

۱.

پیشامد مضرب ۳ آمدن تاس و پشت آمدن سکه $A =$

پیشامد تاس مضرب ۵ یا سکه رو آمدن $B =$

رو آمدن سکه $C =$

$$n(S) = 6 \times 2 = 12$$

الف) $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{2}{12}$ $A = \{(3, پ), (6, پ)\}$

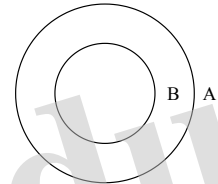
ب) $P(B) = \frac{7}{12}$ $B = \{(5, ر), (5, پ), (1, ر), (2, ر), (3, ر), (4, ر), (6, ر)\}$

ج) $P(C) = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$ $C = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6)\}$

۲.

$$B \subset A \rightarrow A \cap B = B$$

$$P(A - B) = P(A \cap B') = P(A) - \underbrace{P(A \cap B)}_{P(B)}$$



۳.

$$P(\{a\} | \{a, c, d\}) = \frac{P(\{a\} \cap \{a, c, d\})}{P(\{a, c, d\})} = \frac{P(\{a\})}{P(\{a, c, d\})} \quad \text{رابطه (۱)}$$

$$P(S) = 1 = \underbrace{P(\{b, c, d\})}_{\frac{2}{3}} + P(\{a\}) \Rightarrow P(\{a\}) = \frac{1}{3} = P(\{a\}) \quad *$$

$$P(\{b, c, d\}) = \frac{2}{3} = \underbrace{P(b)}_{\frac{1}{4}} + P(\{c, d\}) \Rightarrow P(\{c, d\}) = \frac{2}{3} - \frac{1}{4} = \frac{5}{12}$$

$$P(\{a, c, d\}) = \underbrace{P(\{a\})}_{\frac{1}{3}} + \underbrace{P(\{c, d\})}_{\frac{5}{12}} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4} \quad **$$

حالا * و ** را در رابطه ۱ جایگذاری می‌کنیم:

$$P(\{a\} | \{a, c, d\}) = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{3}{4}} = \frac{4}{9}$$

۴. دو پیشامد نسبت به هم مستقل اند اگر وقوع هر پیشامد به وقوع پیشامد دیگر تأثیری نداشته باشد. حالا اگر زیرمجموعه‌ای از A با زیرمجموعه‌ای از B مستقل نباشند یعنی وابسته‌اند در نتیجه وقوع هر کدام روی دیگری تأثیر می‌گذارد و این یعنی وقوع A روی B تأثیر گذار خواهد بود که با استقلال این دو پیشامد در تناقض است پس F و E هم نسبت به هم مستقل‌اند.

فرض می‌کنیم $P(A \cap B) = t$ باشد

$$\frac{P(A \cup B)}{۴} = P(A \cap B) \rightarrow P(A \cup B) = \overbrace{۴P(A \cap B)}^t = ۴t$$

$$\frac{\overbrace{P(B')}^{1-P(A)}}{۲} = t \rightarrow 1 - P(A) = ۲t \rightarrow P(A) = 1 - ۲t$$

$$\frac{\overbrace{P(B')}^{1-P(B)}}{۳} = t \rightarrow 1 - P(B) = ۳t \rightarrow P(B) = 1 - ۳t \quad (۱)$$

طبق قوانین احتمال $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \rightarrow$

$$۴t = 1 - ۲t + 1 - ۳t - t$$

$$۴t = ۲ - ۶t \rightarrow ۱۰t = ۲ \rightarrow t = \frac{۲}{۱۰} \xrightarrow{\text{جایگذاری در (۱)}} P(B) = 1 - \frac{۶}{۱۰} = \frac{۴}{۱۰} = \frac{۲}{۵}$$

$$\begin{cases} P(S) = 1 \\ P(\{a, b, c, d\}) = \frac{۲}{۵} \rightarrow P(\{e\}) = 1 - \frac{۳}{۵} = \frac{۲}{۵} \end{cases}$$

$$P(c) = P(\{a, b, e\}) = \frac{\frac{۲}{۵}}{۳} + \frac{\frac{۲}{۵}}{۵} = \frac{۲۴}{۳۵}$$

$$P(C') = 1 - P(C) = 1 - \frac{۲۴}{۳۵} = \frac{۱۱}{۳۵}$$

۷. الف) می‌دانیم $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$ ، اثبات می‌کنیم $P(A \cap B') = P(A) \cdot P(B')$

$$P(\underbrace{(A \cap B) \cup (A \cap B')}_{\underbrace{A}_{M}}) = P(A \cap B) + P(A \cap B') - \underbrace{P((A \cap B) \cap (A \cap B'))}_{\emptyset}$$

