

بِسْمِ اللّٰهِ الرَّحْمٰنِ الرَّحِیْمِ

حسابان (۲)

رشته ریاضی و فیزیک

پایه دوازدهم

دوره دوم متوسطه

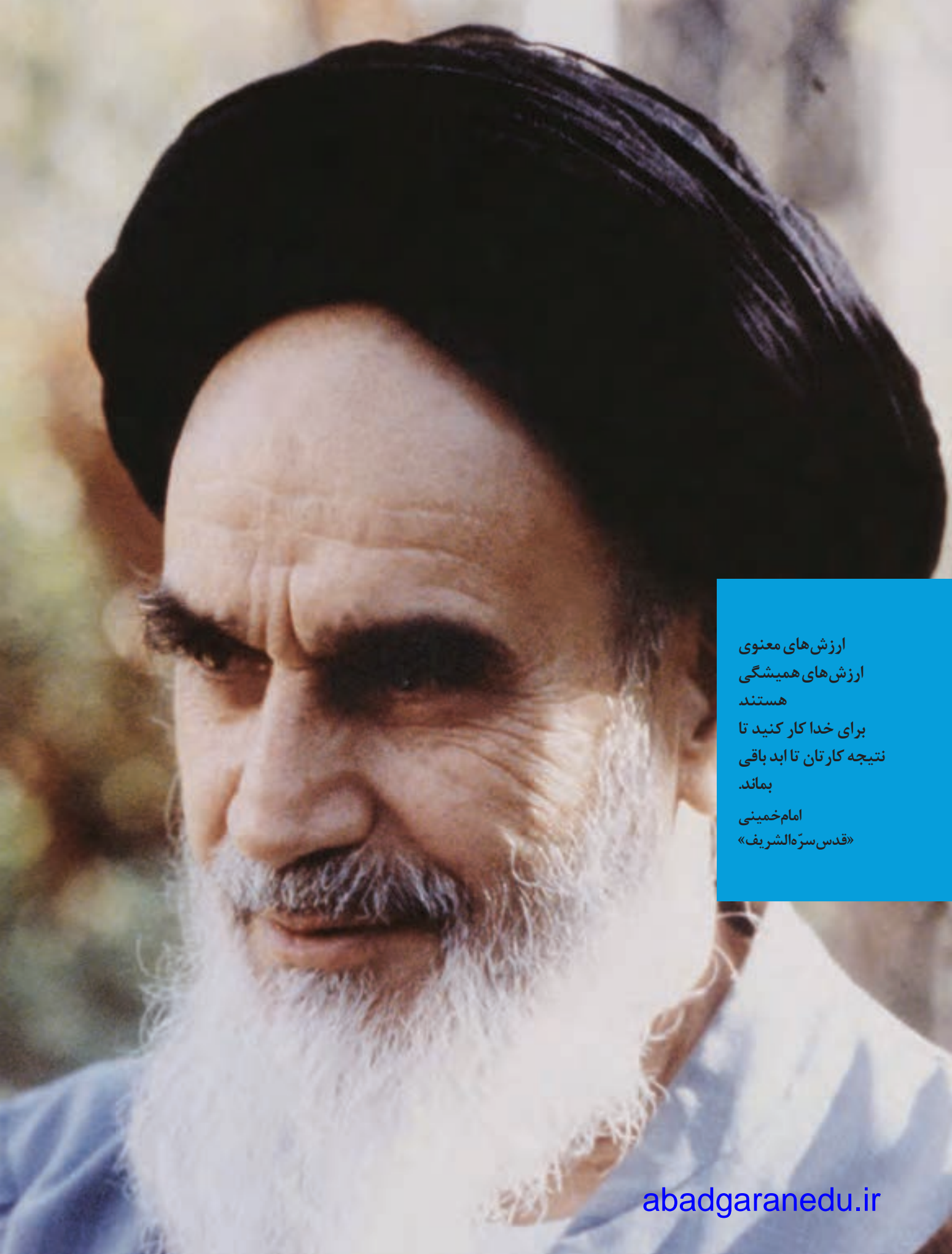


وزارت آموزش و پرورش
سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی

نام کتاب:	حسابان (۲) - پایه دوازدهم دوره دوم متوسطه - ۱۱۲۲۱۴
پدیدآورنده:	سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی
مدیریت برنامه‌ریزی درسی و تألیف:	دفتر تألیف کتاب‌های درسی عمومی و متوسطه نظری
شناسه افزوده برنامه‌ریزی و تألیف:	سیدمحمدرضا احمدی، حمیدرضا امیری، علی ایرانمنش، مهدی ایزدی، محمدحسن بیژن زاده، خسرو داودی، زهرا رحیمی، محمدهاشم رستمی، ابراهیم ریحانی، محمدرضا سیدصالحی، میرشهرام صدر، اکرم قابل رحمت، طاهر قاسمی هنری و عادل محمدپور (اعضای شورای برنامه‌ریزی)
مدیریت آماده‌سازی هنری:	محمود داورزنی، ابراهیم ریحانی، محمدرضا سیدصالحی، محمدتقی طاهری تنجانی، مجتبی قربانی و هادی مین‌باشیان (اعضای گروه تألیف)
شناسه افزوده آماده‌سازی:	اداره کل نظارت بر نشر و توزیع مواد آموزشی
نشانی سازمان:	احمدرضا امینی (مدیر امور فنی و چاپ) - جواد صفری (مدیر هنری) - شهرزاد قنبری (صفحه‌آرا) - مریم کیوان (طراح جلد) - فاطمه رئیس‌یان فیروزآباد (رسام) - فاطمه باقری‌مهر، سورش سعادت‌مندی، سیما لطفی، الهام جعفرآبادی، فاطمه پزشکی و ناهید خیام‌یاشی (امور آماده‌سازی)
ناشر:	تهران: خیابان ایرانشهر شمالی - ساختمان شماره ۴ آموزش و پرورش (شهید موسوی) تلفن: ۸۸۸۳۱۱۶۱-۹، دورنگار: ۹۲۶۶-۸۸۳۰، کد پستی: ۱۵۸۴۷۴۷۳۵۹ وبگاه: www.irtextbook.ir و www.chap.sch.ir
چاپخانه:	شرکت چاپ و نشر کتاب‌های درسی ایران تهران: کیلومتر ۱۷ جاده مخصوص کرج - خیابان ۶۱ (داروپخش) تلفن: ۴۴۹۸۵۱۶۱-۵، دورنگار: ۴۴۹۸۵۱۶۰، صندوق پستی: ۳۷۵۱۵-۱۳۹
سال انتشار و نوبت چاپ:	شرکت چاپ و نشر کتاب‌های درسی ایران «سهامی خاص» چاپ اول ۱۳۹۷

شابک: ۹۷۸-۹۶۴-۰۵-۳۱۱۲-۹

ISBN: 978-964-05-3112-9



ارزش‌های معنوی
ارزش‌های همیشگی
هستند
برای خدا کار کنید تا
نتیجه کارتان تا ابد باقی
بماند.

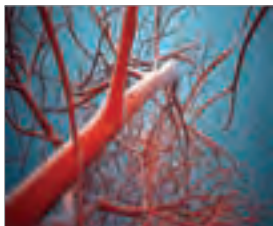
امام خمینی
«قدس سرّه الشریف»

کلیه حقوق مادی و معنوی این کتاب متعلق به سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی وزارت آموزش و پرورش است و هرگونه استفاده از کتاب و اجزای آن به صورت چاپی و الکترونیکی و ارائه در پایگاه‌های مجازی، نمایش، اقتباس، تلخیص، تبدیل، ترجمه، عکس‌برداری، نقاشی، تهیه فیلم و تکثیر به هر شکل و نوع، بدون کسب مجوز از این سازمان ممنوع است و متخلفان تحت پیگرد قانونی قرار می‌گیرند.



فصل ۱: تابع ۱

- درس اول: تبدیل نمودار توابع ۲
درس دوم: تابع درجه سوم، توابع یکتوا و بخش پذیری و تقسیم ۱۳



فصل ۲: مثلثات ۲۳

- درس اول: تناوب و تنازات ۲۴
درس دوم: معادلات مثلثاتی ۳۵



فصل ۳: حدهای نامتناهی – حد در بی نهایت ۴۵

- درس اول: حدهای نامتناهی ۴۶
درس دوم: حد در بی نهایت ۵۹



فصل ۴: مشتق ۷۱

- درس اول: آشنایی با مفهوم مشتق ۷۲
درس دوم: مشتق پذیری و پیوستگی ۸۴
درس سوم: آهنگ متوسط تغییر و آهنگ لحظه‌ای تغییر ۱۰۲



فصل ۵: کاربردهای مشتق ۱۱۱

- درس اول: اکسترم‌های یک تابع صعودی و نزولی ۱۱۲
درس دوم: جهت تقعر نمودار یک تابع و نقطه عطف آن ۱۲۷
درس سوم: رسم نمودار تابع ۱۳۷

منابع ۱۴۵

کتاب حاضر در راستای برنامه درسی ملی و در ادامه تغییر کتاب‌های ریاضی دوره دوم متوسطه تألیف شده است. یکی از تفاوت‌های مهم این کتاب با کتاب قبلی مربوط به دوره پیش‌دانشگاهی، کاهش قابل ملاحظه محتوا است. همانند پایه‌های قبلی، ساختار کتاب براساس سه محور اساسی فعالیت، کار در کلاس و تمرین قرار گرفته است. از این میان، «فعالیت‌ها» موقعیت‌هایی برای یادگیری و ارائه مفاهیم جدید ریاضی فراهم می‌کنند و این امر مستلزم مشارکت جدی دانش‌آموزان است. البته معلم هم در این میان نقشی مهم برای راهنمایی و هدایت کلی فعالیت‌ها به عهده دارد. با توجه به اینکه کتاب برای دانش‌آموزان سطح متوسط طراحی شده است، با در نظر گرفتن شرایط مختلف، امکان غنی‌سازی فعالیت‌ها و یا ساده‌سازی آنها به وسیله معلم وجود دارد. در هر حال تأکید اساسی مؤلفان، محور قرار دادن کتاب درسی در فرایند آموزش است. در همین راستا توجه به انجام فعالیت‌ها در کلاس درس و ایجاد فضای بحث و گفت‌وگو و دادن مجال به دانش‌آموز برای کشف مفاهیم به‌طور جدی توصیه می‌شود.

زمان کلاس درس نباید به مباحثی خارج از اهداف کتاب درسی اختصاص یابد. همچنین نباید آزمون‌های مختلف خارج از مدرسه مبنای آموزش مفاهیم در کلاس درس واقع شوند، بلکه این کتاب درسی است که سطح و سبک آزمون‌ها را مشخص می‌کند. در بسیاری از موارد درباره یک مفهوم، حد و مرزهایی در کتاب رعایت شده است که رعایت این موضوع در ارزشیابی‌ها و آزمون‌های رسمی برای همه طراحان الزامی است. رعایت این محدودیت‌ها موجب افزایش تناسب بین زمان اختصاص یافته به کتاب و محتوای آن خواهد شد. شایسته است همکاران ارجمند بر رعایت این موضوع نظارت دقیق داشته باشند. روند کتاب نشان می‌دهد که ارزشیابی باید در خدمت آموزش باشد. در واقع ارزشیابی باید براساس اهداف کتاب باشد و نه موضوعاتی که احياناً پیش از این، سال‌ها به صورت سنتی ارائه شده‌اند و یا توسط برخی از کتاب‌های غیراستاندارد توصیه می‌شوند. طرح این‌گونه سؤالات که اهداف آموزشی کتاب را دنبال نمی‌کنند در کلاس درس و نیز در ارزشیابی‌ها، به هیچ عنوان توصیه نمی‌شود.

ارتباط بین ریاضیات مدرسه‌ای و محیط پیرامون و کاربردهای این دانش در زندگی روزمره، که به وضوح در اسناد بالادستی مورد تأکید قرار گرفته است، به صورت تدریجی خود را در کتاب‌های درسی نشان می‌دهد. تلاش برای برقراری این ارتباط در تصاویر کتاب نیز قابل مشاهده است که امید است مورد توجه معلمان و دانش‌آموزان عزیز قرار گیرد.

اگر مهم‌ترین هدف آموزش ریاضی را پرورش تفکر ریاضی بدانیم، دیگر استفاده افراطی از فرمول‌ها، الگوریتم‌ها، قواعد و دستورها بدون آگاهی از چگونگی و چرایی عملکرد آنها، جایگاهی در آموزش ریاضی مدرسه‌ای نخواهد داشت. فرصت حضور دانش‌آموز در کلاس درس را نباید به سادگی از دست داد. فرایندهایی مانند استدلال، تعمیم، حل مسئله، طرح مسئله و موضوعاتی نظیر مسائل باز پاسخ، بازنمایی‌های چندگانه و گفت‌وگوهای ریاضی نقش مهمی در پرورش تفکر ریاضی دانش‌آموزان دارد.

مؤلفان از کلیه امکانات موجود نظیر سامانه اعتبارسنجی، وبگاه گروه ریاضی دفتر تألیف، پیام‌نگار (ایمیل)، دعوت از دبیران مجرب برای حضور در جلسات نقد و بررسی کتاب و دیگر رسانه‌های در دسترس برای دریافت دیدگاه‌ها، نقدها و نظرات دبیران محترم سراسر کشور بهره گرفته‌اند. در راستای مشارکت دبیران محترم ریاضی، پاره‌ای از تصاویر و عکس‌های مورد استفاده در کتاب توسط این عزیزان از استان‌های مختلف کشور به گروه ریاضی ارسال شده است، که لازم است از زحمات آنها تشکر و قدردانی شود. اعضای تیم تألیف به حضور و مشارکت جدی همکاران ارجمند در امر نقد و بررسی کتاب افتخار می‌کنند. امید که همچنان شاهد این تعامل و ارتباط مؤثر باشیم. گروه تألیف آمادگی دریافت نظرات و دیدگاه‌های تمامی همکاران و اساتید را از طریق پیام‌نگار^۱ و وبگاه واحد تحقیق، توسعه و آموزش ریاضی^۲ دارد به علاوه بسیاری از مطالب مربوط به پشتیبانی کتاب از طریق وبگاه واحد ریاضی قابل دریافت است.

مؤلفان

۱- mathrde@gmail.com

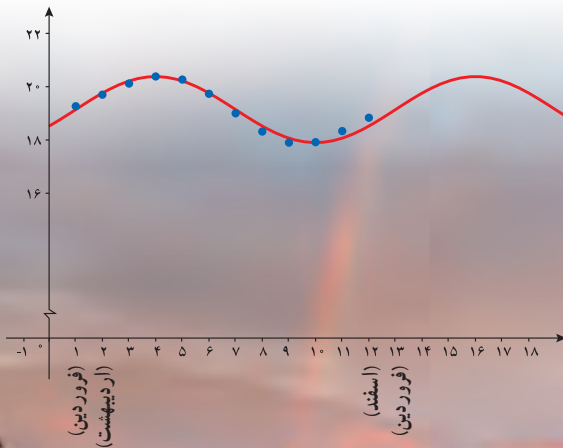
۲- <http://math-dept.talif.sch.ir>

تابع

۱

فصل

- ۱ تبدیل نمودار توابع
- ۲ تابع درجه سوم، توابع یکنوا و بخش پذیری و تقسیم



پل طبیعت (تهران)

بسیاری از وقایع طبیعی به کمک توابع، مدل سازی می شوند. تبدیل نمودار تابع $y = \sin x$ به صورت $y = 1/24 \sin(\frac{\pi}{6}x - \frac{\pi}{6}) + 19/14$ ، مدل ریاضی زمان های غروب آفتاب در ابتدای هر ماه شهر تهران است که نمودار آن در بالا رسم شده است.

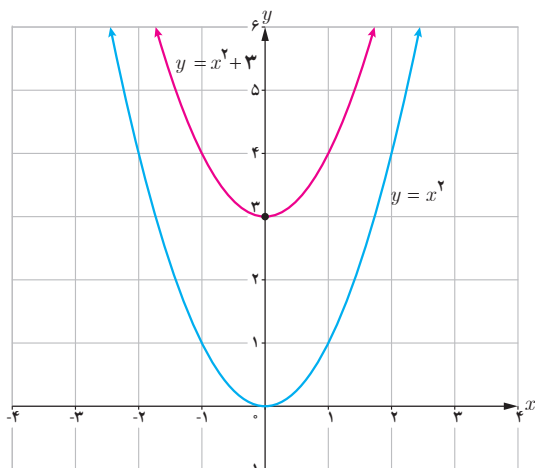
تبدیل نمودار توابع

درس

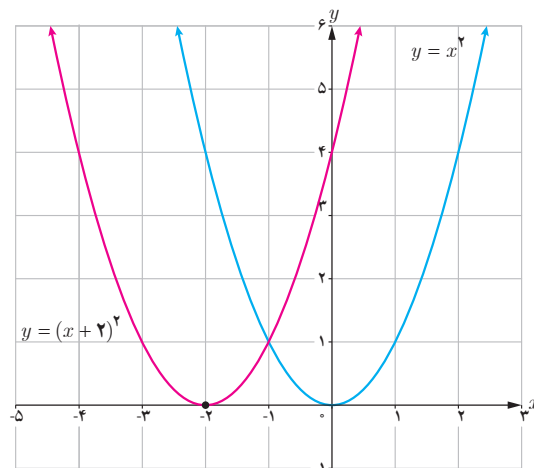
برای رسم بسیاری از توابع، نیاز به روش‌های پیچیده نیست. اگر نمودار یک تابع را در اختیار داشته باشیم، می‌توانیم به کمک برخی از تبدیل‌ها، نمودار توابع دیگری را رسم کنیم.

