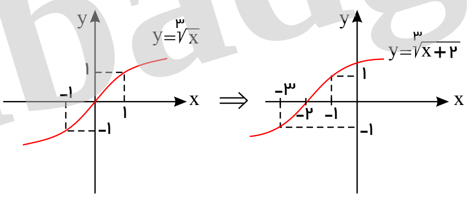
تابع f یک به یک است، زیرا هر خط افقی موازی محور xها نمودار تابع را در یک نقطه قطع می‌کند.

ب) برای رسم $f^{-۱}$ باید نمودار f را نسبت به خط $y = x$ قرینه کنیم.

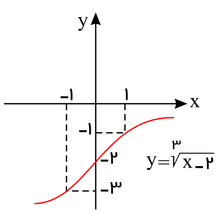


.۳

الف) برای رسم $y = \sqrt[۳]{x+۲}$ باید نمودار $y = \sqrt[۳]{x}$ را ۲ واحد به چپ منتقل کنیم.



ب) برای رسم $y = \sqrt[۳]{x} - ۲$ باید نمودار $y = \sqrt[۳]{x}$ را ۲ واحد به پایین منتقل کنیم.



.۴

$$f(x) = (x+۲)^{۳} - ۴ \Rightarrow y = (x+۲)^{۳} - ۴ \Rightarrow (x+۲)^{۳} = y + ۴$$
$$\Rightarrow x + ۲ = \sqrt[۳]{y+۴} \Rightarrow x = \sqrt[۳]{y+۴} - ۲ \Rightarrow y = f^{-۱}(x) = \sqrt[۳]{x+۴} - ۲$$
$$f^{-۱}(x) = \sqrt[۳]{x+a} + b = \sqrt[۳]{x+۴} - ۲ \Rightarrow a = ۴ \ , \ b = -۲$$

.۵

تابع نزولی $\rightarrow (-1,+\infty]$ تابع صعودی $\rightarrow [-\infty, 2)$

توجه کنید تابع در بازهٔ $(-\infty,-1]$ اکیداً صعودی و در بازهٔ $[2,+\infty)$ اکیداً نزولی است.

.۶

اکیداً صعودی $\rightarrow (1,+\infty]$ اکیداً نزولی $\rightarrow [-2,1]$ اکیداً صعودی $(-\infty,-2] \rightarrow$

تابع در دامنه‌اش یعنی $\mathbb{R}$ غیر یکنوا است.

.۷

$$f=\{(-1,4m)\,,\,(-3,m)\,,\,(2,3m+2)\}$$

اعضای دامنه را از کوچک به بزرگ مرتب می‌کنیم.

$$-3<-1<2\xrightarrow{f\text{ اکیداً صعودی}} f(-3)<f(-1)<f(2)\Rightarrow m<4m<3m+2$$

$$\begin{cases} m<4m\Rightarrow 3m>0\Rightarrow m>0 \quad (1)\\ 4m<3m+2\Rightarrow m<2 \quad (2)\end{cases}$$

$$(1)\cap(2)\Rightarrow 0<m<2$$

.۸ برای هر دو مقدار متمایز x_1، x_2 از دامنهٔ fof داریم.

$$x_1<x_2\xrightarrow{f\text{ اکیداً نزولی}} f(x_1)>f(x_2)\xrightarrow{f\text{ اکیداً نزولی}} f(f(x_1))<f(f(x_2))$$
$$\Rightarrow fof(x_1)<fof(x_2)\Rightarrow \text{ اکیداً صعودی } fof$$

.۹

الف) $f(x)=x^3+4x-1 \qquad D_f=\mathbb{R}$

$$x_1\,,\,x_2\in D_f: x_1<x_2\Rightarrow \left|\begin{array}{l} x_1^3<x_2^3\\ 4x_1<4x_2\end{array}\right. \Rightarrow x_1^3+4x_1<x_2^3+4x_2$$

$\Rightarrow x_1^3+4x_1-1<x_2^3+4x_2-1\Rightarrow f(x_1)<f(x_2)\Rightarrow$ f اکیداً صعودی است.