$$P(A) = \overbrace{P(A \cap B) + P(A \cap B')}^{P(A) \cdot P(B)}$$

$$P(A \cap B') = P(A) \underbrace{(1 - P(B))}_{P(B')}$$

ب) ثابت می‌کنیم: $P(A' \cap B') = P(A') \cdot P(B')$ می‌دانیم $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

$$P(A' \cap B') = P((A \cup B)') = 1 - P(A \cup B) = 1 - P(A) - P(B) + \underbrace{P(A \cap B)}_{P(A) \cdot P(B)}$$

$$= \underbrace{(1 - P(A))}_{P(A')} \underbrace{(1 - P(B))}_{P(B')} = P(A') \cdot P(B')$$

پیشامد ۵ آمدن تاس آبی $A =$

$$n(S) = 36 \quad A = \{(5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 4), (5, 5), (5, 6)\}$$

$$P(A) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

۹. الف) اگر $B \subseteq A$ باشد آن گاه $B \cap A = B$ است.

$$P(A - B) = P(A) - P(\underbrace{A \cap B}_B) = P(A) - P(B)$$

ب) طبق الف) $P(A - B) = P(A) - P(B)$ و طبق اصول احتمال $P(A - B) \leq P(A) - P(B)$ می باشد پس $P(B) \leq P(A)$

$$P(B) \leq P(A)$$

۱۰.

ب) گزاره درست

الف) گزاره نادرست

ت) گزاره نیست (دستوری)

پ) گزاره درست

ج) گزاره نیست

ث) گزاره نادرست است.

ح) گزاره نادرست

چ) گزاره نادرست (بخش پذیر بر ۳)

$$\left(\binom{5^3}{2^3} + 2^3 \right)$$

خ) گزاره نادرست

اتحاد چاق و لاغر

ذ) گزاره نیست.

ر) گزاره درست.

۱۱.

$$n(A \times A) = 25 \rightarrow n(A) = 5$$

$$A = \{4, 0, 2, 1, -1\}$$

$$n(p(A)) = 2^5 = 32$$

$$p(A) =$$

$$\{\emptyset, \{4\}, \{0\}, \{2\}, \{1\}, \{-1\}, \{4, 0\}, \{4, 2\}, \{4, 1\}, \{4, -1\}, \{4, 0, 2\}, \{4, 0, 1\}, \{4, 0, -1\}, \{0, 2\}, \{0, 1\}, \{0, -1\}, \dots\}$$

۱۲.

$$\text{الف) } \underbrace{(A \cap B) \cup (B' \cap A)}_{\text{توزیع پذیری}} = \underbrace{A \cap (B \cup B')}_{\cup} = A$$

$$\text{ب) } \underbrace{(A' \cap B')}_{\text{شرکت پذیری}} \cap A = \underbrace{(A' \cap A)}_{\emptyset} \cap B' = \emptyset$$

$$\text{پ) } A \cap (B \cap C) = \underbrace{(A \cap A) \cap (B \cap C)}_{\text{شرکت پذیری}} = (A \cap B) \cap (A \cap C)$$

$$\text{ت) } A \cup (B \cap C) = \underbrace{(A \cup A) \cup (B \cap C)}_{\text{شرکت پذیری}} = (A \cup B) \cup (A \cup C)$$

۱۳. الف) نادرست است. برابری یک مجموعه دارای یک عضو با تهی امکان ناپذیر است.

ب) درست. تهی زیر مجموعه همه مجموعه ها می باشد.

پ) نادرست. در اینجا خود نماد تهی به عنوان عضو استفاده شده است.

ت) درست. دقیقاً عضو $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ در مجموعه موجود است.

$$\begin{aligned}
 & \text{الف)} (A' \cap B) \cup [(B \cap A) - B'] \cap (B \cup A) \\
 & \quad \quad \quad \underbrace{(B \cap A) \cap B}_{\text{توزیع پذیری}} \\
 & = ((A' \cap B) \cup (B \cap A)) \cap (B \cup A) = (B \cap (A \cup A')) \cap (B \cup A) = \underbrace{B \cap (B \cup A)}_{\text{جذب}} = B \\
 & \text{ب)} (A \cup B) - B = (A \cup B) \cap B' = \underbrace{(B' \cap B)}_{\emptyset} \cup (B' \cap A) = A \cap B' = A - B \\
 & \quad \quad \quad \underbrace{\hspace{10em}}_{\text{توزیع پذیری}} \\
 & \text{پ)} [(A \cup B) - A] \cup (A \cap B) = \underbrace{[(A \cup B) \cap A']}_{\emptyset} \cup (A \cap B) \\
 & \quad \quad \quad \underbrace{(A' \cap A) \cup (A' \cap B)}_{\emptyset} \\
 & = \underbrace{(A' \cap B)}_{\text{توزیع پذیری}} \cup (A \cap B) = B \cap \underbrace{(A \cup A')}_{U} = B
 \end{aligned}$$

۱۵. الف) $4 > 3$

ب) ابوالوفای بوزجانی، ریاضی‌دان ایرانی نیست.