انتقال‌های عمودی و افقی

در سال‌های قبل با انتقال‌های عمودی و افقی آشنا شده‌اید. به‌عنوان مثال می‌توانید نمودار توابع $y = x^2 + 3$ و $y = (x + 2)^2$ را به کمک نمودار تابع $y = x^2$ رسم کنید.



(ب)



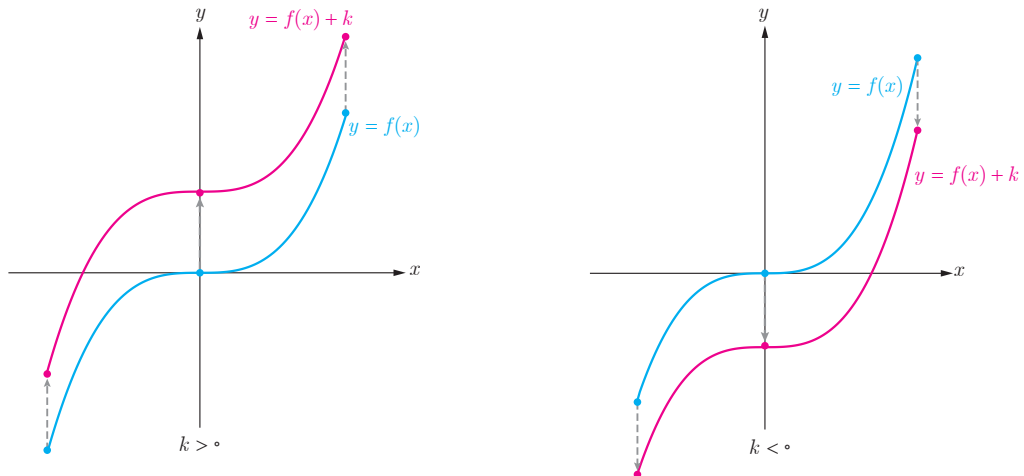
(الف)

در حالت کلی (مانند مثال بالا، قسمت ب) اگر (x_0, y_0) یک نقطه از نمودار تابع $y = f(x)$ باشد و تابع g به صورت $g(x) = f(x) + k$ تعریف شده باشد، آنگاه:

$$g(x_0) = f(x_0) + k = y_0 + k$$

بنابراین نقطه $(x_0, y_0 + k)$ از نمودار تابع g متناظر با نقطه (x_0, y_0) از نمودار f است.

برای رسم نمودار $y = f(x) + k$ ، اگر $k > 0$ باشد، کافی است نمودار تابع $f(x)$ را k واحد در راستای قائم به سمت بالا انتقال دهیم و برای $k < 0$ این انتقال به سمت پایین انجام می‌شود.

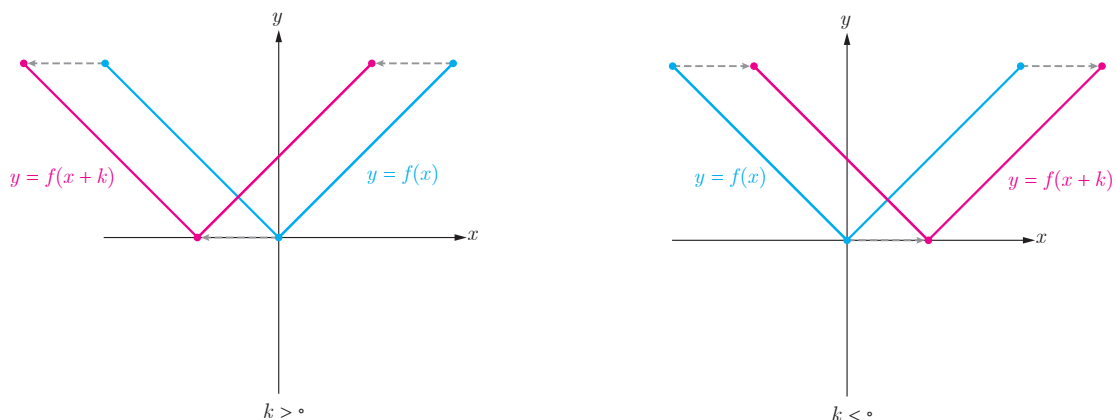


به روش مشابه، اگر (x_0, y_0) یک نقطه از نمودار تابع $y = f(x)$ باشد و تابع h به صورت $h(x) = f(x+k)$ تعریف شده باشد، آنگاه:

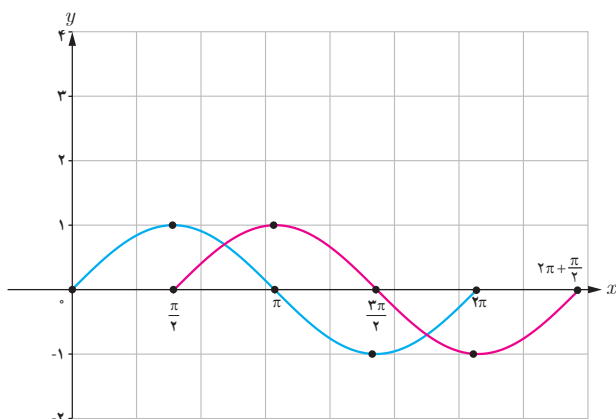
$$h(x_0 - k) = f(x_0 - k + k) = f(x_0) = y_0.$$

بنابراین نقطه $(x_0 - k, y_0)$ از نمودار تابع h متناظر با نقطه (x_0, y_0) از نمودار تابع f است.

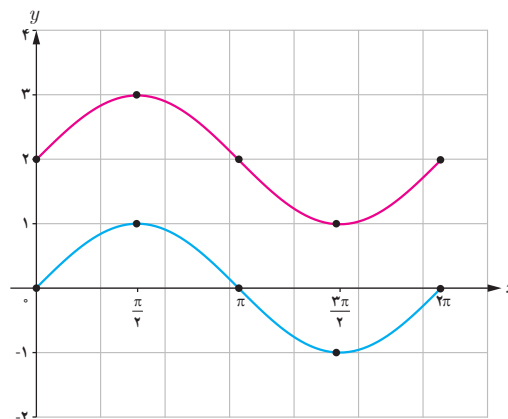
برای رسم نمودار $y = f(x+k)$ ، اگر $k > 0$ باشد، کافی است نمودار تابع $f(x)$ را k واحد در جهت افقی به سمت چپ انتقال دهیم و برای $k < 0$ ، این انتقال به اندازه $|k|$ واحد به سمت راست انجام می‌شود.



مثال: نمودار تابع $y = \sin x$ با دامنه $[0, 2\pi]$ رسم شده است. می‌خواهیم نمودار تابع $f(x) = \sin x + 2$ و $g(x) = \sin(x - \frac{\pi}{4})$ را به کمک انتقال رسم کنیم. با توجه به توضیحات صفحه قبل، کافی است نمودار تابع $y = \sin x$ را ۲ واحد به بالا انتقال دهیم تا $f(x)$ رسم شود (شکل الف) و اگر آن را $\frac{\pi}{4}$ واحد به راست انتقال دهیم، $g(x)$ رسم می‌شود. (شکل ب)



(ب)

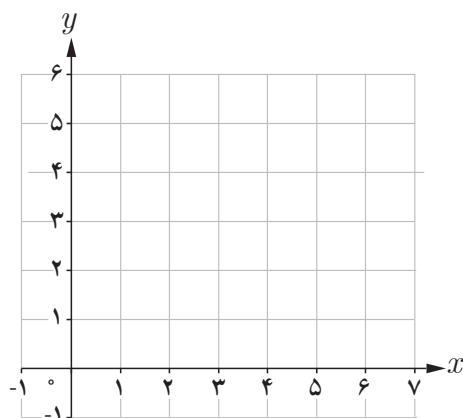


(الف)

کاردکلاس

۱

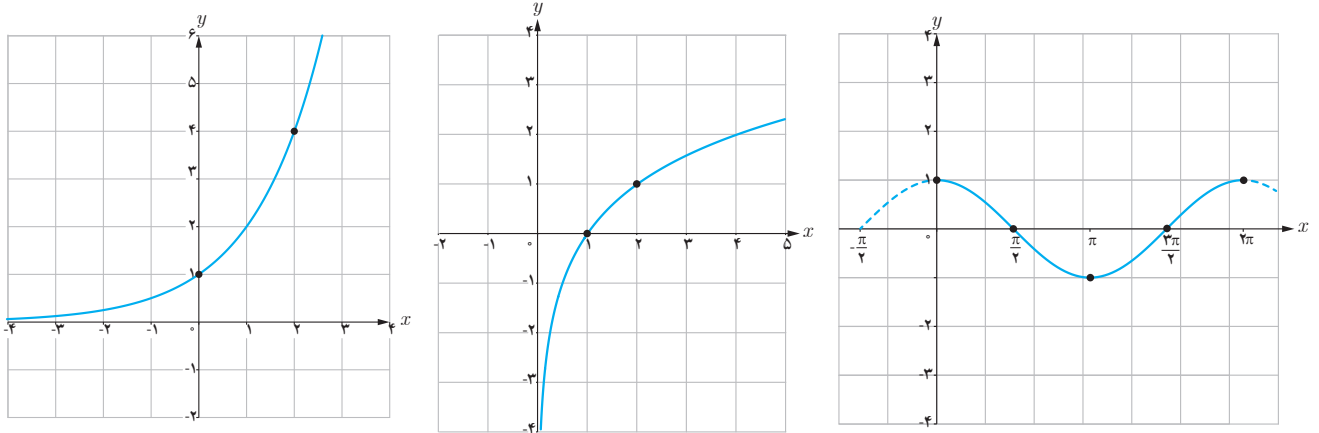
- الف) نمودار تابع $f(x) = \sqrt{x}$ را با دامنه $[0, 4]$ رسم کنید و برد تابع را مشخص کنید.
 ب) نمودار توابع $k(x) = f(x - 2)$ و $g(x) = f(x) + 3$ را به کمک انتقال رسم کنید.
 ج) دامنه و برد توابع k و g را محاسبه و با دامنه و برد تابع f مقایسه کنید.



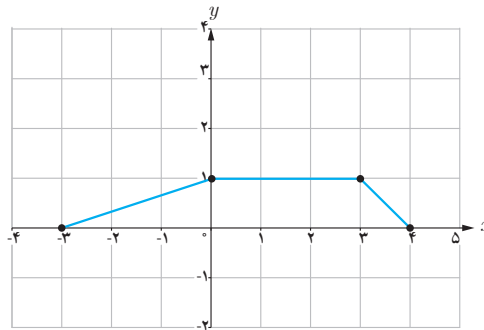
	$f(x) = \sqrt{x}$	$k(x) = f(x - 2)$	$g(x) = f(x) + 3$
دامنه	$[0, 4]$		
برد			

فصل اول: تابع ۵

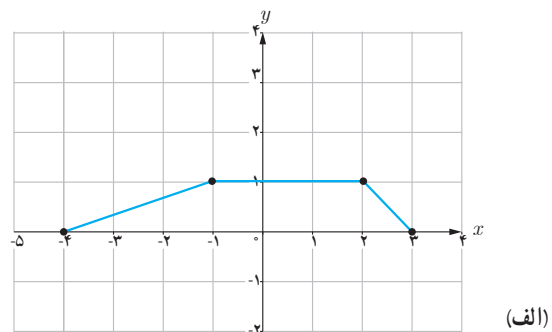
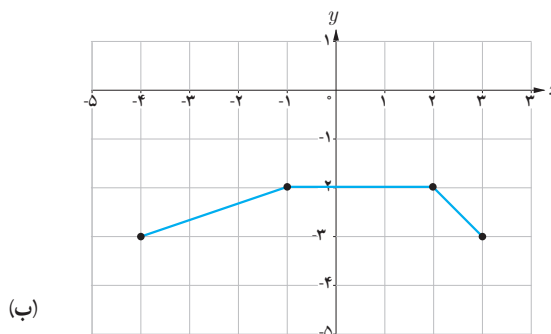
۲ در زیر، نمودار توابع $y = \cos x$ و $y = \log_r x$ ، $y = 2^{x-1} + 2$ ، $y = \log_r(x+2)$ و $y = \cos(x + \frac{\pi}{4})$ را به کمک انتقال رسم کنید.



❁ مثال: نمودار تابع f به صورت زیر داده شده است. با انتقال‌های افقی و عمودی، نمودار تابع $y = f(x+1) - 3$ را رسم می‌کنیم.



برای این کار ابتدا نمودار تابع f را یک واحد به سمت چپ انتقال می‌دهیم تا نمودار تابع $y = f(x+1)$ رسم شود (شکل الف) و سپس این نمودار را سه واحد به پایین منتقل می‌کنیم تا نمودار تابع $y = f(x+1) - 3$ رسم شود (شکل ب).

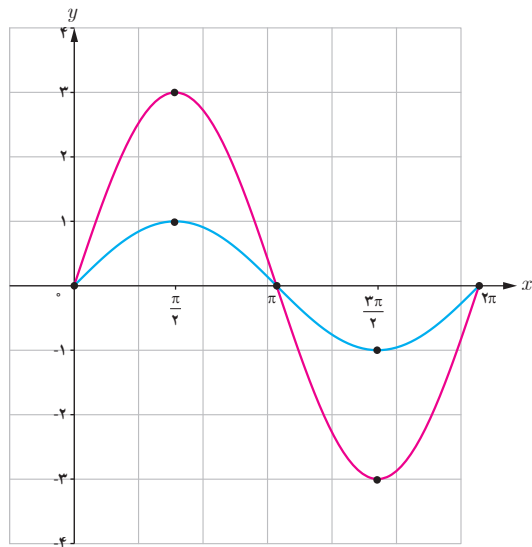


انبساط و انقباض عمودی

فعالیت

۱ در جدول زیر، چند نقطه از نمودارهای توابع $y = \sin x$ و $y = 3 \sin x$ را مشخص کرده و نمودار آنها را در بازه $[0, 2\pi]$ رسم کرده‌ایم. با تکمیل این جدول، نمودار تابع $y = \frac{1}{3} \sin x$ را نیز در دستگاه زیر رسم کنید.

x	۰	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$y = \sin x$	۰	۱	۰	-۱	۰
$y = 3 \sin x$	۰	۳	۰	-۳	۰
$y = \frac{1}{3} \sin x$



۲ با مقایسه نمودارهای بالا، نمودارهای توابع $y = 3 \sin x$ و $y = \frac{1}{3} \sin x$ چه تفاوتی با نمودار تابع $y = \sin x$ دارند؟

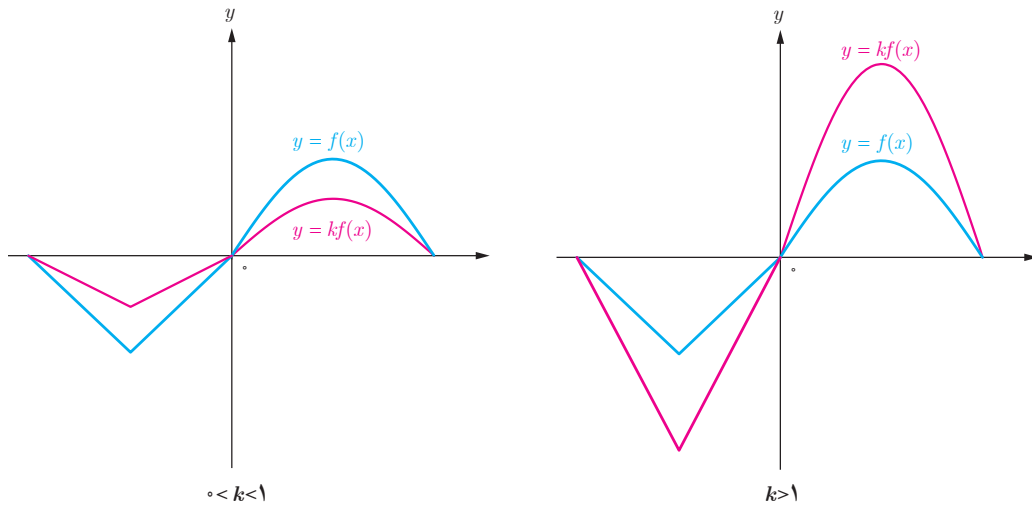
۳ دامنه و برد توابع $y = 3 \sin x$ و $y = \frac{1}{3} \sin x$ چه تفاوتی با دامنه و برد تابع $y = \sin x$ دارند؟

در حالت کلی اگر (x_0, y_0) یک نقطه از نمودار تابع $y = f(x)$ باشد و تابع g به صورت $g(x) = kf(x)$ تعریف شده باشد، آنگاه:

$$g(x_0) = k \cdot f(x_0) = ky_0$$

بنابراین (x_0, ky_0) یک نقطه از نمودار تابع g متناظر با نقطه (x_0, y_0) از نمودار تابع f است.

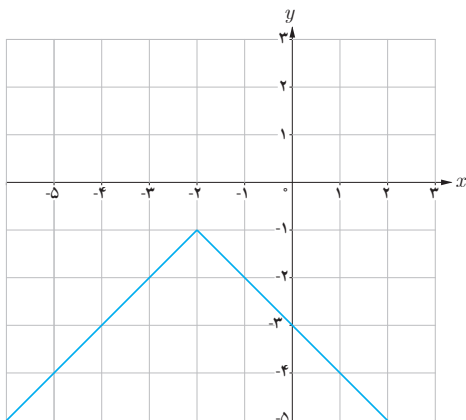
برای رسم نمودار تابع $y = kf(x)$ ، کافی است عرض نقاط نمودار تابع $y = f(x)$ را در k ضرب کنیم. در شکل‌های زیر، نمودار تابع $y = kf(x)$ برای دو حالت $k > 1$ و $0 < k < 1$ رسم شده است.



