تاریخ :	وقت : دقیقه
نام و نام خانوادگی :	تعداد سوالات: ۲۰
موضوع 1 .هندسه دهم	آموزشگاه آبادگران

سریال ۹۴۲۷۵۰

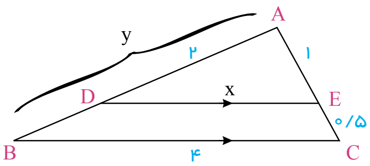
۱.
اثبات:

$$\frac{x}{y}=\frac{a}{b}=\frac{m}{n}=k\Rightarrow \begin{array}{l} x=ky \\ a=kb \\ m=kn \end{array} \Rightarrow \frac{x+a+m}{y+b+n}=\frac{ky+kb+kn}{y+b+n}=\frac{k(y+b+n)}{y+b+n}=k$$

۲.

$$\xrightarrow{\text{طرفین وسطین}} \begin{array}{l} (۱)\ \frac{x}{۲}=\frac{۳}{۵}\rightarrow x=\frac{۶}{۵} \\ (۲)\ \frac{y}{۳}=\frac{۳}{۵}\rightarrow y=\frac{۹}{۵} \\ (۳)\ \frac{z}{۶}=\frac{۳}{۵}\rightarrow z=\frac{۱۸}{۵} \end{array}$$

۳. طبق قضیه تالس:



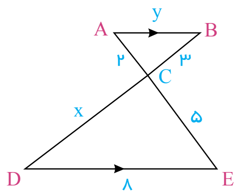
$$DE \parallel BC \Rightarrow \frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}=\frac{DE}{BC}$$

$$\frac{۲}{y}=\frac{۱}{۱/۵}=\frac{x}{۴}$$

$$y=AB=۳cm \qquad x=DE=\frac{۴}{۱/۵}=\frac{۸}{۳}$$

۴. الف)

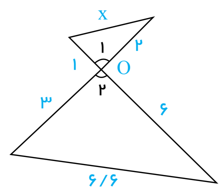
$$\left.\begin{array}{l} AB \parallel DE \xrightarrow{\text{مورّب}BD} \widehat{B}=\widehat{D} \\ \text{متقابل به رأس}\ \widehat{C}_۱=\widehat{C}_۲ \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{زز}} \overset{\Delta}{ABC} \sim \overset{\Delta}{EDC} \Rightarrow \frac{AC}{CE}=\frac{AB}{DE}=\frac{BC}{DC}$$



ب)

$$\Rightarrow \frac{۲}{۵}=\frac{y}{۸}=\frac{۳}{x}\Rightarrow y=\frac{۱۶}{۵}\ ,\quad x=\frac{۱۵}{۲}$$

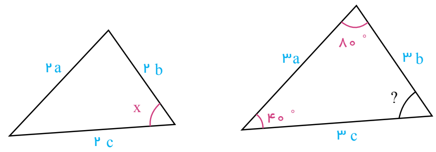
$$\left.\begin{array}{l} \text{متقابل به رأس}\ \widehat{O}_۱=\widehat{O}_۲ \\ \frac{۱}{۳}=\frac{۲}{۶} \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{ض ز ض}} \text{دو مثلث متشابهند} \Rightarrow \frac{۱}{۳}=\frac{x}{۶/۶}\Rightarrow x=۲/۲$$



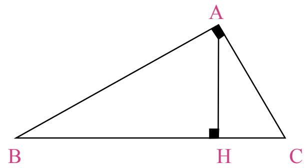
ج)

$$\frac{۲a}{۳a}=\frac{۲b}{۳b}=\frac{۲c}{۳c}=\frac{۲}{۳}\xrightarrow{\text{ض ض ض}} \text{دو مثلث متشابهند} \Rightarrow x=?=۶۰^\circ$$