پ) $a \notin \{b, c, d\}$ ت) ۲ عددی زوج نیست و π گنگ است.

ث) خورشید دور زمین نمی‌چرخد یا سنندج مرکز استان کردستان نیست.

ج) a زوج باشد و $a+1$ زوج باشد.

$$\sim (p \Rightarrow q) = p \wedge \sim q \quad \text{یادآوری}$$

۱۶.

- ۱) $[-4, -1] \cup [-1, 0] \cup (0, 1)$
- ۲) $[-4, -3] \cup (-3, 0] \cup (0, 1)$
- ۳) $[-4, -2] \cup (-2, -1) \cup [-1, 1)$

۱۷.

$$\text{الف)} \begin{cases} A \subseteq X \\ A' \subseteq X \end{cases} \Rightarrow A \cup A' \subseteq X \Rightarrow \begin{cases} U \subseteq X \\ X \subseteq U \end{cases} \Rightarrow U = X$$

درست است.

$$\text{ب)} (A - B) \cup (A \cap B) = \underbrace{(A \cap B')}_{\text{توزیع پذیری}} \cup (A \cap B) = A \cap \underbrace{(B \cup B')}_{U} = A$$

درست است.

$$\text{پ)} (A \cap B) - C = (A - C) \cap (B - C) \xrightarrow{\text{از سمت چپ به راست}}$$

$$(A - C) \cap (B - C) = \underbrace{(A \cap C') \cap (B \cap C')}_{\text{شرکت پذیری}} = (A \cap B) \cap C' = (A \cap B) - C$$

درست است.

$$\text{ت)} (A - B) \cup (B - A) = (A \cup B) - (A \cap B)$$

$$\underbrace{(A \cap B') \cup (B \cap A')}_{\text{توزیع پذیری}} = \underbrace{[(A \cap B') \cup B]}_{A \cup B} \cap \underbrace{[(A \cap B') \cup A']}_{B' \cup A'}$$

$$= (A \cup B) \cap (B' \cup A') = A \cup B - (B' \cup A')' = (A \cup B) - (A \cap B)$$

درست است.

$$\text{ث) } \underbrace{(A \cup B) \cap (A' \cap B')}_{\text{شرکت پذیری}} = \underbrace{[(A \cup B) \cap A']}_{\text{توزیع پذیری}} \cap B' = \underbrace{[(A' \cap A) \cup (A' \cap B)]}_{\emptyset} \cap B'$$

$$= \underbrace{(A' \cap B) \cap B'}_{\text{شرکت پذیری}} = \underbrace{(B' \cap B) \cap A'}_{\emptyset} = \emptyset$$

درست است.

ج) نادرست است زیرا اگر $A = B = \emptyset$ و $C = \{1\}$ در نظر بگیریم در شرایط صدق می کند اما $B \neq C$ می باشد.

۱۸. الف) غ (چون سه شاعر را هر فردی مجزا می نویسد)

ب) ص $\{1, 2, 3, 4\}$

ج) غ

د) غ

۱۹. تعداد زیر مجموعه های مجموعه n عضوی 2^n است.

$$2^n - 2^{n-2} = 384 \Rightarrow 2^{n-2} \underbrace{(4-1)}_3 = 384$$

$$2^{n-2} = 128 = 2^7 \rightarrow n-2 = 7 \rightarrow n = 9$$

$$\text{تعداد زیر مجموعه های } A \Rightarrow 2^9 = 512$$

۲۰.

الف)

p	q	$\sim q$	$p \wedge \sim q$
T	T	F	F
T	F	T	T
F	T	F	F
F	F	T	F

ب)

p	$\sim p$	$\sim p \wedge p$
T	F	F
F	T	F

پ)

p	$\sim p$	$\sim p \vee p$
T	F	T
F	T	T

ت)

p	q	$\sim p$	$p \vee q$	$(p \vee q) \wedge \sim p$
T	T	F	T	F
T	F	F	T	F
F	T	T	T	T
F	F	T	F	F

ث)

p	q	$p \vee q$	$(p \vee q) \Leftrightarrow q$
T	T	T	T
T	F	T	F
F	T	T	T
F	F	F	T

ج)

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$\sim p \Leftrightarrow \sim q$
T	T	F	F	T
T	F	F	T	F
F	T	T	F	F
F	F	T	T	T