اگر $k > 1$ باشد، نمودار $y = kf(x)$ از انبساط عمودی نمودار $y = f(x)$ حاصل می‌شود و اگر $0 < k < 1$ باشد، نمودار $y = kf(x)$ از انقباض عمودی نمودار $y = f(x)$ به دست می‌آید.

اگر عرض نقاط تابع $y = f(x)$ را قرینه کنیم، نقاط تابع $y = -f(x)$ به دست می‌آیند. بنابراین نمودار تابع $y = -f(x)$ ، قرینه نمودار تابع $y = f(x)$ نسبت به محور x است.

کاردکلاس



۱ اگر دامنه و برد تابع $y = f(x)$ به ترتیب بازه‌های $[a, b]$ و $[c, d]$ باشند، دامنه و برد تابع $y = kf(x)$ را برای $k > 0$ و $k < 0$ تعیین کنید.

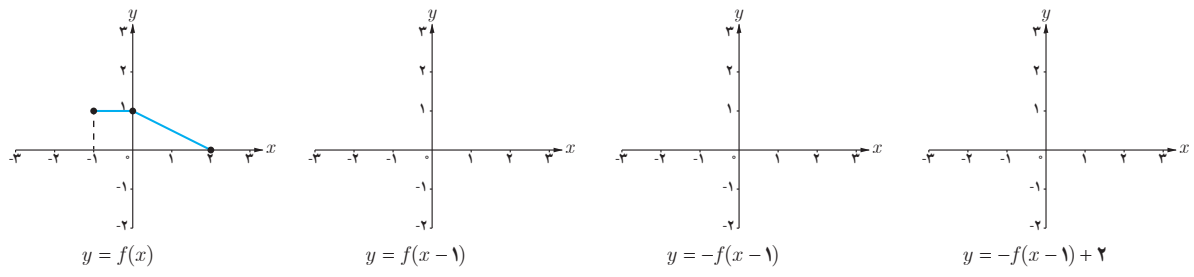
۲ نمودار توابع زیر را به کمک نمودار تابع $y = x^2$ رسم کنید.

الف) $y = -x^2$

ب) $y = 2x^2 - 1$

پ) نمودار روبه‌رو از قرینه‌یابی و انتقال نمودار تابع $y = |x|$ به دست آمده است. ضابطه این تابع را مشخص کنید.

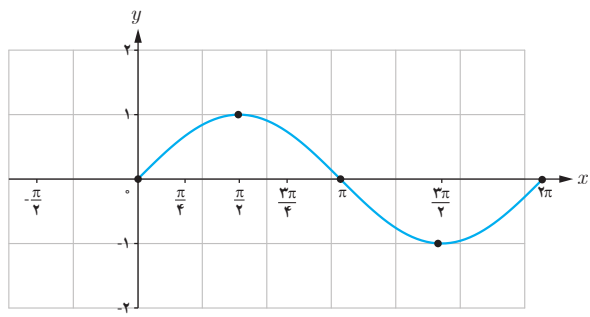
۳ نمودار تابع $y = f(x)$ در زیر رسم شده است. با انجام مراحل زیر، نمودار تابع $y = -f(x-1) + 2$ را رسم کنید.



انبساط و انقباض افقی

فعالیت

در دستگاه زیر، نمودار تابع $y = \sin x$ در فاصله $[0, 2\pi]$ رسم شده است.
 ۱ با تکمیل جدول زیر، نقاطی از نمودار تابع $y = \sin 2x$ مشخص می‌شود. با کمک این جدول نمودار این تابع را در فاصله $[0, \pi]$ رسم کنید.



x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π
$y = \sin 2x$

۲ با مقایسه نمودارهای توابع $y = \sin 2x$ و $y = \sin x$ ، چه تفاوتی بین آنها وجود دارد؟

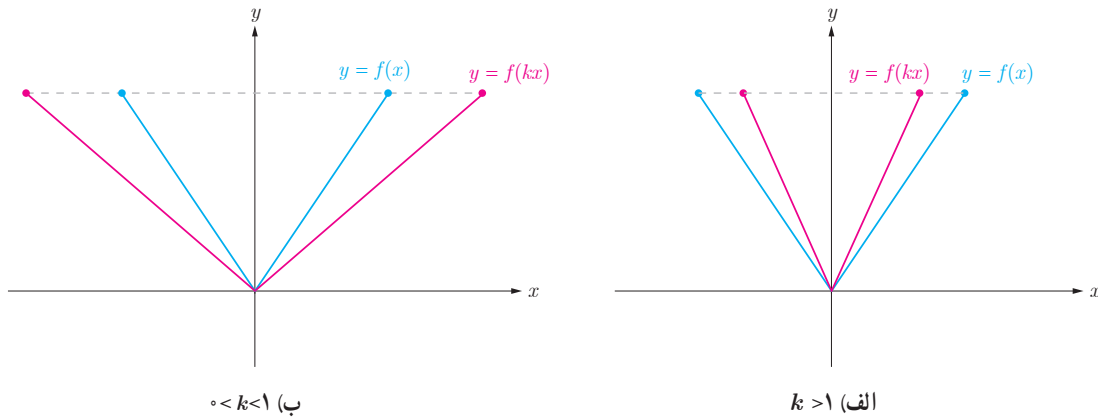
در حالت کلی اگر (x_0, y_0) یک نقطه دلخواه از نمودار تابع $y = f(x)$ باشد و تابع g به صورت $g(x) = f(kx)$ تعریف شده باشد،

$$g\left(\frac{x_0}{k}\right) = f\left(k \frac{x_0}{k}\right) = f(x_0) = y_0 \quad \text{آنگاه:}$$

بنابراین نقطه $\left(\frac{x_0}{k}, y_0\right)$ یک نقطه از نمودار تابع و متناظر با نقطه (x_0, y_0) از نمودار تابع f است.

برای رسم نمودار تابع $y = f(kx)$ ، کافی است طول نقاط نمودار تابع $y = f(x)$ را در $\frac{1}{k}$ ضرب کنیم.

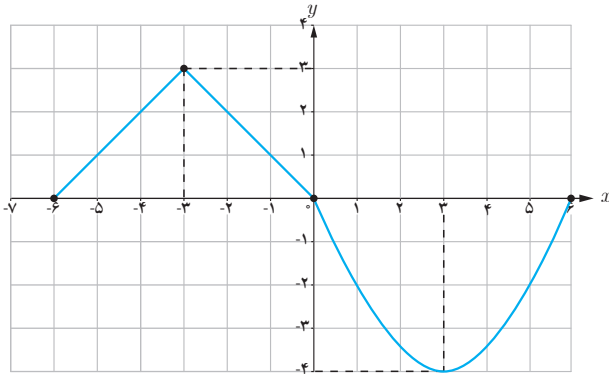
در شکل های زیر، نمودار تابع $y = f(kx)$ برای دو حالت $k > 1$ و $0 < k < 1$ رسم شده است.



اگر $k > 1$ باشد، نمودار $y = f(kx)$ از انقباض افقی نمودار $y = f(x)$ در راستای محور x ها به دست می آید و اگر $0 < k < 1$ باشد، این نمودار از انبساط افقی نمودار $y = f(x)$ حاصل می شود.

اگر طول نقاط تابع $y = f(x)$ را قرینه کنیم، نقاط تابع $y = f(-x)$ به دست می آیند. بنابراین نمودار تابع $y = f(-x)$ قرینه نمودار تابع $y = f(x)$ نسبت به محور y است.

۱ اگر دامنه و برد تابع $y = f(x)$ به ترتیب بازه‌های $[a, b]$ و $[c, d]$ باشند، دامنه و برد تابع $y = f(kx)$ را برای $k > 0$ و $k < 0$ تعیین کنید.



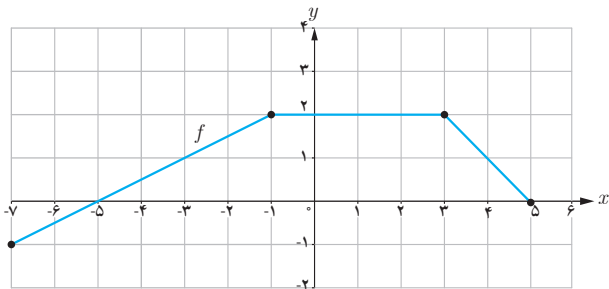
۲ اگر نمودار تابع $y = f(x)$ به صورت مقابل باشد، نمودار توابع $y = f(3x)$ و $y = f(-\frac{x}{3})$ را رسم کنید.

۳ نمودار توابع زیر را به کمک نمودار تابع $y = \cos x$ رسم کنید.

الف) $y = \cos 2x - 1$

ب) $y = 2 \cos(\frac{x}{3})$

❁ مثال: اگر نمودار تابع f به صورت زیر باشد، نمودار تابع $g(x) = f(2x + 1)$ را به کمک آن رسم می‌کنیم.



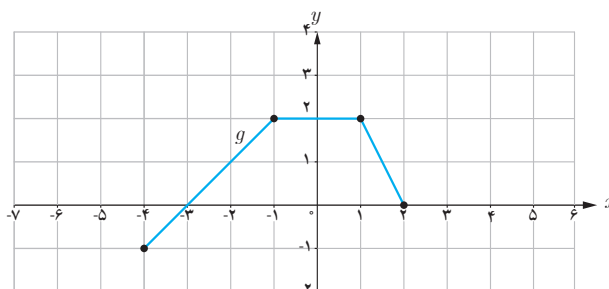
اگر $A = (x_0, y_0)$ یک نقطه از نمودار تابع f باشد، آنگاه نقطه متناظر آن روی نمودار تابع g است، زیرا:

$$g\left(\frac{x_0 - 1}{2}\right) = f\left(2\left(\frac{x_0 - 1}{2}\right) + 1\right) = f(x_0 - 1 + 1) = f(x_0) = y_0.$$

بنابراین نقاط مشخص شده در نمودار f را یک واحد به سمت چپ منتقل کرده و سپس طول آنها را بر ۲ تقسیم می‌کنیم تا نقاط متناظر از g به دست آیند.

با توجه به اینکه $\frac{x_0 - 1}{2} = \frac{x_0}{2} - \frac{1}{2}$ ، آیا می‌توانید روشی دیگر برای رسم نمودار تابع g پیشنهاد کنید؟

آیا می‌توان برای رسم نمودار تابع g ، ابتدا نمودار تابع $y = f(2x)$ را رسم کرد و سپس آن را یک واحد به چپ منتقل کرد تا $g(x) = f(2x + 1)$ رسم شود؟ چرا؟



۱- برای یافتن طول نقطه A' ، از معکوس تابع $y = 2x + 1$ استفاده می‌کنیم.

۱ هر یک از توابع زیر، تبدیل یافته تابع $y = \sqrt{x}$ هستند. هر یک از آنها را به نمودارش نظیر کنید.

الف) $y = \sqrt{2+x}$

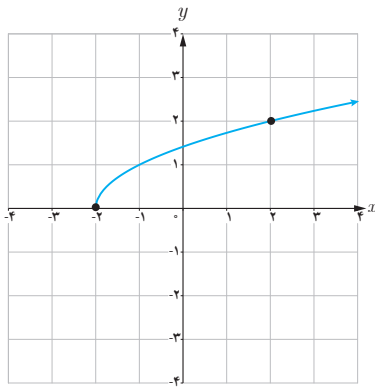
ب) $y = 2 + \sqrt{x}$

پ) $y = -2\sqrt{x}$

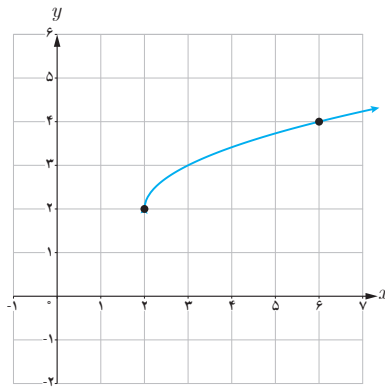
ت) $y = \sqrt{\frac{x}{2}}$

ث) $y = 2 + \sqrt{x-2}$

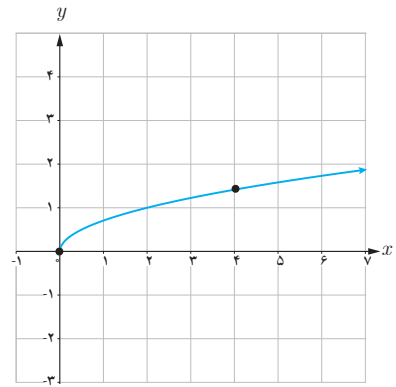
ج) $y = \sqrt{-2x}$



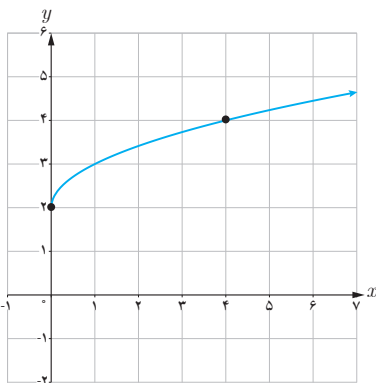
(a)



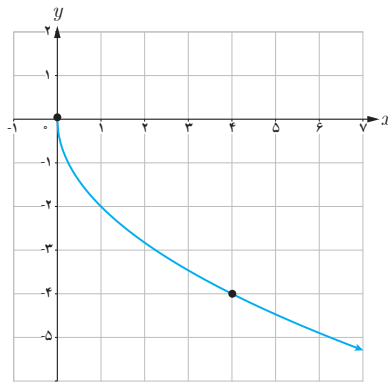
(b)



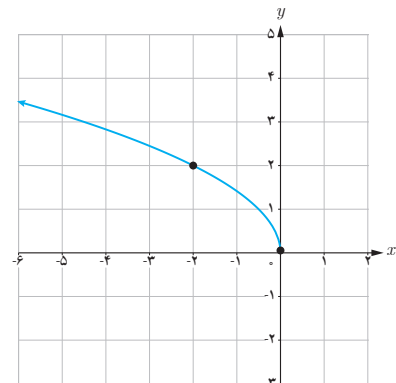
(c)



(d)



(e)



(f)

۲ نمودار تابع f در شکل زیر رسم شده است. نمودار هر یک از توابع زیر را رسم کنید.

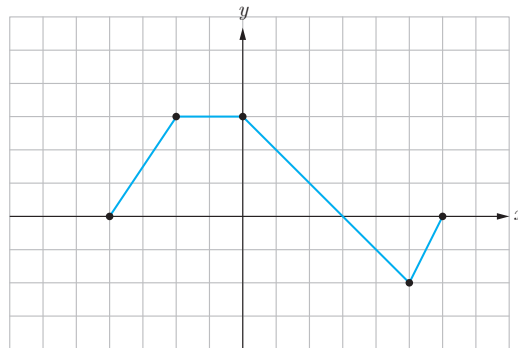
الف) $y = f(-x)$

ب) $y = 2f(x-1)$

پ) $y = -f(x) + 2$

ت) $y = f(2x-1)$

ث) $y = f(3-x)$

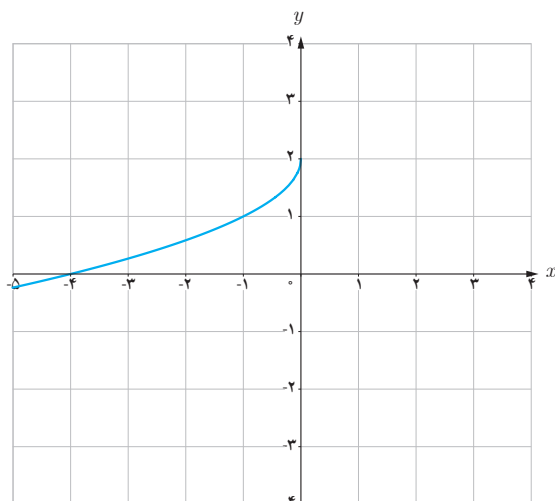
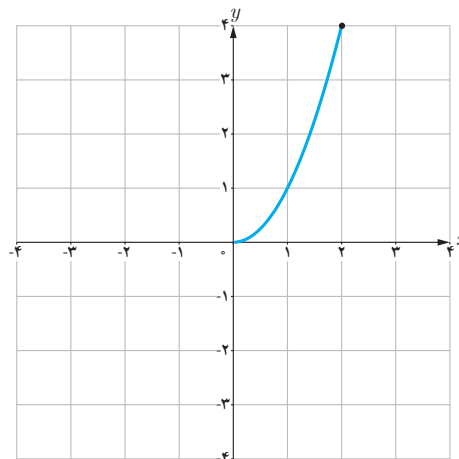


۳ نمودار تابع f در شکل زیر رسم شده است. نمودار توابع زیر را رسم کنید و آنها را با نمودار f مقایسه کنید.

الف) $y = f(-x)$

ب) $y = -f(x)$

پ) $y = -f(-x)$



۴ نمودار تابع مقابل فقط از قرینه‌یابی و انتقال نمودار تابع $y = \sqrt{x}$ به دست آمده است. ضابطه این تابع را بنویسید.