$$?=۱۸۰^\circ-(۸۰^\circ+۴۰^\circ)=۶۰^\circ$$



.۵



$۱)\ BH=۹\ ,\ CH=۴\ ,\ AH=?\ ,\ AB=?\ ,\ AC=?$

اثبات: در تمام موارد سه مثلث زیر متشابه هستند (زز)

$$\overset{\Delta}{ABC}\sim\overset{\Delta}{ABH}\sim\overset{\Delta}{ACH}$$

$$\overset{\Delta}{ABH}\sim\overset{\Delta}{ACH}\Rightarrow\frac{AH}{BH}=\frac{CH}{AH}=\frac{AC}{AB}\Rightarrow AH^۲=۴\times۹=۳۶\Rightarrow AH=۶$$

$$\overset{\Delta}{ACH}: AC^۲=AH^۲+CH^۲\Rightarrow AC^۲=۶^۲+۴^۲=۵۲\Rightarrow AC=۲\sqrt{۳}$$

$$\overset{\Delta}{ABC}: BC^۲=AB^۲+AC^۲\Rightarrow(۹+۴)^۲=AB^۲+(۲\sqrt{۱۳})^۲\Rightarrow AB^۲=۱۶۹-۵۲=۱۱۷\Rightarrow AB=۳\sqrt{۱۳}$$

$۲)\ AB=۱۰\ ,\ BC=۱۲\ ,\ AC=?\ ,\ AH=?$

روش اول:

$$BC^۲=AB^۲+AC^۲\Rightarrow۱۲^۲=۱۰^۲+AC^۲\Rightarrow AC=\sqrt{۴۴}=۲\sqrt{۱۱}$$

$$S=\frac{۱}{۲}AB\times AC=\frac{۱}{۲}AH\times BC\Rightarrow\cancel{\frac{۱}{۲}}\times۱۰\times۲\sqrt{۱۱}=\cancel{\frac{۱}{۲}}\times AH\times۱۲\Rightarrow AH=\frac{۵\sqrt{۱۱}}{۳}$$

روش دوم:

$$\overset{\Delta}{ABC}\sim\overset{\Delta}{ACH}\Rightarrow\frac{AC}{BC}=\frac{AH}{AB}\Rightarrow\frac{۲\sqrt{۱۱}}{۱۲}=\frac{AH}{۱۰}\Rightarrow AH=\frac{۵\sqrt{۱۱}}{۳}$$

$$۳)\ AB=۸\ ,\ AC=۶\ ,\ BH=?\ ,\ CH=?\ \Rightarrow\ BC^۲=AB^۲+AC^۲=۸^۲+۶^۲=۱۰۰\Rightarrow BC=۱۰$$

$$\overset{\Delta}{ABH}\sim\overset{\Delta}{ACH}\Rightarrow\frac{AB}{AC}=\frac{BH}{CH}$$

$$\xrightarrow[\text{ترکیب درمخرج}]{\text{ترکیب در صورت}}\frac{AB}{AB+AC}=\frac{BH}{\underbrace{BH+CH}_{BC}}\Rightarrow\frac{۸}{۸+۶}=\frac{BH}{۱۰}\Rightarrow BH=\frac{۴۰}{۷}\Rightarrow CH=۱۰-\frac{۴۰}{۷}=\frac{۳۰}{۷}$$

$۴)\ AB=۸\ ,\ AH=۴\ ,\ BC=?\ ,\ AC=?$

$$\overset{\Delta}{ABH}: AB^۲=AH^۲+BH^۲\Rightarrow۸^۲=۴^۲+BH^۲\Rightarrow BH=\sqrt{۴۸}=۴\sqrt{۳}$$

