

۱- مساحت مثلثی با دو ضلع ۱۶ و ۹ واحد، برابر $۲۴\sqrt{۵}$ واحد مربع است. بزرگ‌ترین ضلع این مثلث کدام است؟

- (۱) ۲۱ (۲) ۲۲ (۳) ۲۳ (۴) ۲۴

گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است.

$$S = \frac{1}{2}bc \sin x \Rightarrow 24\sqrt{5} = \frac{1}{2} \times 16 \times 9 \sin x \Rightarrow \sin x = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

$$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x \Rightarrow \cos^2 x = \frac{4}{9} \Rightarrow \cos x = \frac{-2}{3} \quad (\text{بزرگ‌ترین زاویه منفرجه است، لذا } \cos \text{ آن منفی است.})$$

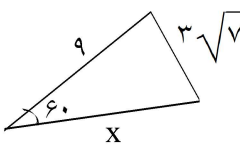
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos x \Rightarrow a^2 = 81 + 256 - 2(9)(16)\left(\frac{-2}{3}\right) = 529 \Rightarrow a = 23$$

۲- در مثلثی یکی از زوایه‌ها ۶۰° درجه و ضلع مقابل به این زاویه $۳\sqrt{۷}$ واحد است. اگر ضلع دیگر این مثلث ۹ واحد

باشد، اندازه‌ی ضلع سوم کدام است؟

- (۱) ۳، ۶ (۲) ۴، ۷ (۳) $۲\sqrt{۳}$ ، $۴\sqrt{۳}$ (۴) $۳\sqrt{۲}$ ، $۵\sqrt{۲}$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. با استفاده از رابطه‌ی کسینوس‌ها داریم:



$$\left(3\sqrt{7}\right)^2 = x^2 + 9^2 - 2x \times 9 \times \cos 60^\circ$$

$$63 = x^2 + 81 - 9x$$

$$x^2 - 9x + 18 = 0$$

$$(x - 3)(x - 6) = 0 \quad \begin{cases} x = 3 \\ x = 6 \end{cases}$$

۳- اگر $\operatorname{tg} x = \frac{4}{3}$ باشد، مقدار $\operatorname{tg} \frac{x}{2} - \operatorname{Cotg} \frac{x}{2}$ کدام است؟

- (۱) $-\frac{3}{4}$ (۲) $-\frac{3}{2}$ (۳) $\frac{4}{3}$ (۴) $\frac{3}{2}$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$\begin{cases} \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \cos 2\alpha \\ \sin \alpha \cos \alpha = \frac{1}{2} \sin 2\alpha \end{cases}$$

$$\operatorname{tg} x = \frac{4}{3}$$

$$\operatorname{tg} \frac{x}{2} - \operatorname{Cotg} \frac{x}{2} \Rightarrow \frac{\sin \frac{x}{2}}{\cos \frac{x}{2}} - \frac{\cos \frac{x}{2}}{\sin \frac{x}{2}} = \frac{\sin^2 \left(\frac{x}{2}\right) - \cos^2 \left(\frac{x}{2}\right)}{\sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}} \Rightarrow \frac{-\cos x}{\frac{1}{2} \sin x} = -2 \operatorname{Cotg} x = \frac{-2}{\operatorname{tg} x}$$

$$\operatorname{tg} x = \frac{4}{3} \rightarrow \frac{-2}{\frac{4}{3}} = \frac{-6}{4} = -\frac{3}{2}$$

۴- حاصل عبارت $\frac{\cos 285^\circ - \sin 255^\circ}{\sin 525^\circ - \sin 105^\circ}$ ، با فرض $\tan 15^\circ = 0/28$ ، کدام است؟

(۱) $-\frac{16}{9}$ (۲) $-\frac{9}{16}$ (۳) $\frac{9}{16}$ (۴) $\frac{16}{9}$

گزینه ی ۱ پاسخ صحیح است. اول نسبت ها را به صورت ساده تری می نویسیم:

$$\cos(285^\circ) = \cos(270^\circ + 15^\circ) = \sin 15^\circ$$

$$\sin(255^\circ) = \sin(270^\circ - 15^\circ) = -\cos 15^\circ$$

$$\sin(525^\circ) = \sin(540^\circ - 15^\circ) = \sin 15^\circ$$

$$\sin(105^\circ) = \sin(90^\circ + 15^\circ) = \cos 15^\circ$$

$$\text{عبارت اصلی: } \frac{\cos 285^\circ - \sin 255^\circ}{\sin 525^\circ - \sin 105^\circ} = \frac{\sin 15^\circ - (-\cos 15^\circ)}{\sin 15^\circ - \cos 15^\circ}$$

با توجه به این که مقدار $\tan 15^\circ$ را داریم، صورت و مخرج کسر را بر $\cos 15^\circ$ تقسیم می کنیم:

$$\text{کسر} = \frac{\tan 15^\circ + 1}{\tan 15^\circ - 1} \xrightarrow{\tan 15^\circ = 0/28} \frac{0/28 + 1}{0/28 - 1} = \frac{1/28}{-1/28} = -\frac{16}{9}$$

۵- حد عبارت $\left[\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) \right] \cos^3 x + [tg^2 x]$ ، وقتی $x \rightarrow \frac{\pi}{3}$ کدام است؟ (نماد [] به مفهوم جزء

صحیح است.)

(۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) حد ندارد

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. با توجه به این که درون جزء صحیح عدد صحیح می شود باید حد راست و چپ را جدا حساب کرد.

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}^+} \left[\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) \right] \cos^3 x + [tg^2 x] = [0^+](-1) + [3^+] = 0 + 3 = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}^-} \left[\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) \right] \cos^3 x + [tg^2 x] = [0^-](-1) + [3^-] = 1 + 2 = 3$$

چون حد راست و چپ برابر ۳ است بنابراین حاصل حد ۳ می شود.

۶- اگر برای تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2a & x > 1 \\ 2bx^2 + a & x < 1 \end{cases}$ ، $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 2 \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$ ، کدام است؟

(۱) $\frac{1}{4}$ (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) ۲ (۴) ۴

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ابتدا مقادیر حد چپ و حد راست را تعیین می کنیم:

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} x^2 - 2a = 1 - 2a \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} (2bx^2 + a) = (2b + a) \end{aligned} \right\} \Rightarrow 1 - 2a = 2(2b + a)$$

$$\Rightarrow 4a + 4b = 1 \Rightarrow a + b = \frac{1}{4}$$

۷- مقدار $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \frac{[\sin x + 1]}{x + 1}$ کدام است؟

$$x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-$$

$$\pi + 2 \quad (4)$$

$$\frac{\pi + 2}{2} \quad (3)$$

$$\frac{2}{\pi + 2} \quad (2)$$

$$\frac{1}{\pi + 2} \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \frac{[\sin x + 1]}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \frac{[\sin x] + 1}{x + 1} = \frac{[1 - \varepsilon] + 1}{\frac{\pi}{2} + 1} = \frac{\varepsilon + 1}{\frac{\pi}{2} + 1} = \frac{2}{\pi + 2}$$

بنابراین گزینه ۲ صحیح است.

۸- از روی نمودار مقابل مقدار $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) - f(1)$ برابر کدام است؟

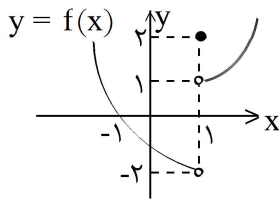
$$x \rightarrow 1^-$$

$$-3 \quad (2)$$

$$-4 \quad (1)$$

$$1 \quad (4)$$

$$-1 \quad (3)$$



با توجه به نمودار تابع داریم:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -2 \quad \text{حد چپ}$$

$$f(1) = 2 \quad \text{مقدار تابع}$$

\Rightarrow مقدار تابع - حد چپ = $-2 - 2 = -4$

پس گزینه ۱ صحیح است.

۹- حد چپ تابع $y = \frac{x - |x|}{[x + 1] - x}$ وقتی $x \rightarrow 0$ کدام است؟ (نماد [] جزء صحیح است)

$$-2 \quad (4)$$

$$1 \quad (3)$$

$$-1 \quad (2)$$

$$\text{صفر} \quad (1)$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

چون $0 < x + 1 < 1$ است پس $[x + 1] = 0$ حال حد چپ را بدست می آوریم:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} y = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x - (-x)}{0 - x} = \frac{2x}{-x} = -2$$

$$x \rightarrow 0^- \quad x \rightarrow 0^-$$

لازم به ذکر است که چون $x \rightarrow 0^-$ پس $x < 0$ است پس $|x| = -x$ می باشد. بنابراین جواب -۲ بوده.

۱۰- کدام گزینه در مورد حدود تابع $f(x) = x + \frac{|x|}{x}$ در نقطه $x = 0$ صحیح است؟

(۱) حد موجود است

(۲) حد چپ موجود نیست

(۳) حد چپ و راست موجود است ولی برابر نیستند

(۴) حد چپ و راست موجود است

برای $\frac{|x|}{x}$ وقتی $x \rightarrow 0^+$ می رود برابر ۱ می باشد و حد آن وقتی $x \rightarrow 0^-$ می رود برابر -۱ می باشد پس داریم

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \left(x + \frac{|x|}{x} \right) = x - 1 = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(x + \frac{|x|}{x} \right) = x + 1 = 1$$

$$x \rightarrow 0^-$$

$$x \rightarrow 0^+$$

پس گزینه ۴ درست است