۲

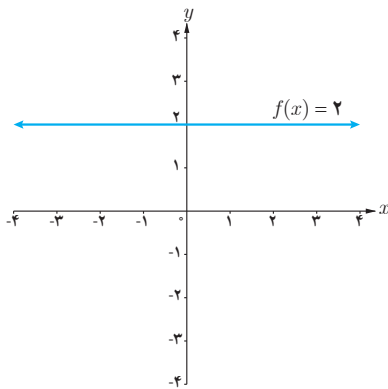
درس

تابع درجه سوم، توابع یکنوا و بخش پذیری و تقسیم

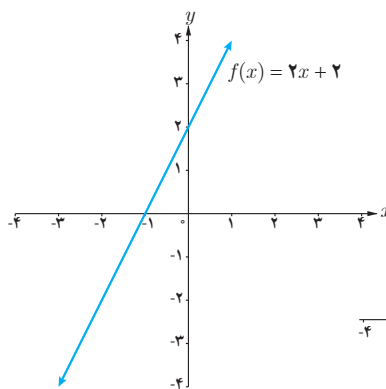
فرض کنید n یک عدد صحیح نامنفی و $a_n, a_{n-1}, \dots, a_2, a_1, a_0$ اعداد حقیقی باشند که $a_n \neq 0$. تابع $f(x)$ که به صورت زیر تعریف می‌شود، تابع چند جمله‌ای از درجه n نامیده می‌شود.^۱

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

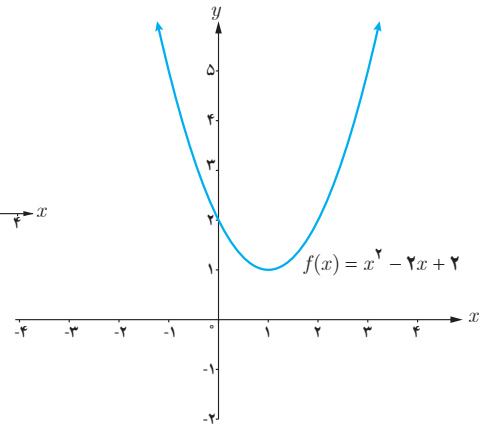
تابع ثابت $f(x) = c$ ، یک تابع چند جمله‌ای از درجه صفر و تابع خطی $f(x) = mx + b$ که $m \neq 0$ ، یک تابع چند جمله‌ای از درجه یک است. به همین ترتیب یک سهمی به معادله $f(x) = ax^2 + bx + c$ یک تابع چند جمله‌ای از درجه دو است.



تابع درجه صفر



تابع درجه یک



تابع درجه دو

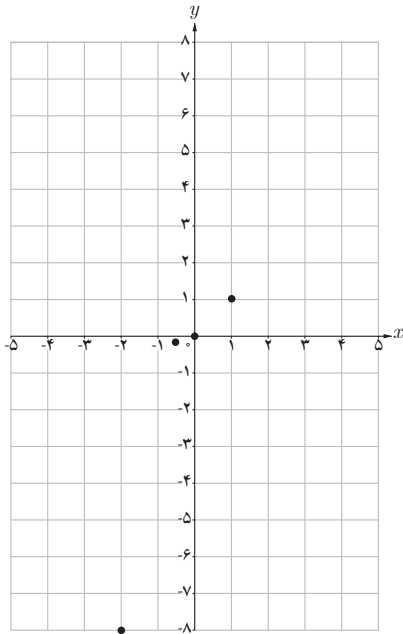
کاردکلاسی

در زیر چند تابع چند جمله‌ای نوشته شده‌اند. درجه هر کدام را مشخص کنید.

$$f(x) = 2x - 3, \quad h(x) = x^2 + x - 4, \quad n(x) = 2x - x^2$$

$$g(x) = (x-1)^2 + 3, \quad m(x) = 5, \quad p(x) = x^2(1-x)^2$$

۱- برای $f(x) = 0$ ، درجه تعریف نمی‌شود.



x	$y = x^3$
-۲	$(-۲)^3 = -۸$
-۱	
$-\frac{1}{۲}$	$(-\frac{1}{۲})^3 = -\frac{1}{۸}$
۰	۰
$\frac{1}{۲}$	
۱	۱
۲	

یکی از توابع چند جمله‌ای درجه سه، تابع $f(x) = x^3$ است.

۱ با تکمیل جدول مقابل، نمودار تابع $f(x) = x^3$ را رسم کنید.

۲ به کمک نمودار رسم شده برای تابع $f(x) = x^3$ ، نشان دهید که این تابع وارون‌پذیر است.

۳ نمودار تابع f^{-1} را رسم کنید و ضابطه f^{-1} را تعیین کنید.

۱ نمودار هر یک از توابع زیر را به کمک نمودار تابع $y = x^3$ رسم کنید.

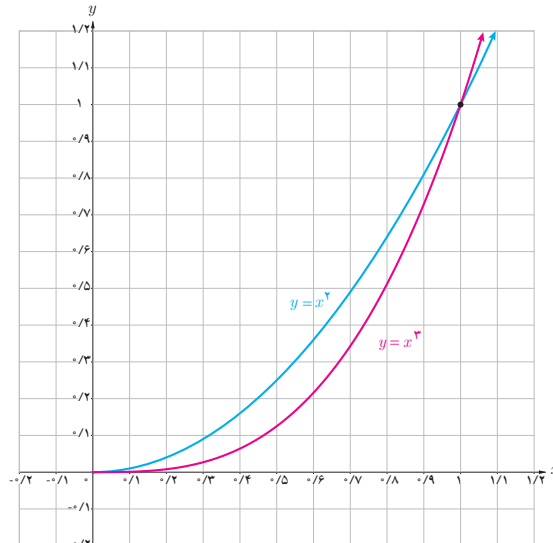
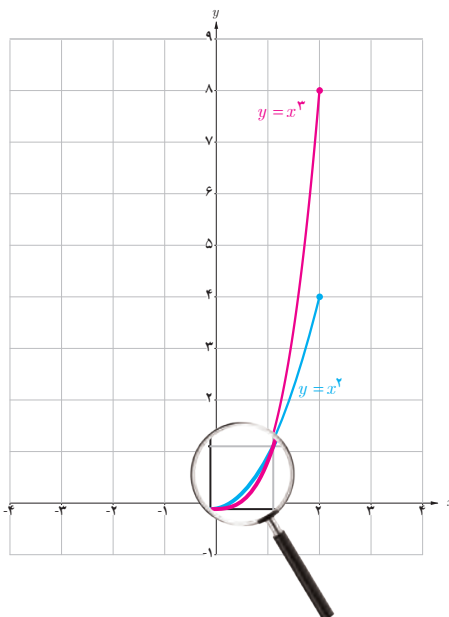
الف) $y = (x+1)^3$

ب) $y = -x^3 + 1$

پ) $y = x^3 - 3x^2 + 3x$

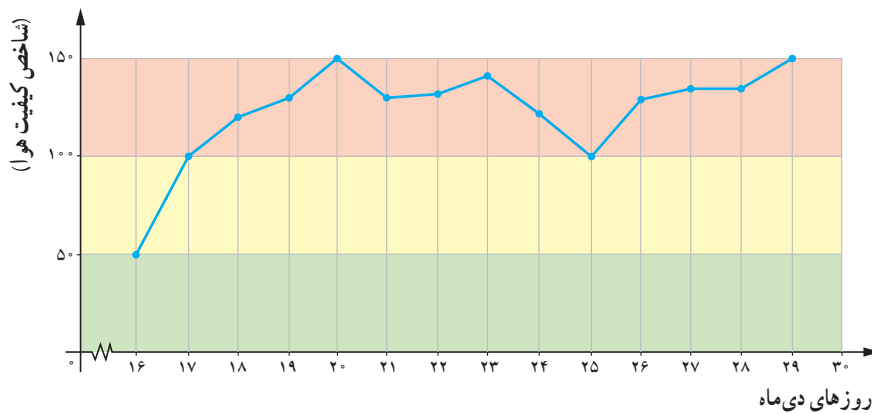
۲ نمودار هر یک از توابع $y = x^3$ و $y = x^2$ در فاصله $[0, 2]$ رسم شده است.

در فاصله $[0, 1]$ ، نمودار کدام تابع پایین‌تر و نمودار کدام تابع بالاتر است؟ در فاصله $[1, 2]$ چطور؟

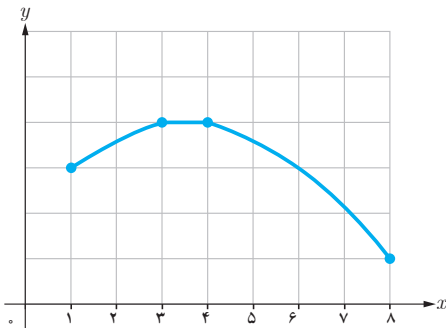


توابع صعودی و توابع نزولی

تنفس هوای پاک در شهرهای صنعتی یکی از آرزوهای ساکنین این شهرهاست. براساس شاخص کیفیت هوا (AQI)، کیفیت هوای یک منطقه، یکی از وضعیت‌های پاک، سالم، ناسالم برای گروه‌های حساس، ناسالم، بسیار ناسالم و خطرناک می‌باشد. نمودار زیر، میانگین شاخص کیفیت هوا در ۱۵ روز پایانی دی ماه سال ۱۳۹۵ در شهر تهران را نشان می‌دهد.



- الف) شاخص کیفیت هوا در چه فاصله‌های زمانی روبه افزایش بوده است؟
 ب) شاخص کیفیت هوا در چه فاصله‌های زمانی روبه کاهش بوده است؟
 پ) این شاخص در چه فاصله زمانی ثابت بوده است؟

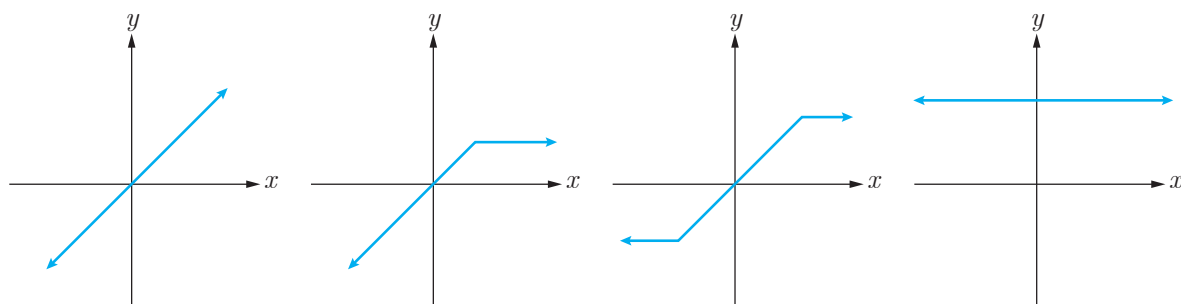


دامنه تابع f که در شکل مقابل دیده می‌شود، بازه $[1, 8]$ است. در بازه $[1, 3]$ ، هم‌زمان با افزایش x ، نمودار تابع روبه بالا می‌رود. به همین خاطر به تابع f در بازه $[1, 3]$ صعودی می‌گوییم. در بازه $[3, 4]$ مقدار تابع ثابت است. در ادامه و در بازه $[4, 8]$ ، هم‌زمان با افزایش x ، نمودار تابع روبه پایین می‌رود و به همین منظور به تابع f در بازه $[4, 8]$ نزولی گفته می‌شود.

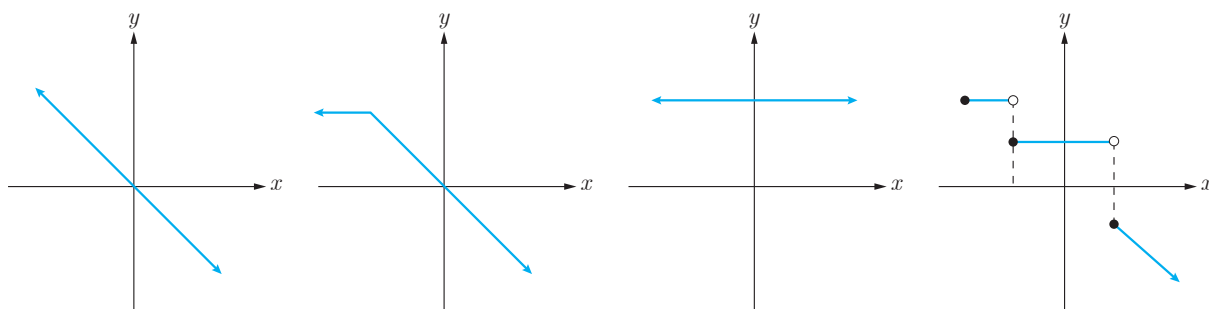
توابع صعودی و توابع نزولی

اگر برای هر دو نقطه a و b از دامنه تابع f که $a < b$ ، داشته باشیم $f(a) \leq f(b)$ ، آنگاه f را تابعی صعودی می‌نامیم. از آنجائی که معمولاً رفتار تابع را در بازه‌هایی از اعداد حقیقی بررسی می‌کنیم، بنابراین می‌توان گفت:

تابع f را در یک بازه، صعودی می‌گوییم، اگر برای هر دو مقدار a و b در این بازه که $a < b$ ، آنگاه $f(a) \leq f(b)$ در فاصله‌ای که یک تابع صعودی است، با حرکت روی نمودار (از چپ به راست)، روبه پایین نخواهیم رفت. نمودارهای زیر همگی مربوط به توابع صعودی‌اند.

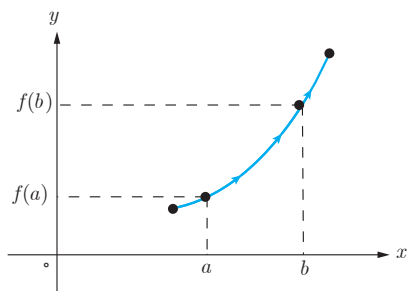


تابع f را در یک بازه، نزولی می‌گوییم، اگر برای هر دو مقدار a و b در این بازه که $a < b$ ، آنگاه $f(a) \geq f(b)$ در فاصله‌ای که یک تابع نزولی است، با حرکت روی نمودار (از چپ به راست)، روبه بالا نخواهیم رفت. نمودارهای زیر همگی مربوط به توابع نزولی‌اند.

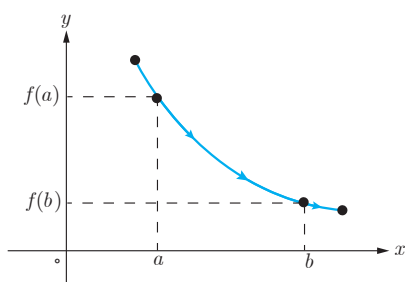


به تابعی که در یک بازه فقط صعودی یا فقط نزولی باشد، یکنوا می‌گوییم.

❁ تابع f را در یک بازه، ثابت می‌گوییم، اگر برای تمام مقادیر x در این بازه، مقدار $f(x)$ ثابت باشد. با توجه به تعاریف بالا، تابع ثابت در یک بازه، هم صعودی و هم نزولی محسوب می‌شود.



الف) تابع اکیداً صعودی

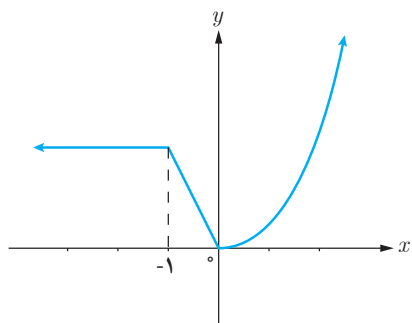


ب) تابع اکیداً نزولی

توابع اکیداً صعودی و توابع اکیداً نزولی

❖ تابع f را در یک بازه، اکیداً صعودی می‌گوییم، اگر برای هر دو مقدار a و b در این بازه که $a < b$ ، آنگاه $f(a) < f(b)$. در فاصله‌ای که یک تابع اکیداً صعودی است، با حرکت روی نمودار (از چپ به راست)، همواره روبه بالا خواهیم رفت. (شکل الف)

❖ تابع f را در یک بازه، اکیداً نزولی می‌گوییم، اگر برای هر دو مقدار a و b در این بازه که $a < b$ ، آنگاه $f(a) > f(b)$. در فاصله‌ای که یک تابع اکیداً نزولی است، با حرکت روی نمودار (از چپ به راست)، همواره روبه پایین خواهیم رفت. (شکل ب)



به تابعی که در یک بازه فقط اکیداً صعودی یا فقط اکیداً نزولی باشد، اکیداً یکنوا می‌گوییم.

❖ **مثال:** نمودار تابع f در شکل مقابل رسم شده است. در فاصله $(-\infty, -1]$ تابع f ثابت است. همچنین در فاصله $[-1, 0]$ تابع اکیداً نزولی و در فاصله $[0, +\infty)$ تابع اکیداً صعودی است.

کارد کلاس

۱ نمودار توابع زیر را رسم کنید.

$$f(x) = x^2 + 2x, \quad g(x) = 2^{-x}, \quad h(x) = |x + 2|$$

الف) در چه بازه‌هایی این توابع، اکیداً صعودی و در چه بازه‌هایی اکیداً نزولی هستند؟

ب) کدام یک از آنها در تمام دامنه خود، اکیداً یکنوا است؟

۲ نمودار تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 & x \geq -1 \\ 2 & x < -1 \end{cases}$ را رسم کنید. در چه فاصله‌هایی این تابع صعودی و در چه فاصله‌هایی نزولی است؟

۲

الف) اگر تابع f در یک فاصله اکیداً صعودی باشد، آیا صعودی نیز هست؟ چرا؟
ب) اگر تابع f در یک فاصله صعودی باشد، آیا اکیداً صعودی نیز خواهد بود؟ مثال بزنید.

۴

الف) فرض کنید تابع f در یک فاصله اکیداً صعودی باشد و a و b متعلق به این فاصله باشند. اگر $f(a) \leq f(b)$ نشان دهید که $a \leq b$.
ب) اگر $\log(x+1) \leq \log(2x-3)$ ، حدود x را به دست آورید.