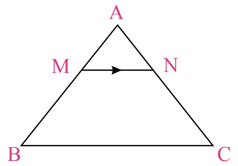
$$\overset{\Delta}{ABH}\sim\overset{\Delta}{ACH}\Rightarrow\frac{AB}{AC}=\frac{BH}{AH}=\frac{AH}{CH}\Rightarrow\frac{۸}{AC}=\frac{۴\sqrt{۳}}{AH}=\frac{AH}{CH}\Rightarrow\frac{۸}{AC}=\frac{۴\sqrt{۳}}{۴}\Rightarrow AC=??$$

$$\overset{\Delta}{ABH} \sim \overset{\Delta}{ABC} \Rightarrow \frac{AB}{BC} = \frac{BH}{AB} \Rightarrow AB^{۲} = BH \times BC$$

$$۸^{۲} = ۴\sqrt{۳} \times BC \Rightarrow BC = \frac{۱۶\sqrt{۳}}{۳} \rightarrow CH = \frac{۱۶\sqrt{۳}}{۳} - ۴\sqrt{۳} = \frac{۴\sqrt{۳}}{۳}$$

$$AH^{۲} = BH \times CH = ۴\sqrt{۳} \times \frac{۴\sqrt{۳}}{۳} = ۱۶ \Rightarrow AH = ۴$$

.۶



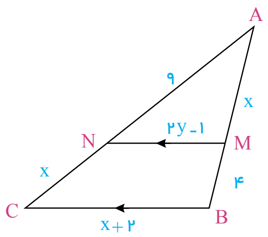
فرض : $SMNCB = ۸S_{\overset{\Delta}{AMN}}$

حکم : $\frac{MB}{MA} = ?$

$$\overset{\Delta}{AMN} \sim \overset{\Delta}{ABC} \Rightarrow \frac{S_{\overset{\Delta}{AMN}}}{S_{\overset{\Delta}{ABC}}} = \left(\frac{MN}{BC}\right)^{۲}$$

$$\frac{S_{\overset{\Delta}{AMN}}}{S_{\overset{\Delta}{AMN}} + \underbrace{SMNCB}_{۸S_{\overset{\Delta}{ABN}}}} = \left(\frac{MN}{BC}\right)^{۲} \Rightarrow \frac{۱}{۹} = \left(\frac{MN}{BC}\right)^{۲} \Rightarrow \frac{MN}{BC} = \frac{۱}{۳}$$

.۷ طبق قضیه تالس:

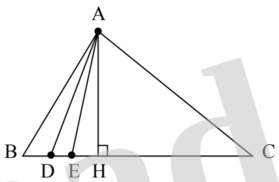


$$\frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC} \Rightarrow \frac{x}{۴} = \frac{۹}{x} \Rightarrow x^{۲} = ۳۶ \Rightarrow x = ۶$$

$$\frac{AM}{AB} = \frac{MN}{BC} \Rightarrow \frac{۶}{۱۰} = \frac{۲y-۱}{۸} \Rightarrow ۲۰y - ۱۰ = ۴۸ \Rightarrow ۲۰y = ۵۸ \Rightarrow y = \frac{۵۸}{۲۰}$$

$$= ۲/۹$$

.۸



فرض: $S_{\overset{\Delta}{ACE}} = ۳S_{\overset{\Delta}{ADE}} = ۲S_{\overset{\Delta}{ABD}}$

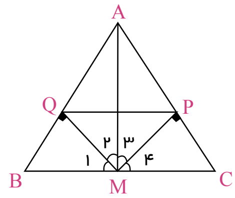
حکم: $\frac{BC}{DE} = ?\ ,\ \frac{DE}{BD} = ?$

اثبات: ارتفاع AH را رسم می‌کنیم.

$$\left.\begin{array}{l} \text{فرض} \Rightarrow \cancel{\frac{۱}{۲}AH} \times CE = ۳ \times \cancel{\frac{۱}{۲} \times AH} \times DE \Rightarrow CE = ۳DE \\ \cancel{\frac{۱}{۲}AH} \times CE = ۲ \times \cancel{\frac{۱}{۲}AH} \times BD \Rightarrow CE = ۲BD \end{array}\right\} \Rightarrow ۳DE = ۲BD \Rightarrow \frac{DE}{BD} = \frac{۲}{۳}$$

$$\frac{BC}{DE} = \frac{BD + DE + EC}{DE} = \frac{\frac{۳}{۲}DE + DE + ۳DE}{DE} = \frac{۳}{۲} + ۴ = \frac{۱۱}{۲}$$

۹.