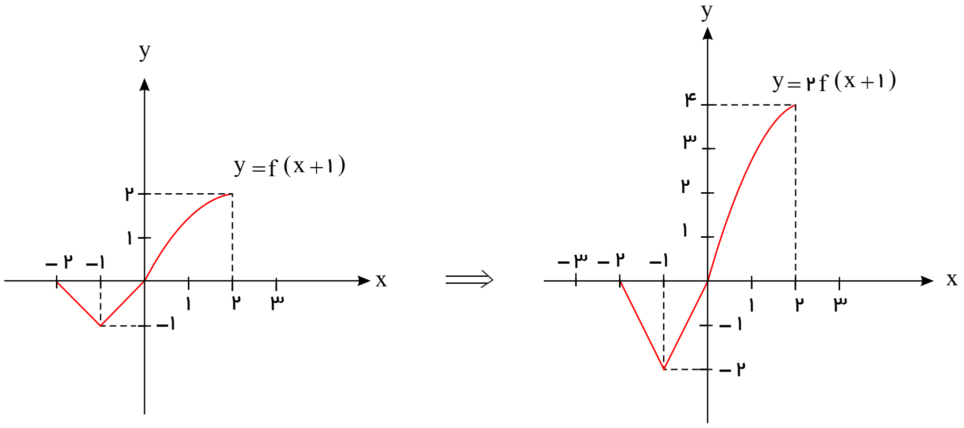
ب) $g(x)=-\sqrt[3]{2x+7} \qquad D_g=\mathbb{R}$

$$x_1\,,\,x_2\in D_g: x_1<x_2\rightarrow 2x_1<2x_2\Rightarrow 2x_1+7<2x_2+7$$

$$\Rightarrow \sqrt[3]{2x_1+7}<\sqrt[3]{2x_2+7}\Rightarrow -\sqrt[3]{2x_1+7}>-\sqrt[3]{2x_2+7}$$

$\Rightarrow g(x_1)>g(x_2)$ تابع g اکیداً نزولی است.

.۱۰ برای رسم $y=2f(x+1)$، نمودار $y=f(x)$ را ابتدا یک واحد به چپ منتقل کرده و سپس عرض نقاط را در ۲ ضرب می‌کنیم.



.۱۱

$$\frac{T}{۲} = \frac{۵}{۲} \Rightarrow T = ۵ \Rightarrow \frac{۲\pi}{|b|} = ۵ \Rightarrow |b| = \frac{۲\pi}{۵} \xrightarrow{b>۰} b = \frac{۲\pi}{۵}$$

$$\left.\begin{array}{l} max = |a| + c = ۳ \\ min = -|a| + c = -۱ \end{array}\right\} \Rightarrow ۲c = ۲ \Rightarrow c = ۱ \rightarrow |a| = ۲ \xrightarrow{a>۰} a = ۲$$

$$f(x) = ۲\sin(\frac{۲\pi}{۵}x) + ۱$$

.۱۲

در تابع $y = a\cos bx + c$ داریم:

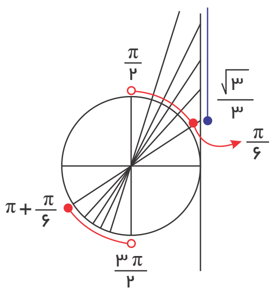
$$T = \frac{۲\pi}{|b|} \ , \ max = |a| + c \ , \ \min = -|a| + c$$

$$f(x) = \sqrt{۲}\cos(\frac{۱}{۳}x) - ۱ \Rightarrow T = \frac{۲\pi}{\frac{۱}{۳}} = ۶\pi$$

$$max\ f = \sqrt{۲} - ۱ \ , \ min\ f = -\sqrt{۲} - ۱$$

$$\frac{max\ f}{min\ f} = \frac{\sqrt{۲} - ۱}{-\sqrt{۲} - ۱} = \frac{۱ - \sqrt{۲}}{\sqrt{۲} + ۱} \times \frac{\sqrt{۲} - ۱}{\sqrt{۲} - ۱} = \frac{\sqrt{۲} - ۲ - ۱ + \sqrt{۲}}{۲ - ۱} = -۳ + ۲\sqrt{۲}$$