تقسیم و بخش پذیری

فعالیت

با تقسیم چند جمله‌ای‌ها بر یکدیگر آشنا هستید. توابع چند جمله‌ای $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$ و $p(x) = x^2 - 2$ را در نظر می‌گیریم.
الف) اگر $q(x)$ و $r(x)$ به ترتیب خارج قسمت و باقیمانده تقسیم $f(x)$ بر $p(x)$ باشند. نشان دهید که $q(x) = x - 3$ و $r(x) = 2x - 5$.
ب) درستی تساوی $f(x) = p(x)q(x) + r(x)$ را بررسی کنید.

قضیه تقسیم برای چند جمله‌ای‌ها

اگر $f(x)$ و $p(x)$ توابع چند جمله‌ای باشند و درجه $p(x)$ از صفر بزرگ‌تر باشد، آنگاه توابع چند جمله‌ای منحصر بفرد $q(x)$ و $r(x)$ وجود دارند به طوری که:

$$f(x) = p(x)q(x) + r(x)$$

که در آن $r(x) = 0$ یا درجه $r(x)$ از درجه $p(x)$ کمتر است.

اگر $r(x) = 0$ باشد، چندجمله‌ای f بر چندجمله‌ای p بخش پذیر است.

اگر $f(x) = x^2 - 16$ و $p(x) = x + 2$ ، نشان دهید که $f(x)$ بر $p(x)$ بخش پذیر است.

در تقسیم $f(x) = x^2 + 2$ بر $p(x) = 2x - 1$ ، $q(x)$ و $r(x)$ به ترتیب خارج قسمت و باقی مانده اند.

الف) نشان دهید که $r(x)$ از درجه صفر است.

ب) با توجه به قضیه تقسیم می توان نوشت:

$$f(x) = (2x - 1)q(x) + r(x)$$

اکنون ریشه چند جمله ای $p(x) = 2x - 1$ را به دست آورید و با قرار دادن در رابطه بالا نشان دهید که $r(x) = f\left(\frac{1}{2}\right)$. به طور کلی می توان گفت:

قضیه: باقی مانده تقسیم چند جمله ای $f(x)$ بر $ax + b$ عبارت است از $r(x) = f\left(\frac{-b}{a}\right)$.

۱ باقی مانده تقسیم چند جمله ای $x^2 + x - 2$ را بر $2x + 1$ به دست آورید.

۲ اگر چند جمله ای $x^2 + ax - 2$ بر $x - a$ بخش پذیر باشد، مقدار a را تعیین کنید.

با اتحادهای زیر از سال‌های قبل، آشنا هستید.

$$x^2 - a^2 = (x-a)(x+a) \quad \text{و} \quad x^3 - a^3 = (x-a)(x^2 + ax + a^2)$$

۱ از تقسیم $x^3 - a^3$ بر $x-a$ نشان دهید که:

$$x^3 - a^3 = (x-a)(x^2 + ax + a^2)$$

۲ آیا $x^n - a^n$ ($n \in \mathbb{N}$) بر $x-a$ بخش پذیر است؟

۳ از تقسیم $x^n - a^n$ بر $x-a$ نشان دهید که $x^n - a^n$ به صورت زیر تجزیه می‌شود.

$$x^n - a^n = (x-a)(x^{n-1} + ax^{n-2} + a^2x^{n-3} + \dots + a^{n-2}x + a^{n-1})$$

۴ چند جمله‌ای‌های $x^5 - 1$ و $x^6 - 64$ را به کمک اتحاد بالا تجزیه کنید.

۱ در اتحاد بالا، اگر n فرد باشد، با تغییر a به $-a$ اتحاد زیر را نتیجه بگیرید.

$$x^n + a^n = (x+a)(x^{n-1} - ax^{n-2} + a^2x^{n-3} - \dots - a^{n-2}x + a^{n-1})$$

به کمک این اتحاد، چند جمله‌ای $x^5 + 1$ را تجزیه کنید.

۲ در فعالیت بالا، اگر n زوج باشد، با تغییر a به $-a$ اتحاد زیر را نتیجه بگیرید.

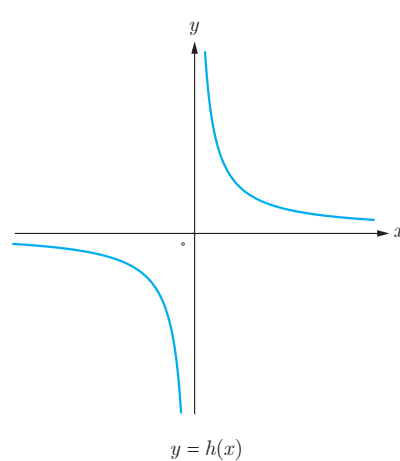
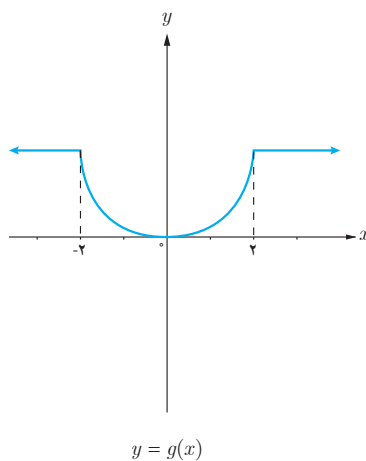
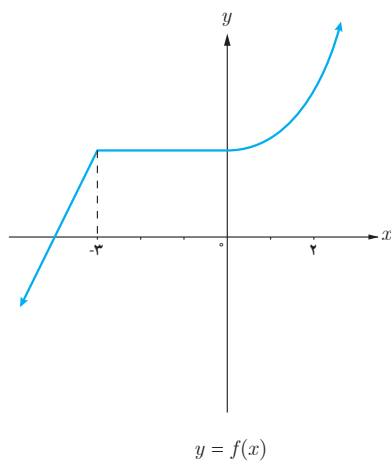
$$x^n - a^n = (x+a)(x^{n-1} - ax^{n-2} + a^2x^{n-3} - \dots + a^{n-2}x - a^{n-1})$$

به کمک این اتحاد، چند جمله‌ای $x^4 - 16$ را طوری تجزیه کنید که $x+2$ یک عامل آن باشد.

۱ تابع $f(x) = (x-2)^2 + 1$ را در نظر بگیرید.

- الف) نمودار تابع f را به کمک نمودار تابع $y = x^2$ رسم کنید.
 ب) نشان دهید که f وارون پذیر است و نمودار f^{-1} را رسم کنید.
 پ) ضابطه f^{-1} را به دست آورید.

۲ نمودار توابع f ، g و h در زیر رسم شده‌اند.



- الف) تابع f در چه فاصله‌هایی اکیداً صعودی و در چه فاصله‌هایی صعودی است؟
 ب) تابع g در چه فاصله‌هایی اکیداً نزولی و در چه فاصله‌هایی نزولی است؟
 پ) تابع h در چه فاصله‌هایی اکیداً نزولی است؟

۳ نمودار هر یک از توابع زیر را رسم کنید. کدام یک از آنها در تمام دامنه خود، اکیداً یکنواست؟

الف) $f(x) = \sqrt{2-x}$

ب) $g(x) = 2^{-x}$

ج) $h(x) = \log_2 x$

۴ آیا تابعی وجود دارد که در یک فاصله، هم صعودی و هم نزولی باشد؟

۵ اگر توابع f و g در یک فاصله اکیداً صعودی باشند، نشان دهید که تابع $f + g$ نیز در این فاصله اکیداً صعودی است. برای تابع $f - g$ چه می توان گفت؟

۶ اگر باقی مانده تقسیم چند جمله‌ای $x^3 + kx^2 + 2$ بر $x - 2$ برابر با ۶ باشد، k را تعیین کنید.

۷ مقادیر a و b را طوری تعیین کنید که چند جمله‌ای $x^3 + ax^2 + bx + 1$ بر $x - 2$ و $x + 1$ بخش پذیر باشد.

۸ هر یک از چند جمله‌ای‌های زیر را بر حسب عامل‌های خواسته شده تجزیه کنید.

الف) $x^6 - 1$ با عامل $x - 1$

ب) $x^6 - 1$ با عامل $x + 1$

پ) $x^5 + 32$ با عامل $x + 2$

۹ الف) فرض کنید تابع f در یک بازه اکیداً نزولی باشد و a و b متعلق به این بازه باشند. اگر $f(a) \leq f(b)$ نشان دهید که $a \geq b$.

ب) اگر $\left(\frac{1}{4}\right)^{3x-2} \leq \frac{1}{64}$ ، حدود x را به دست آورید.

مثلثات



۱ تناوب و تانژانت

۲ معادلات مثلثاتی

فصل

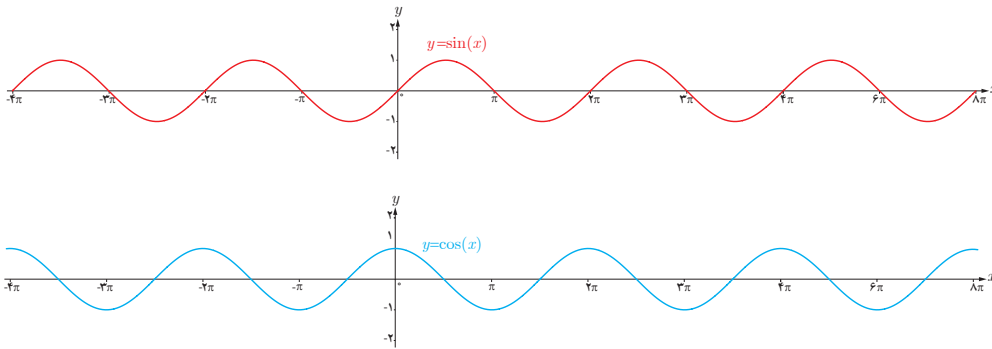


انشعاب رگ‌ها در بدن انسان به گونه‌ای است که مقاومت هیدرولیکی درون رگ‌ها تابعی مثلثاتی از زاویه بین هر دو رگ متصل به هم است. در شبیه‌سازی کامپیوتری از شبکه رگ‌ها این خاصیت مورد توجه قرار می‌گیرد.

تناوب و تنازات

درس

با توابع مثلثاتی $f(x) = \sin x$ و $f(x) = \cos x$ در سال گذشته آشنا شدیم و دیدیم که در آنها مقادیر تابع برای هر دو نقطه به فاصله 2π روی محور x ها یکسان است $\sin(x \pm 2k\pi) = \sin x$ و $\cos(x \pm 2k\pi) = \cos x$ به عبارتی اگر تکه‌ای از نمودار این توابع را در بازه‌ای به طول 2π داشته باشیم، با تکرار این تکه می‌توان نمودار توابع فوق را به دست آورد. این مطلب را می‌توانید در شکل‌های زیر مشاهده نمایید.



با دقت به نمودار توابع فوق می‌توان مشاهده کرد که نمودار در بازه‌هایی به طول $2\pi, 4\pi, 6\pi, \dots$ تکرار می‌شود. اما کوچک‌ترین بازه‌ای که نمودار این توابع در آن تکرار شده است، همان 2π است. چنین توابعی را توابع متناوب و 2π را دوره تناوب آنها می‌نامیم.

تعریف:

تابع f را متناوب می‌نامیم هرگاه یک عدد حقیقی مثبت مانند T موجود باشد به طوری که برای هر $x \in D_f$ داشته باشیم $x \pm T \in D_f$ و $f(x \pm T) = f(x)$. کوچک‌ترین عدد مثبت T با این خاصیت را دوره تناوب f می‌نامیم.

فعالیت

1 می‌دانیم دوره تناوب تابع $f(x) = \sin x$ و $f(x) = \cos x$ برابر 2π و مقادیر ماکزیمم و مینیمم این تابع به ترتیب 1 و -1 است. در ادامه می‌خواهیم با بررسی نمودارهای داده شده، تأثیر ضریب a را در تابع $f(x) = a \sin x$ بر دوره تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم این تابع بررسی نماییم.

تابع	نمودار تابع	ماکزیمم	مینیمم	دوره تناوب
$y = \sin x$		۱	-۱	2π
$y = 2 \sin x$	
$y = -3 \sin x$	
$y = \frac{1}{2} \sin x$	
$y = -\frac{1}{3} \sin x$	

۲ با توجه به نمودارهای فوق دوره تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم تابع $y = a \sin x$ را مشخص نمایید.

۳ با توجه به آنچه در مورد انتقال توابع می‌دانید مشخص نمایید دوره تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم تابع $y = a \sin x + c$ چگونه است. با انجام مراحل مشابه بالا می‌توان نشان داد دوره تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم توابع $y = a \cos x$ و $y = a \cos x + c$ نیز مانند آنچه گفته شد به دست می‌آید.

۱ با دقت در نمودار هر یک از توابع داده شده زیر، دوره تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم هر یک را تشخیص دهید. در ادامه می‌خواهیم با بررسی نمودارهای داده شده، تأثیر ضریب b در تابع $y = \sin bx$ را بر دوره تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم این تابع بررسی کنیم.

تابع	نمودار تابع	ماکزیمم	مینیمم	دوره تناوب
$y = \sin x$		۱	-۱	2π
$y = \sin 2x$	
$y = \sin(-2x)$	
$y = \sin \frac{x}{2}$	
$y = \sin\left(-\frac{x}{3}\right)$	

۲ با توجه به نمودارهای فوق دوره تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم تابع $y = \sin bx$ را مشخص نمایید.

۳ با توجه به آنچه در مورد انتقال توابع می دانیم، مشخص نمایید دوره تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم تابع $y = \sin bx + c$ چگونه است.

با انجام مراحل مشابه مراحل بالا می توان نشان داد دوره تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم توابع $y = \cos bx$ و $y = \cos bx + c$ نیز مانند آنچه گفته شد به دست می آید.

همان طور که در فعالیت های قبل دیدیم در توابع $y = a \sin bx + c$ و $y = a \cos bx + c$ ضریب a در دوره تناوب تابع بی تأثیر است، اما در مقدار ماکزیمم و مینیمم تابع تأثیرگذار است. برعکس، ضریب b در دوره تناوب تابع تأثیرگذار و در مقادیر ماکزیمم و مینیمم تابع بی تأثیر است. مقدار c نیز از آنجا که فقط باعث انتقال نمودار می شود، در دوره تناوب بی تأثیر است و صرفاً در مقدار ماکزیمم و مینیمم تابع تأثیرگذار است.

توابع $y = a \sin bx + c$ و $y = a \cos bx + c$ دارای مقدار ماکزیمم $|a| + c$ و مقدار مینیمم $-|a| + c$ و دوره تناوب $\frac{2\pi}{|b|}$ است.

بنابراین با داشتن ضابطه تابعی به صورت فوق می توان مقادیر ماکزیمم و مینیمم و دوره تناوب تابع را به دست آورد و برعکس با داشتن مقادیر ماکزیمم، مینیمم و دوره تناوب یک تابع مثلثاتی، می توان ضابطه تابع مورد نظر را به دست آورد.

❖ مثال: دوره تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم هر یک از توابع زیر را مشخص نمایید.

الف) $y = 3 \sin(2x) - 2$ ب) $y = -\frac{1}{4} \cos(\pi x)$

پ) $y = \pi \sin(-x) + 1$ ت) $y = 8 \cos\left(\frac{x}{3}\right)$

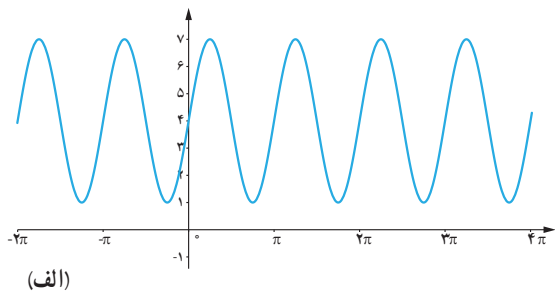
❖ حل:

الف) $\max = |3| - 2 = 1$ $\min = -|3| - 2 = -5$ $T = \frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{2} = \pi$

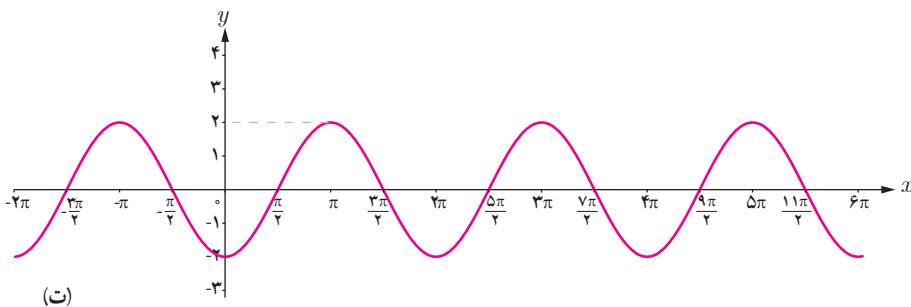
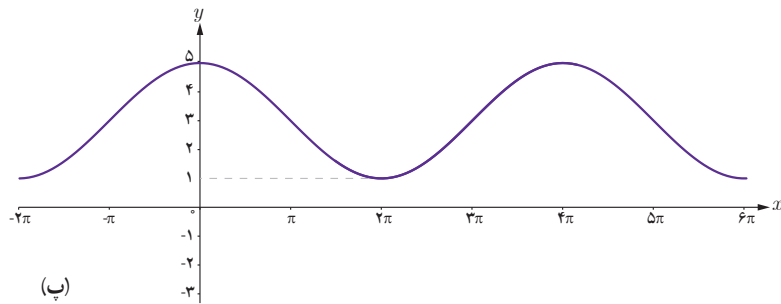
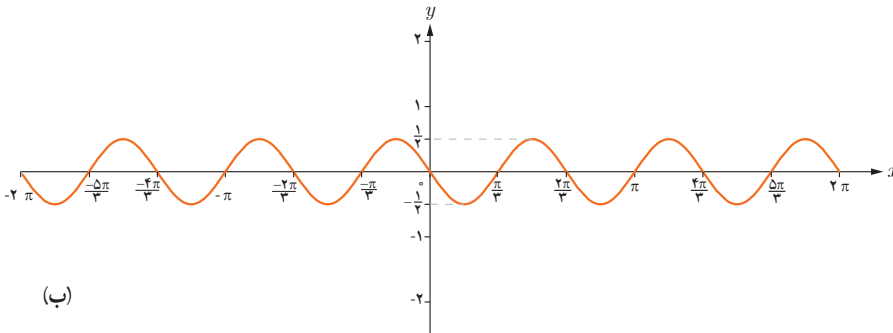
ب) $\max = \left| -\frac{1}{4} \right| = \frac{1}{4}$ $\min = -\left| -\frac{1}{4} \right| = -\frac{1}{4}$ $T = \frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{\pi} = 2$

پ) $\max = |\pi| + 1 = \pi + 1$ $\min = -|\pi| + 1 = 1 - \pi$ $T = \frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{1} = 2\pi$

ت) $\max = |8| = 8$ $\min = -|8| = -8$ $T = \frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{\frac{1}{3}} = 6\pi$



❖ **مثال:** هر یک از نمودارهای داده شده در زیر مربوط به تابعی با ضابطه $f(x) = a \cos bx + c$ یا $f(x) = a \sin bx + c$ است. با دقت در شکل نمودار و تشخیص دوره تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم تابع، ضابطه آن را مشخص نمایید.