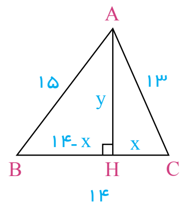
فرض: $\begin{cases} BM=MC \\ \widehat{M}_۱=\widehat{M}_۲ \\ \widehat{M}_۳=\widehat{M}_۴ \end{cases} \Rightarrow$ حکم: $QP \parallel BC$

اثبات:

$$\left.\begin{array}{l} \overset{\Delta}{ABM}: \text{نیمساز}\, MQ \xrightarrow{\text{قضیه}} \frac{AM}{MB}=\frac{AQ}{QB} \\ \overset{\Delta}{ACM}: \text{نیمساز}\, MP \xrightarrow{\text{قضیه}} \frac{AM}{MC}=\frac{AP}{PC}\end{array}\right\} \xrightarrow{MB=MC} \frac{AQ}{QB}=\frac{AP}{PC}$$

$$\xrightarrow{\text{عکس قضیه}} PQ\parallel BC$$

۱۰.



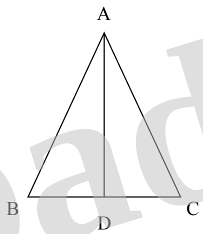
$$\left.\begin{array}{l}\overset{\Delta}{ABH}: y^۲=۱۵-(۱۴-x)^۲ \\ \overset{\Delta}{ACH}: y^۲=۱۳^۲-x^۲\end{array}\right\} \Rightarrow ۱۵^۲-(۱۴-x)^۲=۱۳^۲-x^۲$$

$$\Rightarrow \underbrace{۲۲۵-۱۹۶}_{۲۹}+۲۸x-x^۲=۱۶۹-x^۲ \Rightarrow ۲۸x=۱۶۹-۲۹=۱۴۰ \quad x=\frac{۱۴۰}{۲۸}=۵$$

$$y^۲=۱۶۹-۲۵=۱۴۴ \quad \Rightarrow y=\sqrt{۱۴۴}=۱۲$$

$$S_{\overset{\Delta}{ABC}}=\frac{۱}{۲}\times AH\times BC=\frac{۱}{۲}\times ۱۲\times ۱۴=۸۴$$

۱۱.



فرض: $\hat{A}_۱=\hat{A}_۲$ ، $BD<DC$ $\Rightarrow$ حکم: $AB<AC$

برهان خلف: فرض کنیم $AB \not< AC$. بنابراین یا $AB=AC$ و یا $AB>AC$.

الف) $AB=AC$:

$$\left\{\begin{array}{l} AB=AC \\ \hat{A}_۱=\hat{A}_۲ \\ AD=AD\end{array}\right. \xrightarrow{\text{ض.ز.ض}} \overset{\Delta}{ABD}\cong \overset{\Delta}{ADC} \rightarrow BD=DC ⁕$$

که خلاف فرض است.

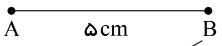
ب) $AB>AC$ در این صورت:

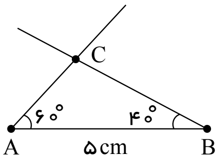
$$\begin{array}{l} AD=AD \\ \hat{A}_۱=\hat{A}_۲ \\ AB>AC\end{array} \xrightarrow{\text{طبق ق}} BD>DC ⁕$$

بنابراین فرض خلف $(AB \not< AC)$ باطل و خود حکم درست است یعنی: $AB<AC$

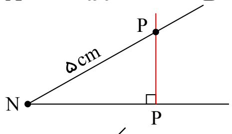
.۱۲

الف) یک پاره خط با خط‌کش به طول $5cm$ رسم کرده و AB می‌نامیم از سمت A یک زاویه با نقاله به اندازه‌ی 60° و از سمت B به اندازه‌ی 40° رسم می‌کنیم تا همدیگر را در C قطع کنند $\overset{\Delta}{ABC}$ جواب مسأله است.