.۱۳ در دایرهٔ مثلثاتی مقابل باید زوایایی را بیابیم که تانژانت آن‌ها بزرگ‌تر یا مساوی $\frac{\sqrt{۳}}{۳}$ باشد، که داریم:



$$\tan\alpha \geq \frac{\sqrt{۳}}{۳} \Rightarrow \frac{\pi}{۶} \leq \alpha < \frac{\pi}{۲} \quad \text{یا} \quad \frac{۷\pi}{۶} \leq \alpha < \frac{۳\pi}{۲}$$

.۱۴

نکته: $\sin u=\sin v \Rightarrow u=2k\pi+v \quad , \quad u=2k\pi+\pi-v$

$$\sin 3x+\sin 5x=0 \Rightarrow \sin 5x=-\sin 3x=\sin(-3x)$$

$$\left.\begin{cases} 5x=2k\pi-3x \Rightarrow 8x=2k\pi \Rightarrow x=\frac{k\pi}{4} \\ 5x=2k\pi+\pi-(-3x)=2k\pi+\pi+3x \Rightarrow 2x=2k\pi+\pi \Rightarrow x=k\pi+\frac{\pi}{2} \end{cases}\right\} \xrightarrow{u} x=\frac{k\pi}{4}$$

.۱۵ نکته: $\cos u=\cos v \Rightarrow u=2k\pi\pm v \quad , \quad \cos(\frac{\pi}{2}+\alpha)=-\sin\alpha$

$$\sin(\frac{x}{2})+\cos(\frac{x}{2})=0 \Rightarrow \cos(\frac{x}{2})=-\sin(\frac{x}{2})=\cos(\frac{\pi}{2}+\frac{x}{2})$$

$$\frac{x}{2}=2k\pi\pm(\frac{\pi}{2}+\frac{x}{2}) \Rightarrow \begin{cases} \frac{x}{2}=2k\pi+\frac{\pi}{2}+\frac{x}{2} \Rightarrow 2k\pi+\frac{\pi}{2}=0 \text{ ست} \\ \frac{x}{2}=2k\pi-\frac{\pi}{2}-\frac{x}{2} \Rightarrow x=2k\pi-\frac{\pi}{2} \text{ واب} \end{cases}$$

جوابهای واقع در بازه $[0,2\pi] \Rightarrow x=\frac{3\pi}{2}$

.۱۶ نکته: $\tan u=\tan v \Rightarrow u=ku+v$

نکته: $\cos u=\cos v \Rightarrow u=2k\pm v$

الف) $\tan x=3\cot x \xrightarrow{\times \tan x} \tan^2 x=3\cot x\tan x=3 \Rightarrow \tan x=\pm\sqrt{3}$

$$\Rightarrow \left.\begin{cases} \tan x=\sqrt{3}=\tan\frac{\pi}{3} \Rightarrow x=k\pi+\frac{\pi}{3} \\ \tan x=-\sqrt{3}=\tan(-\frac{\pi}{3}) \Rightarrow x=k\pi-\frac{\pi}{3} \end{cases}\right. \Rightarrow x=ku\pm\frac{\pi}{3}$$

ب) $2\sin^2 x=3\cos x \Rightarrow 2(1-\cos^2 x)=3\cos x \Rightarrow 2-2\cos^2 x=3\cos x$

$$\Rightarrow 2\cos^2 x+3\cos x-2=0 \quad , \quad \cos x=t \Rightarrow 2t^2+3t-2=0 \quad , \quad \Delta=9+16=25$$

$$t=\frac{-3\pm 5}{4}\begin{cases} t=-2 \Rightarrow \cos x=-2 \text{ غ ق ق} \\ t=\frac{1}{2} \Rightarrow \cos x=\frac{1}{2}=\cos\frac{\pi}{3} \Rightarrow x=2k\pi\pm\frac{\pi}{3} \end{cases}$$

.۱۷ $\sin x+\cos^2 x=\frac{1}{4} \Rightarrow \sin x+1-\sin^2 x=\frac{1}{4} \Rightarrow \sin^2 x-\sin x-\frac{3}{4}=0$

$$\Delta=1+3=4 \Rightarrow \sin x=\frac{1\pm 2}{2}=\frac{3}{2} \; , \; \frac{-1}{2}$$