❖ **حل:**

(الف) با توجه به شکل، نمودار تابع مورد نظر می‌تواند به صورت $y = a \sin bx + c$ باشد و مقادیر ماکزیمم و مینیمم آن برابر ۷ و ۱ و طول دوره تناوب برابر π است. لذا $T = \frac{2\pi}{|b|} = \pi$ و بنابراین $|b| = 2$.
از طرفی چون مقادیر ماکزیمم و مینیمم به ترتیب $|a| + c$ و $-|a| + c$ است، بنابراین همواره مقدار c میانگین مقادیر ماکزیمم و مینیمم است، داریم $c = 4$ و در نتیجه $|a| = 3$.

با توجه به تأثیری که منفی بودن هر کدام از a و b بر قرینه شدن نمودار تابع نسبت به محورهای x و y دارد، هر دوی a و b باید مثبت باشند لذا ضابطه تابع مورد نظر به صورت مقابل است:

$$y = 3 \sin(2x) + 4$$

(ب) با توجه به نمودار، ضابطه تابع مورد نظر می تواند به صورت $y = a \sin bx + c$ باشد و با توجه به مقادیر ماکزیمم و مینیمم و دوره تناوب از روی نمودار، $c = 0$ و $|a| = \frac{1}{3}$ و $|b| = 3$ به دست می آید که در آن علامت a منفی و b مثبت است.

$$y = -\frac{1}{3} \sin 3x$$

بنابراین داریم:

(پ) با توجه به شکل نمودار، ضابطه تابع مورد نظر می تواند به صورت $y = a \cos bx + c$ باشد و مقادیر ماکزیمم و مینیمم آن برابر ۵ و ۱ و طول دوره تناوب برابر 4π است. بنابراین $c = 3$ و $|b| = \frac{1}{4}$ و $|a| = 2$ لذا $a = 2$ و $b = \frac{1}{4}$ و بنابراین داریم

$$y = 2 \cos\left(\frac{x}{4}\right) + 3$$

(ت) ضابطه این نمودار نیز می تواند به صورت $y = a \cos bx + c$ باشد و $c = 0$ و $|a| = 2$ و $|b| = 1$ و a منفی و b مثبت است. بنابراین داریم:

$$y = -2 \cos x$$

تائزانت

فعالیت

در دایره مثلثاتی روبه‌رو خط TAT' در نقطه A بر محور کسینوس‌ها عمود است.

الف) زاویه α را در ربع اول دایره مثلثاتی در نظر می‌گیریم و پاره خط OM را امتداد می‌دهیم تا این خط را در نقطه M' قطع کند. نشان دهید:

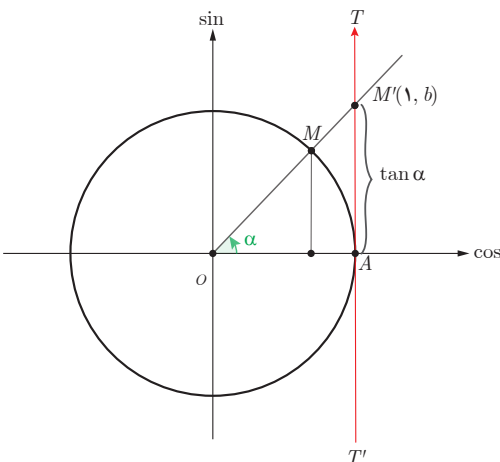
$$\tan \alpha = AM' = b$$

می‌توان دید که تائزانت هر زاویه دلخواه مانند α ، به همین ترتیب از برخورد امتداد ضلع دوم آن زاویه با خط TAT' تعیین می‌شود. بنابراین خط TAT' را محور تائزانت می‌نامیم. نقطه A مبدأ این محور است و جهت مثبت محور، از پایین به سمت بالا است.

(ب) چرا تائزانت زوایایی که انتهای کمان آنها در ربع اول و سوم قرار دارد مقداری مثبت و تائزانت زوایایی که انتهای کمان آنها در ربع

دوم و چهارم قرار دارد، مقداری منفی است؟

(پ) آیا مقدار $\tan \frac{\pi}{3}$ عددی حقیقی است؟ $\tan \frac{3\pi}{4}$ چطور؟ به کمک شکل، پاسخ خود را توجیه کنید.



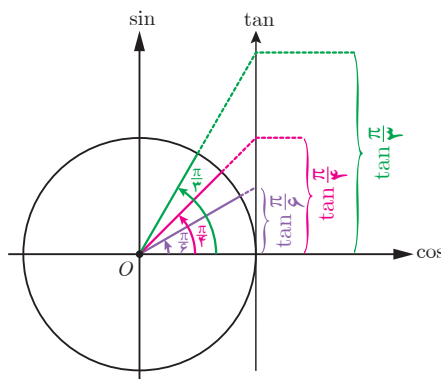
تغییرات تانژانت

فعالیت

با تغییر زاویه α مقادیر تانژانت آن نیز تغییر می‌کند. ابتدا این تغییرات را در ربع اول دایره مثلثاتی بررسی می‌کنیم. اگر $\alpha = 0^\circ$ ، مقدار $\tan \alpha$ نیز برابر صفر است و با افزایش اندازه α ، مقدار $\tan \alpha$ نیز افزایش می‌یابد.

الف) با افزایش مداوم مقادیر زاویه α در ربع اول و نزدیک شدن آن به $\frac{\pi}{2}$ ، مقادیر تانژانت تا چه حد افزایش می‌یابد؟

ب) توضیح دهید اگر عدد حقیقی و مثبت a را داشته باشیم، چگونه می‌توان زاویه‌ای مانند α یافت، به طوری که $\tan \alpha = a$.



کارد کلاسی

الف) با بررسی تغییرات مقادیر تانژانت در ربع‌های دوم، سوم و چهارم مشخص کنید روند این تغییر در هر ربع افزایشی است یا کاهش‌ی؟

ب) بازه تغییرات مقدار تانژانت را در هر ربع بنویسید.

ربع	دوم	سوم	چهارم
زوايا			
افزایشی یا کاهشی
بازه تغییرات

پ) جدول زیر را کامل کنید. (علامت \uparrow به معنی افزایش یافتن و علامت \downarrow به معنی کاهش یافتن است.)

ربع اول	ربع دوم	ربع سوم	ربع چهارم
$\circ \quad \frac{\pi}{6} \quad \frac{\pi}{4} \quad \frac{\pi}{3} \quad \frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3} \quad \frac{3\pi}{4} \quad \frac{5\pi}{6}$	$\pi \quad \frac{7\pi}{6} \quad \frac{5\pi}{4} \quad \frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2} \quad \frac{5\pi}{3} \quad \frac{7\pi}{4} \quad \frac{11\pi}{6} \quad 2\pi$
$\circ \quad \nearrow \frac{\sqrt{3}}{3} \quad \dots \quad \dots \quad \nearrow +\infty$	$\dots \quad -1 \quad \dots$	$\circ \quad \dots \quad \dots \quad \dots$	$\dots \quad \dots \quad \dots \quad \circ$

تابع تانژانت

همان طور که می بینیم به ازای هر زاویه دلخواه در دایره مثلثاتی (به جز $x = k\pi + \frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$), عددی حقیقی به عنوان $\tan \alpha$ داریم و تابعی با ضابطه $y = \tan \alpha$ مشخص می کند. دامنه این تابع مجموعه $D = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \right\}$ است و برد آن

مجموعه اعداد حقیقی است. به سادگی می توان دید تابع $y = \tan \alpha$, تابعی متناوب است^۱ و دوره تناوب آن π است، زیرا:

$$\tan(\pi + x) = \tan x$$

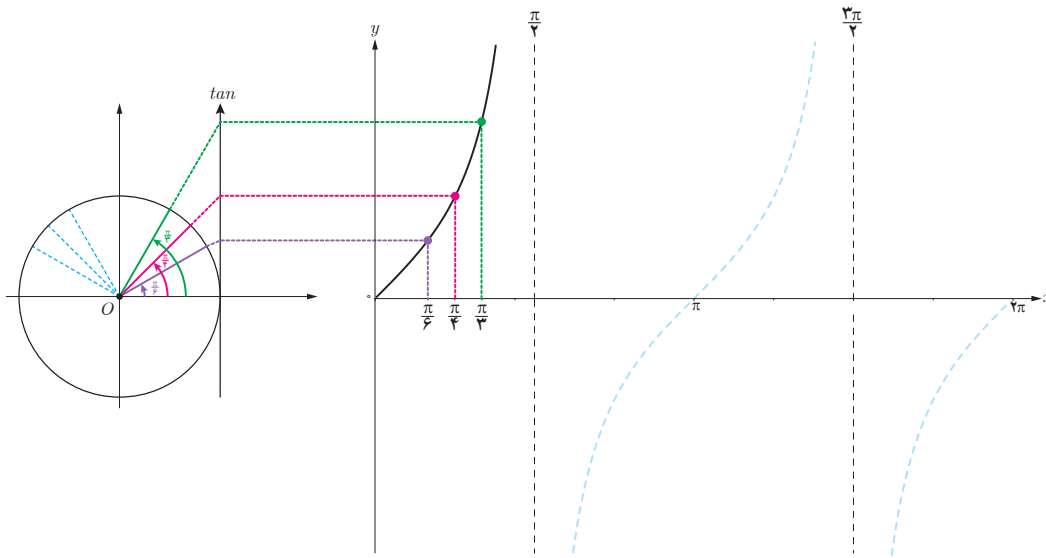
کارد کلاس

صعودی یا نزولی بودن تابع $y = \tan \alpha$ را در بازه $[0, 2\pi]$ بررسی کنید.

رسم تابع $y = \tan \alpha$

فعالیت

در شکل زیر نمودار تابع $y = \tan \alpha$ در ربع اول رسم شده است. مشابه آن، نمودار این تابع را در ربع های دیگر رسم کنید.



۱- به دست آوردن دوره تناوب توابع شامل \tan مدنظر نیست.

۱ دوره تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم هر یک از توابع زیر را به دست آورید.

الف) $y = 1 + 2 \sin 4x$

ب) $y = \sqrt{3} - \cos \frac{\pi}{4} x$

پ) $y = -\pi \sin \left(\frac{x}{4}\right) - 2$

ت) $y = -\frac{3}{4} \cos 3x$

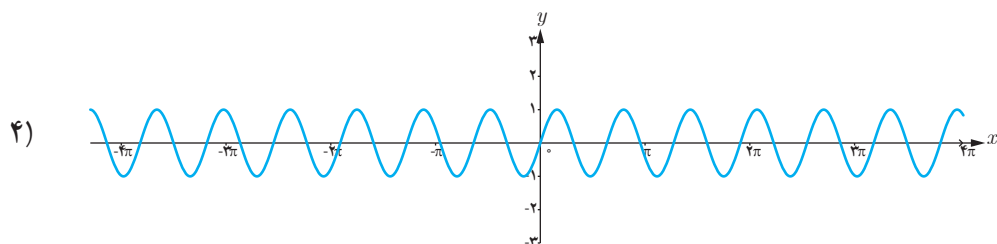
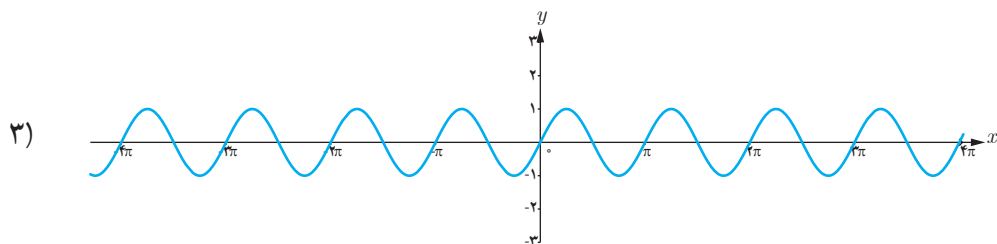
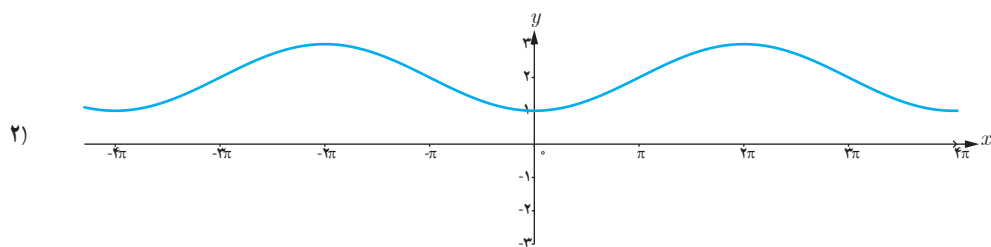
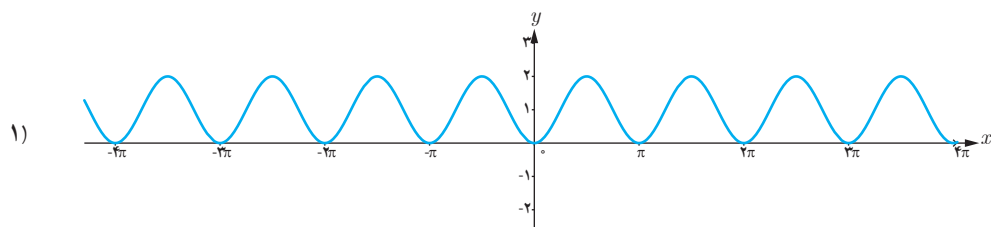
۲ هر یک از توابع داده شده را با نمودارهای زیر نظیر کنید.

ت) $y = 1 - \cos 2x$

پ) $y = \sin 2x$

ب) $y = 2 - \cos \frac{1}{4} x$

الف) $y = \sin \pi x$



۳ در هر مورد ضابطه تابعی مثلثاتی با دوره تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم داده شده بنویسید.

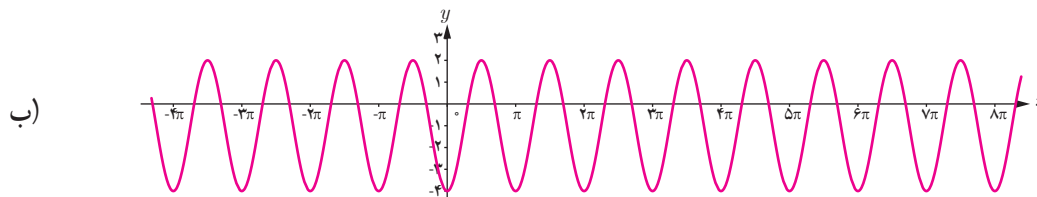
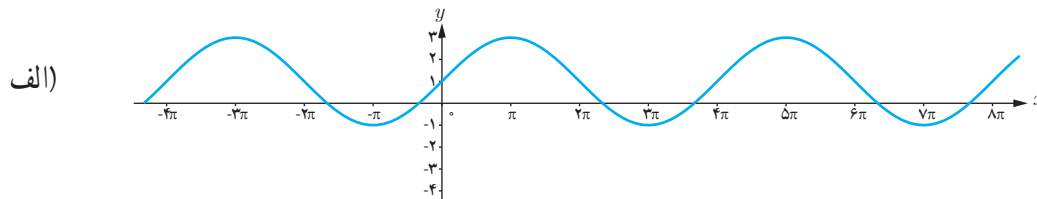
الف) $T = \pi$, $\max = 3$, $\min = -3$

ب) $T = 3$, $\max = 9$, $\min = 3$

پ) $T = 4\pi$, $\max = -1$, $\min = -7$

ت) $T = \frac{\pi}{4}$, $\max = 1$, $\min = -1$

۴ ضابطه مربوط به هر یک از نمودارهای داده شده را بنویسید.