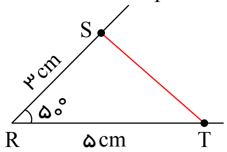




ب) ابتدا با نقاله $\widehat{N}=30^\circ$ را رسم می‌کنیم، سپس روی یک ضلع به اندازه $NP=5cm$ جدا کرده و از آن بر ضلع دیگر عمود MP را وارد می‌کنیم. $\overset{\Delta}{MNP}$ جواب مسأله است.



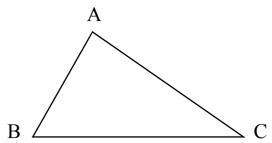
ج) ابتدا $\widehat{R}=50^\circ$ را با نقاله رسم کرده سپس روی یک ضلع $5cm$ و روی ضلع دیگر $3cm$ جدا می‌کنیم. $\overset{\Delta}{RST}$ جواب مسأله است.



.۱۳

فرض: $AB\neq AC$

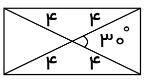
حکم: $\widehat{B}\neq\widehat{C}$



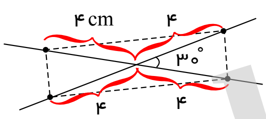
برهان خلف: فرض کنیم دو زاویه‌ی B و C مساوی باشند $(\widehat{B}=\widehat{C})$ در این صورت $\overset{\Delta}{ABC}$ متساوی‌الساقین می‌شود یعنی $AB=AC$ که این خلاف فرض $AB\neq AC$ است، در نتیجه فرض خلف باطل و خود حکم ثابت است. یعنی $\widehat{B}\neq\widehat{C}$

.۱۴

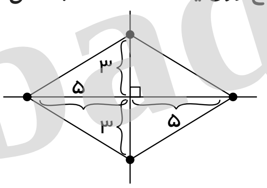
شکل تقریبی به‌صورت مقابل است.



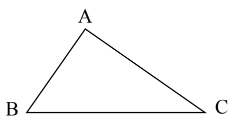
بنابراین ابتدا یک زاویه‌ی 30° رسم کرده و دو ضلع آن را از سمت رأس امتداد می‌دهیم و روی این چهار نیم‌خط حاصل پاره‌خط‌هایی به طول $4cm$ جدا کرده و به یکدیگر وصل می‌کنیم. چهارضلعی حاصل جواب مسأله است. (مستطیل)

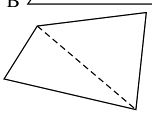


.۱۵ می‌دانیم در لوزی قطرها عمود منصف یکدیگرند. دو خط عمود بر هم رسم کرده و از نقطه‌ی تقاطع روی یک خط $3cm$ جدا می‌کنیم و روی ضلع دیگر $5cm$. سپس به ترتیب به هم وصل می‌کنیم.

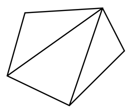


.۱۶ اثبات: می‌دانیم مجموع زوایای داخلی هر مثلث 180° است. هر چندضلعی که داده شود می‌توان آن را به چند مثلث تبدیل کرد مانند چند شکل زیر:





دو مثلث $\rightarrow 2\times 180^\circ=360^\circ$

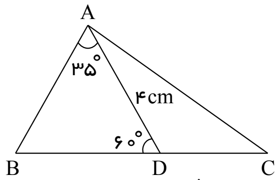


$3\times 180^\circ=540^\circ$

یعنی هر n ضعی به $n-2$ مثلث تقسیم می‌شود. بنابراین:

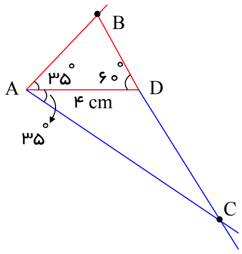
$$\text{مجموع زوایای } n \text{ ضلعی محدب} = (\underbrace{n-2}_{\text{تعداد مثلث ها}})\times 180^\circ$$

۱۷.