نیر قابل قبول $\sin x = \frac{۳}{۲}$

$$\sin x = -\frac{۱}{۲} = \sin(-\frac{\pi}{۶}) \Rightarrow \begin{cases} x = ۲k\pi - \frac{\pi}{۶} \quad (۱) \\ x = ۲k\pi + \pi + \frac{\pi}{۶} = ۲k\pi + \frac{۷\pi}{۶} \quad (\end{cases}$$

$$(۱) \Rightarrow x = ۲\pi - \frac{\pi}{۶} = \frac{۱۱\pi}{۶}$$

$$(۲) \Rightarrow x = \frac{۷\pi}{۶}$$

.۱۸ نکته: $\cos(\frac{\pi}{۲} + \alpha) = -\sin\alpha$

نکته: $\cos u = \cos v \Rightarrow u = ۲k\pi \pm$

الف) $۲\cos^۲ ۳x + \cos ۳x = ۰ \Rightarrow \cos ۳x(۲\cos ۳x + ۱) = ۰ \Rightarrow \cos ۳x = ۰ \; , \; \cos ۳x = -\frac{}{۱}$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos ۳x = ۰ \Rightarrow ۳x = k\pi + \frac{\pi}{۲} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{۳} + \frac{\pi}{۶} \\ \cos ۳x = -\frac{۱}{۲} = -\cos\frac{\pi}{۳} = \cos(\pi - \frac{\pi}{۳}) \Rightarrow \cos ۳x = \cos\frac{۲\pi}{۳} \Rightarrow ۳x = ۲k\pi \pm \end{cases}$$

$$\Rightarrow x = \frac{۲k\pi}{۳} \pm \frac{۲\pi}{۹}$$

ب) $\sin ۵x + \cos ۳x = ۰ \Rightarrow \cos ۳x = -\sin ۵x \Rightarrow \cos ۳x = \cos(\frac{\pi}{۲} + ۵x$

$$۳x = ۲k\pi \pm (\frac{\pi}{۲} + ۵x)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} ۳x = ۲k\pi + \frac{\pi}{۲} + ۵x \Rightarrow -۲x = ۲k\pi + \frac{\pi}{۲} \Rightarrow x = -k\pi - \\ ۳x = ۲k\pi - \frac{\pi}{۲} - ۵x \Rightarrow ۸x = ۲k\pi - \frac{\pi}{۲} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{۴} - \frac{\pi}{۱۶} \end{cases}$$

.۱۹ در تابع $y = a\cos bx + c$ داریم:

$$T = \frac{۲\pi}{|b|} \; , \; max = |a| + c \; , \; min = -|a| + c$$

$$f(x) = m\cos(mx) + ۳ \Rightarrow T = \frac{۲\pi}{m} = \frac{\pi}{۴} \Rightarrow m = ۸$$

$$f(x) = ۸\cos(۸x) + ۳ \rightarrow max = ۸ + ۳ = ۱۱ \; , \; min = -۸ + ۳ = -۵$$

.۲۰ در تابع‌های $y = a\sin bx + c$ و $y = a\cos bx + c$ داریم:

$T = \frac{۲\pi}{|b|} \quad , \quad max = |a| + c \quad , \quad min = -|a| + c$

الف) $f(x) = \sqrt{۳}\sin(۲\pi x) - ۱ \to T = \frac{۲\pi}{۲\pi} = ۱$

$max\ f = |\sqrt{۳}| - ۱ = \sqrt{۳} - ۱ \quad , \quad min\ f = -|\sqrt{۳}| - ۱ = -\sqrt{۳} - ۱$

ب) $g(x) = \pi\cos(\frac{\pi}{۲}x) + \frac{\pi}{۲} \to T = \frac{۲\pi}{\frac{\pi}{۲}} = ۴$

$max\ g = |\pi| + \frac{\pi}{۲} = \frac{۳\pi}{۲} \quad , \quad min\ g = -|\pi| + \frac{\pi}{۲} = -\frac{\pi}{۲}$