۵ کدام یک از جملات زیر درست و کدام یک نادرست است؟

الف) تابع تانژانت در دامنه اش صعودی است.

ب) می توان بازه ای یافت که تابع تانژانت در آن نزولی باشد.

پ) می توان بازه ای یافت که تابع تانژانت در آن غیرصعودی باشد.

ت) تابع تانژانت در هر بازه که در آن تعریف شده باشد، صعودی است.

۶ با توجه به محورهای سینوس و تانژانت، در موارد زیر مقادیر $\sin \alpha$ و $\tan \alpha$ را با هم مقایسه کنید :

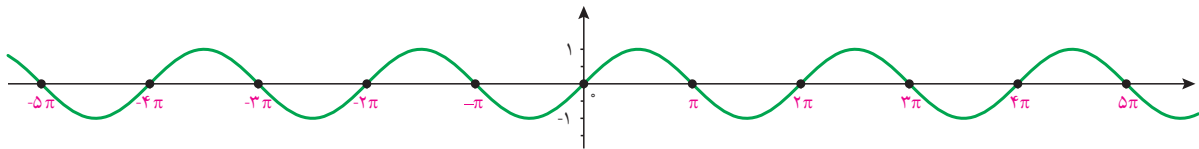
ب) $\frac{3\pi}{4} < \alpha < 2\pi$

الف) $0 < \alpha < \frac{\pi}{4}$

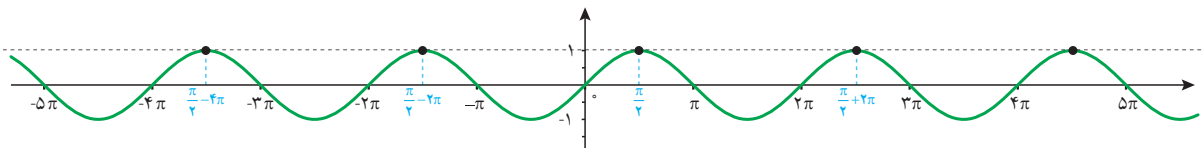
معادلات مثلثاتی

معادلات مثلثاتی

معادله‌ای که در آن اطلاعاتی از نسبت‌های مثلثاتی یک زاویه مجهول داریم، یک معادله مثلثاتی نام دارد.
مثال: تابع مثلثاتی $y = \sin x$ را که نمودار آن در زیر رسم شده است در نظر بگیرید.



همان‌طور که از نمودار پیداست، صفرهای این تابع جواب‌های معادله مثلثاتی $\sin x = 0$ می‌باشد. به عبارت دیگر جواب‌های این معادله که به صورت $\dots, 3\pi, 2\pi, \pi, 0, -\pi, -2\pi, -3\pi, \dots$ می‌باشند، محل تقاطع تابع ثابت $y = 0$ (یعنی محور x ها) و تابع $y = \sin x$ است.
 این جواب‌ها را می‌توان به صورت کلی $x = k\pi$ که k یک عدد صحیح است نمایش داد.
 به‌طور مشابه جواب‌های معادله $\sin x = 1$ مقداری از x هستند که به ازای آنها مقدار $\sin x$ برابر ۱ می‌شود.
 این مقادیر محل تقاطع $y = \sin x$ و $y = 1$ است که در نمودار زیر رسم شده‌اند.



جواب‌های این معادله به صورت

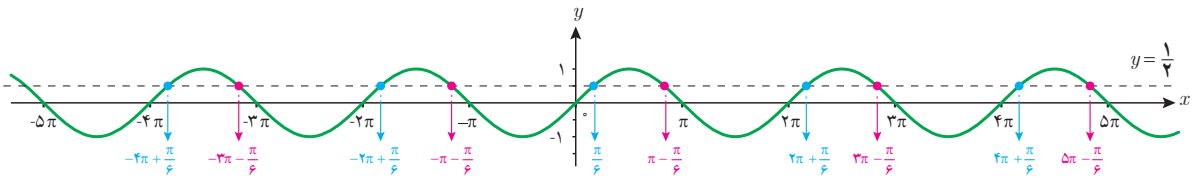
$$x = \dots, \frac{\pi}{2} - 4\pi, \frac{\pi}{2} - 2\pi, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} + 2\pi, \dots$$

می‌باشند که به صورت کلی $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ قابل نمایش است.

اکنون معادله $\sin x = \frac{1}{2}$ را در نظر می‌گیریم. فعالیت بعد به شما کمک می‌کند تا جواب‌های این معادله را بیابید.

۱ چند زاویه را که مقدار سینوس آنها برابر $\frac{1}{4}$ است مثال بزنید.

۲ خط $y = \frac{1}{4}$ و نمودار $y = \sin x$ را در زیر رسم کرده‌ایم. مقادیری را که مثال زده‌اید روی نمودار پیدا کنید. این مقادیر متناظر با چه نقاطی از شکل زیر می‌باشند؟ آیا مقادیری که پیدا کرده‌اید در بین نقاط نمایش داده شده در زیر هستند؟

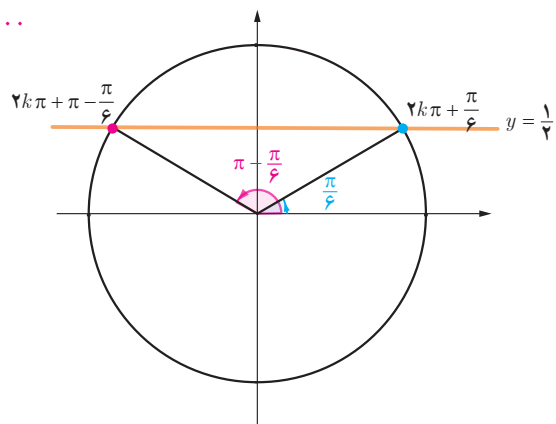


۳ طول تعدادی از نقاط تقاطع دو نمودار $y = \sin x$ و $y = \frac{1}{4}$ را که در شکل فوق مشخص شده‌اند، در معادله $\sin x = \frac{1}{4}$ جایگذاری کنید. آیا در معادله صدق می‌کنند؟ چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

۴ در دایره مثلثاتی زیر خط $y = \frac{1}{4}$ و زوایای $\frac{\pi}{6}$ و $\pi - \frac{\pi}{6}$ که سینوس آنها برابر $\frac{1}{4}$ است رسم شده‌اند. کدام دسته از زوایای مشخص شده بر روی نمودار سؤال قبل هم انتها با زاویه $\frac{\pi}{6}$ و کدام دسته هم انتها با زاویه $\pi - \frac{\pi}{6}$ هستند؟ آنها را در جاهای خالی زیر مرتب کنید. آیا می‌توانید دو دسته زیر را از دو طرف ادامه دهید؟

هم انتها با $\frac{\pi}{6}$: $\dots, 2\pi + \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}, -2\pi + \frac{\pi}{6}, \dots$

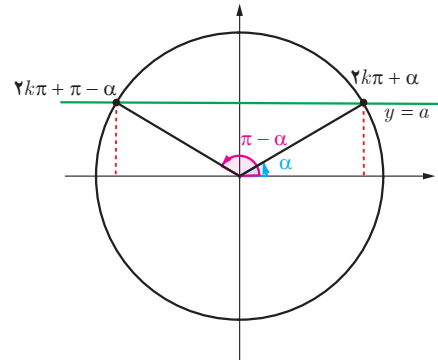
هم انتها با $\pi - \frac{\pi}{6}$: $\dots, 3\pi - \frac{\pi}{6}, \pi - \frac{\pi}{6}, -\pi - \frac{\pi}{6}, \dots$



برای عدد حقیقی $-1 \leq a \leq 1$ که $\sin x = a$ ، زاویه‌ای مانند α وجود دارد که برای آن داریم $\sin \alpha = a$. بنابراین معادله $\sin x = a$ به صورت $\sin x = \sin \alpha$ بازنویسی می‌شود. اکنون برای یافتن جواب‌های معادله $\sin x = \sin \alpha$ باید رابطه بین کمان‌های x و α را بیابیم.

با توجه به دایره مثلثاتی زیر رابطه بین کمان معلوم α و کمان‌های مجهول x به طوری که $\sin x = \sin \alpha$ در دوران‌های مختلف به صورت زیر است:

$$\sin x = \sin \alpha \Rightarrow x = 2k\pi + \alpha \quad \text{و} \quad x = (2k+1)\pi - \alpha, \quad k \in \mathbb{Z}$$



جواب‌های کلی معادله $\sin x = \sin \alpha$ به صورت $x = 2k\pi + \alpha$ و $x = (2k+1)\pi - \alpha$ می‌باشد که $k \in \mathbb{Z}$.

❖ مثال: معادله $\sin x = -\frac{1}{2}$ را حل کنید.

$$\sin x = -\frac{1}{2}$$

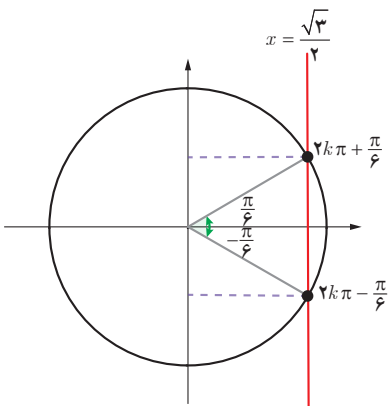
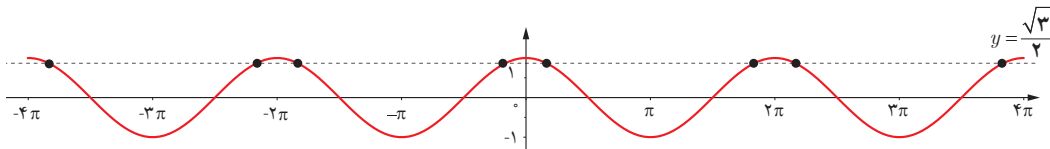
$$\sin x = \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$$

$$\begin{cases} x = 2k\pi - \frac{\pi}{6}, & k \in \mathbb{Z} \\ x = 2k\pi + \frac{5\pi}{6}, & k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

الف) $2\sin x - \sqrt{3} = 0$

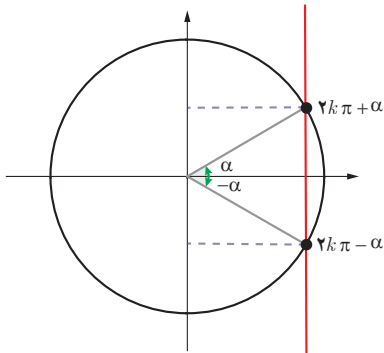
ب) $4\sin x + \sqrt{8} = 0$

نمودار تابع $y = \cos x$ و خط $y = \frac{\sqrt{3}}{2}$ در زیر رسم شده‌اند. مشابه فعالیت قبل به سؤالات زیر پاسخ دهید تا جواب‌های معادله $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ را بیابید.



الف) برخی از جواب‌های معادله $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ را با توجه به نقاط تقاطع دو نمودار پیدا کنید.

ب) با استفاده از دایره مثلثاتی روبه‌رو و محل تقاطع خط $x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ با دایره مثلثاتی، جواب‌های معادله فوق را به دست آورید.
برای هر عدد حقیقی $-1 \leq a \leq 1$ در معادله $\cos x = a$ زاویه‌ای چون α وجود دارد که $\cos \alpha = a$.



بنابراین برای حل معادله فوق کافی است ابتدا آن را به صورت $\cos x = \cos \alpha$ نوشته و سپس رابطه بین زوایای x و α را با توجه به دایره مثلثاتی روبه‌رو به صورت زیر به دست آوریم.

$$\cos x = \cos \alpha \Rightarrow x = 2k\pi + \alpha \quad \text{و} \quad x = 2k\pi - \alpha, \quad k \in \mathbb{Z}$$

جواب‌های کلی معادله $\cos x = \cos \alpha$ به صورت $x = 2k\pi \pm \alpha$ می‌باشند که $k \in \mathbb{Z}$.

❖ **مثال:** جواب‌های معادله $\cos x = \frac{1}{\sqrt{3}}$ را به دست آورید. کدام جواب‌ها در بازه $[-3\pi, \pi]$ می‌باشند؟

می‌دانیم $\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ پس معادله به صورت $\cos x = \cos \frac{\pi}{3}$ می‌باشد. بنابراین جواب‌های کلی معادله به صورت زیر هستند:

$$x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

اکنون با جایگذاری مقادیر صحیح به جای k در عبارت فوق نتیجه می‌شود که جواب‌های $x = -2\pi - \frac{\pi}{3}, -2\pi + \frac{\pi}{3}, -\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}$

از معادله فوق در بازه داده شده می‌باشند.

❖ **مثال:** معادله $\sin 2x = \sin 3x$ را حل کنید.

می‌دانیم که جواب‌های این معادله به شکل زیر هستند:

$$\begin{cases} 2x = 2k\pi + 3x \Rightarrow x = 2k\pi, & k \in \mathbb{Z} \\ 2x = (2k+1)\pi - 3x \Rightarrow x = \frac{(2k+1)\pi}{5}, & k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

❖ **مثال:** معادله $2\sin 3x - \sqrt{2} = 0$ را حل کنید.

$$2\sin 3x - \sqrt{2} = 0$$

$$2\sin 3x = \sqrt{2}$$

$$\sin 3x = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \sin 3x = \sin \frac{\pi}{4} \Rightarrow \begin{cases} 3x = 2k\pi + \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = \frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{12}, & k \in \mathbb{Z} \\ 3x = (2k+1)\pi - \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = \frac{(2k+1)\pi}{3} - \frac{\pi}{12}, & k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$



❖ **مثال:** یک بازیکن هندبال توپ را با سرعت

16 m/s برای هم‌تیمی خود که در $12/8$ متری او

قرار دارد پرتاب می‌کند. اگر رابطه بین سرعت توپ

v (بر حسب متر بر ثانیه)، مسافت طی شده افقی d (بر

حسب متر) و زاویه پرتاب θ به صورت زیر باشد، آنگاه

زاویه پرتاب توپ چقدر بوده است؟

$$d = \frac{v^2 \sin 2\theta}{g}$$

از رابطه داده شده به دست می‌آید :

$$12/8 = \frac{(16)^{\frac{1}{2}} \sin 2\theta}{1^{\circ}} \Rightarrow \sin 2\theta = \frac{12/8 \times 1^{\circ}}{256} \Rightarrow \sin 2\theta = \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} 2\theta = 2k\pi + \frac{\pi}{6} & , k \in \mathbb{Z} \\ 2\theta = (2k+1)\pi - \frac{\pi}{6} & , k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

با توجه به شکل، جواب قابل قبول $\theta = \frac{\pi}{12}$ می‌باشد.

❖ **مثال :** جواب‌های معادله $\sin x \cos x = \frac{\sqrt{3}}{4}$ را به دست آورید.

$$2 \sin x \cos x = 2 \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin 2x = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin 2x = \sin \frac{\pi}{3} \Rightarrow \begin{cases} 2x = 2k\pi + \frac{\pi}{3} \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{6} & , k \in \mathbb{Z} \\ 2x = (2k+1)\pi - \frac{\pi}{3} \Rightarrow x = \frac{(2k+1)\pi}{2} - \frac{\pi}{6} & , k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

❖ **مثال :** معادله $\cos x (2 \cos x - 9) = 5$ را حل کنید.