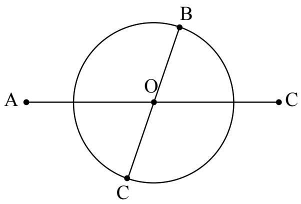


شکل تقریبی سؤال را به صورت ذهنی یا شکلی در نظر می‌گیریم بنابراین ابتدا $\overset{\Delta}{BDA}$ را با «زضز» معلوم رسم می‌کنیم. (در سوال ۱ توضیح داده شد).

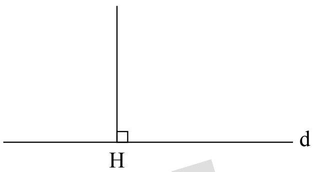
سپس زاویه‌ی CAD را به اندازه‌ی ۳۵° رسم می‌کنیم و ضلع BD را امتداد داده تا نقطه‌ی C حاصل شود. $\overset{\Delta}{ABC}$ جواب مسأله است.



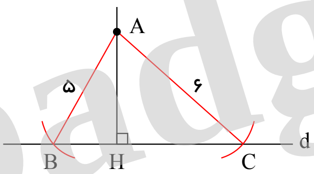
۱۸. یکی از قطرها را رسم می‌کنیم. در این سؤال مثلاً قطر $۷cm$ را رسم می‌کنیم. به مرکز وسط آن و به شعاع $۲cm$ (نصف قطر بعدی) یک دایره رسم می‌کنیم. هر قطری از دایره جواب مسأله می‌باشد (بنابراین بی‌شمار جواب دارد) در شکل مقابل چهار ضلعی $ABCD$ یکی از جواب‌ها $AC = ۷cm$ می‌باشد.



۱۹.

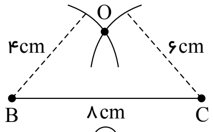


خط d را رسم کرده و از نقطه‌ی دلخواه H یک عمود خارج می‌کنیم. روی عمود، $AH = ۴٫۵cm$ را جدا کرده و از نقطه‌ی A به کمک پرگار دو کمان به اندازه‌های $۵cm$ و $۶cm$ می‌زنیم تا خط d را در نقاط B و C قطع کند. از A به B و C وصل می‌کنیم. $\overset{\Delta}{ABC}$ جواب مسأله است.

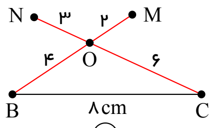


۲۰. می‌دانیم میانه‌های مثلث به نسبت $\frac{۲}{۳}$ از سمت رأس همدیگر را قطع می‌کنند.

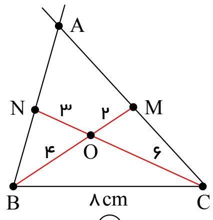
نحوه‌ی ترسیم: ابتدا $BC = ۸cm$ را رسم می‌کنیم. سپس به کمک پرگار یک کمان به اندازه‌ی $\frac{۲}{۳}$ میانه‌ی $BM(۴cm)$ از B و یک کمان به اندازه‌ی $\frac{۲}{۳}$ میانه‌ی $CN(۶cm)$ از C می‌زنیم تا همدیگر را در نقطه‌ی O قطع کنند (محل تقاطع میانه‌ها). از B به O وصل کرده و $\frac{۱}{۳}$ دیگر ادامه می‌دهیم تا M بدست آید و از C به O وصل کرده و $\frac{۱}{۳}$ دیگر ادامه داده تا N بدست آید. و در آخر از B به N وصل کرده امتداد می‌دهیم و از C به M وصل کرده امتداد می‌دهیم تا همدیگر را در نقطه‌ی A قطع کند. $\overset{\Delta}{ABC}$ جواب مسأله است.



①



②



③