ابتدا این معادله را به صورت $2 \cos^2 x - 9 \cos x - 5 = 0$ می‌نویسیم. با تغییر متغیر $\cos x = t$ می‌توان معادله فوق را به معادله درجه دوم

$2t^2 - 9t - 5 = 0$ تبدیل کرد. جواب‌های این معادله $t = -\frac{1}{2}$ و $t = 5$ است. بنابراین جواب‌های معادله مثلثاتی بالا از حل

دو معادله ساده $\cos x = 5$ و $\cos x = -\frac{1}{2}$ به دست می‌آیند. از آنجا که $\cos x = 5$ جواب ندارد (چرا؟) فقط جواب‌های معادله

$\cos x = -\frac{1}{2}$ را به دست می‌آوریم.

$$\cos x = -\frac{1}{2} \Rightarrow \cos x = \cos \frac{2\pi}{3} \Rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$$

❖ **مثال :** معادله $\sin x + \cos x = 1$ را در بازه $0 \leq x \leq 2\pi$ حل کنید.

$$\sin x + \cos x = 1$$

$$\sin x = 1 - \cos x$$

$$\sin^2 x = (1 - \cos x)^2 \quad \text{طرفین را به توان ۲ می‌رسانیم.}$$

$$\sin^2 x = 1 - 2 \cos x + \cos^2 x \quad \text{استفاده از رابطه } \sin^2 x = 1 - \cos^2 x$$

$$1 - \cos^2 x = 1 - 2 \cos x + \cos^2 x$$

$$2 \cos^2 x - 2 \cos x = 0$$

$$2 \cos x (\cos x - 1) = 0 \Rightarrow 2 \cos x = 0 \text{ یا } \cos x - 1 = 0$$

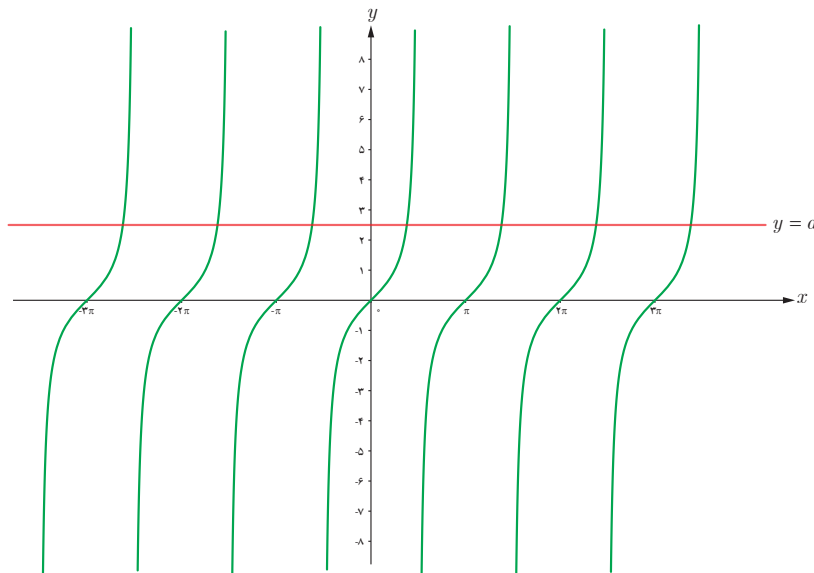
اکنون جواب‌های معادله‌های به‌دست آمده را در بازه $0 \leq x \leq 2\pi$ می‌یابیم:

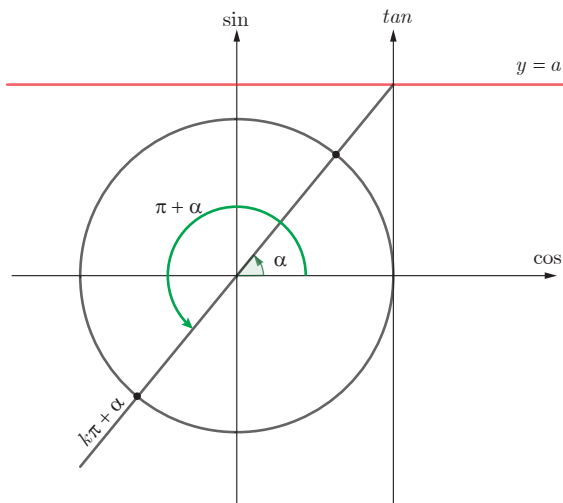
$$2 \cos x = 0 \Rightarrow \cos x = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$$

$$\cos x - 1 = 0 \Rightarrow \cos x = 1 \Rightarrow x = 0, 2\pi$$

از آنجا که در گام سوم از به‌توان رساندن استفاده کرده‌ایم باید جواب‌های به‌دست آمده فوق را در معادله گذاشته و درستی آنها را تحقیق کنیم (چرا؟). پس از بررسی معلوم می‌شود که $x = \frac{3\pi}{2}$ جواب معادله داده شده نیست و بنابراین غیرقابل قبول است اما $x = 0, \frac{\pi}{2}, 2\pi$ مقادیر به‌دست آمده جواب معادله در بازه داده شده هستند.

در شکل زیر نمودار تابع $y = \tan x$ و خط $y = a$ که یک عدد حقیقی است رسم شده‌اند. از روی نمودار این دو تابع می‌توان مشاهده کرد که جواب‌های معادله $\tan x = a$ همان طول نقاط تقاطع دو نمودار است. در واقع همواره برای عدد حقیقی a ، که $\tan x = a$ زاویه‌ای چون α وجود دارد که برای آن داریم $\tan \alpha = a$. بنابراین معادله $\tan x = a$ به‌صورت $\tan x = \tan \alpha$ بازنویسی می‌شود. اکنون برای یافتن جواب‌های معادله $\tan x = \tan \alpha$ باید رابطه بین زوایای x و a را بیابیم.





از دایره مثلثاتی و محور تانژانت در شکل مقابل می‌توان دریافت که رابطه بین زوایای x و a به صورت $x = k\pi + \alpha$ که k یک عدد صحیح، است می‌باشد.

در نمودار بالا اگر $a = 1$ باشد، داریم:

$$\tan x = 1 \Rightarrow \tan x = \tan \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{4} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

جواب‌های کلی معادله $\tan x = \tan \alpha$ به صورت $x = k\pi + \alpha$ می‌باشد که k یک عددی صحیح است.

❁ **مثال:** معادله $\tan x = \tan 5x$ را حل کنید.

$$x = k\pi + 5x \Rightarrow 4x = k\pi \rightarrow x = \frac{k\pi}{4} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

❁ **حل:**

از روابط مجموع و تفاضل زوایا برای نسبت‌های مثلثاتی سینوس و کسینوس می‌توان روابط مجموع و تفاضل زوایا را برای تانژانت به صورت زیر به دست آورد.

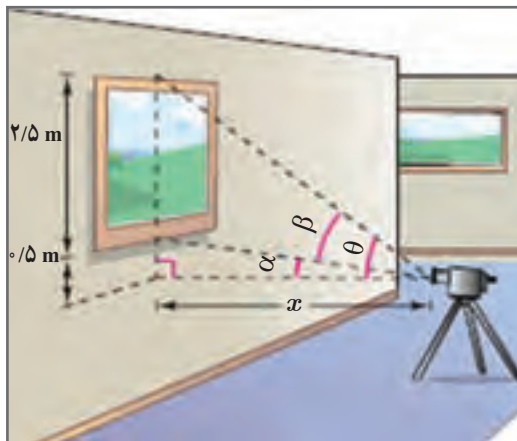
$$\begin{aligned} \tan(\alpha + \beta) &= \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha + \beta)} = \frac{\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta} \\ &= \frac{\frac{\sin \alpha \cos \beta}{\cos \alpha \cos \beta} + \frac{\cos \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta}}{\frac{\cos \alpha \cos \beta}{\cos \alpha \cos \beta} - \frac{\sin \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta}} = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta} \end{aligned}$$

همچنین با تغییر β به $-\beta$ در رابطه فوق رابطه تفاضل زوایا به صورت زیر به دست می‌آید.

$$\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta}$$

❖ **مثال:** نشان دهید در شکل زیر رابطه بین زاویه دید دوربین (β) با فاصله افقی آن با تابلو نقاشی به صورت زیر است.

$$\tan \beta = \frac{2/5 x}{x^2 + \frac{3}{2}}$$



سپس زاویه دید را در حالتی که فاصله افقی برابر یک متر است به دست آورید.

❖ **حل:** با توجه به شکل برای مثلث قائم الزاویه پایین شکل داریم:

$$\tan \alpha = \frac{2/5}{x}$$

همچنین برای مثلث بزرگ که یک زاویه آن θ است داریم:

$$\tan \theta = \frac{3}{x}$$

اکنون با استفاده از رابطه تفاضل زوایا برای تانژانت به دست می آید:

$$\tan \beta = \tan(\theta - \alpha) = \frac{\tan \theta - \tan \alpha}{1 + \tan \theta \tan \alpha} = \frac{\frac{3}{x} - \frac{2/5}{x}}{1 + \frac{3}{x} \times \frac{2/5}{x}} = \frac{\frac{3 - 2/5}{x}}{\frac{x^2 + 3}{x^2}} = \frac{2/5 x}{x^2 + \frac{3}{2}}$$

وقتی فاصله افقی برابر یک متر آنگاه داریم:

$$x = 1 \rightarrow \tan \beta = \frac{2/5 \times 1}{1^2 + \frac{3}{2}} = \frac{2/5}{2/5} = 1$$

از طرفی می دانیم که $\tan \frac{\pi}{4} = 1$ پس جواب های معادله $\tan \beta = 1$ به صورت زیر به دست می آیند:

$$\beta = k\pi + \frac{\pi}{4}$$

لیکن با توجه به شکل تنها جواب منطقی در حالت $k=0$ که مقدار $\beta = \frac{\pi}{4}$ را به دست می دهد قابل قبول می باشد.

۱ معادلات زیر را حل کنید.

الف) $\sin \frac{\pi}{4} = \sin 3x$

ب) $\cos^2 x - \cos x + 1 = 0$

پ) $\cos x = \cos 2x$

ت) $\cos^2 x - \sin x + 1 = 1$

ث) $\cos^2 x - \sin x = \frac{1}{4}$

ج) $\sin x - \cos^2 x = 0$

ح) $\tan(2x-1) = 0$

ح) $\tan 3x = \tan \pi x$

۲ مثلثی با مساحت ۳ سانتی متر مربع مفروض است. اگر اندازه دو ضلع آن به ترتیب ۲ و ۶ سانتی متر باشند، آنگاه چند مثلث با این خاصیت‌ها می‌توان ساخت؟

حدهای نامتناهی – حد در بی نهایت

۱. حدهای نامتناهی

۲. حد در بی نهایت

۳

فصل

آذربایجان غربی (ماکو)

بسیاری از پدیده‌های طبیعی به وسیله توابع ریاضی مدل‌سازی می‌شوند. در مسئله پاک‌سازی آب رودخانه‌ها، با تابع $f(x) = \frac{255x}{100-x}$ مدل‌سازی می‌شود. که در آن x درصد آلودگی و $f(x)$ هزینه پاک‌سازی برحسب میلیون تومان است. از آنجا که این تابع رفتار بی‌نهایت دارد برای پاک‌سازی نزدیک صد درصد آلودگی‌های آب، نیاز به هزینه بسیار زیاد خواهد بود. به طوری که می‌توان گفت هزینه‌ها به سمت بی‌نهایت میل می‌کند.

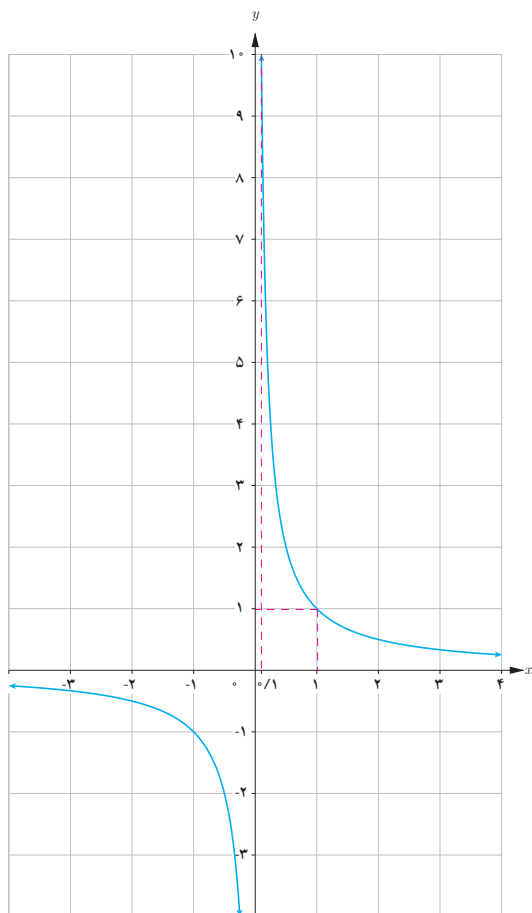
حدهای نامتناهی



درس

در سال قبل با حد یک تابع در یک نقطه آشنا شدیم. دیدیم که l حد تابع f در نقطه a است هرگاه بتوانیم مقادیر $f(x)$ را به دلخواه (هر قدر که بخواهیم) به l نزدیک کنیم به شرطی که x را به اندازه کافی به a (از دو طرف a) نزدیک کرده باشیم اما x برابر a نشده باشد در این درس با رفتار برخی دیگر از توابع در همسایگی محذوف یک نقطه آشنا می‌شویم.

فعالیت



در سال قبل با نمودار تابع گویای $f(x) = \frac{1}{x}$ آشنا شدیم می‌خواهیم رفتار این تابع را در همسایگی راست $x = 0$ بررسی کنیم.

۱ جدول زیر رفتار تابع را به ازای برخی از مقادیر x نشان می‌دهد آن را تکمیل کنید.

x	$0/1$	$0/01$	$0/001$	$0/0001$	$\dots \rightarrow$	0
$f(x)$	10	100	1000	\dots	$\dots \rightarrow$	تعریف نشده

۲ اگر بخواهیم $f(x)$ از یک میلیون بزرگ‌تر شود مقدار x از چه عددی باید کوچک‌تر شود؟

۳ وقتی x با مقادیر بزرگ‌تر از صفر به صفر نزدیک می‌شود آیا مقادیر تابع به عددی خاص نزدیک می‌شوند؟ چرا؟

با توجه به این فعالیت مشاهده می‌شود که وقتی x با مقادیر بزرگ‌تر از صفر به صفر نزدیک می‌شود مقادیر $f(x)$ بدون هیچ محدودیتی افزایش می‌یابد. به بیان دیگر می‌توان $f(x)$ را از هر عدد مثبت دلخواهی در نظر بگیریم بزرگ‌تر کرد به شرطی که x را

به اندازه کافی با مقادیر بزرگ‌تر از صفر، به صفر نزدیک کرد در این صورت می‌نویسیم: $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$.

❁ **تذکر:** این نماد نشان می‌دهد که حد فوق موجود نیست. چون مقدار تابع به عدد خاصی نزدیک نمی‌شود و مثبت بی نهایت فقط یک نماد است که نمایش می‌دهد مقدار تابع از هر عدد مثبتی می‌تواند بزرگ‌تر باشد.

کاردر کلاس

برای تابع $f(x) = \frac{1}{x}$

الف) جدول زیر را کامل کنید:

x	$-\frac{1}{2}$	$-0/2$	$-0/1$	$-0/001$	$-0/0001$	$-0/00001$	$\dots \rightarrow$	0
$f(x)$				-1000			$\dots \rightarrow$	تعریف نشده

ب) اگر بخواهیم مقدار $f(x)$ از -10^6 کوچک‌تر شود x باید چگونه انتخاب شود؟

پ) وقتی x از سمت چپ به صفر نزدیک شود $f(x)$ چه تغییری می‌کند؟

ت) در مورد $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x}$ چه می‌توان گفت؟

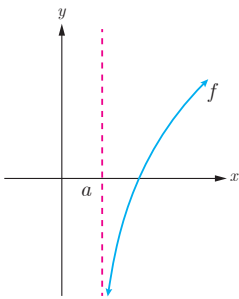
با توجه به آنچه در فعالیت و کار در کلاس صفحه قبل مشاهده شد تعریف زیر را می توان ارائه داد.

تعریف حدهای یک طرفه نامتناهی

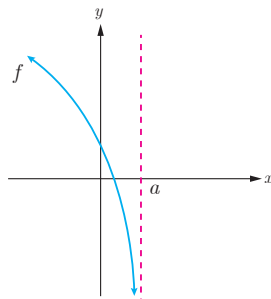
فرض کنیم تابع f در یک همسایگی راست نقطه ای مانند a تعریف شده باشد در این صورت $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty$ بدین معنی است که می توانیم $f(x)$ را به دلخواه هر قدر بخواهیم از هر عدد مثبتی بزرگ تر کنیم به شرطی که x را از سمت راست به اندازه کافی به a نزدیک کرده باشیم.

همچنین فرض کنیم تابع f در یک همسایگی چپ نقطه ای مانند a تعریف شده باشد در این صورت $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = +\infty$ بدین معنی است که می توانیم $f(x)$ را به دلخواه هر قدر بخواهیم از هر عدد مثبتی بزرگ تر کنیم به شرطی که x را از سمت چپ به اندازه کافی به a نزدیک کرده باشیم.

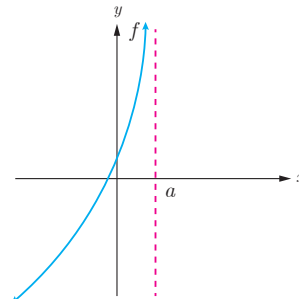
❁ **تذکر:** تعریف حدهای یک طرفه نامتناهی $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty$ و $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty$ نیز مشابه تعاریف فوق است. توصیف حالت های مختلف حدهای یک طرفه نامتناهی در شکل های زیر آمده است.



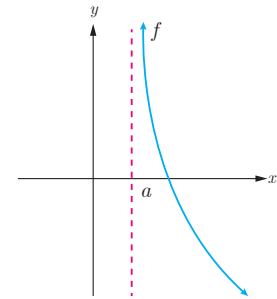
$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty$$



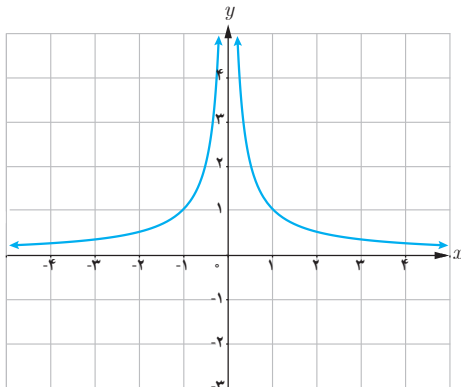
$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty$$



$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = +\infty$$



$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty$$



❁ **مثال:** نمودار تابع $f(x) = \frac{1}{|x|}$ در شکل روبه رو رسم شده

است می خواهیم رفتار تابع f را در همسایگی محذوف نقطه $x = 0$ بررسی کنیم به جدول صفحه بعد توجه کنید:

x	$-0/5$	$-0/1$	$-/0/1$	$-/0/0/1$	$000 \rightarrow$	0	$\leftarrow 000$	$0/00/1$	$0/0/1$	$0/1$	$0/5$
$f(x)$					$000 \rightarrow$	تعریف نشده	$\leftarrow 000$				

مشاهده می شود با نزدیک کردن x به اندازه کافی به صفر، مقدارهای $f(x)$ را می توان به دلخواه بزرگ کرد بنابراین $f(x)$ از هر عدد دلخواهی بزرگ تر می شود و در نتیجه مقدار حد تابع یک عدد خاصی نمی شود و حد متناهی ندارد. در اینجا می نویسیم

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{|x|} = +\infty$$

تعریف :

فرض کنید تابع f در همسایگی محذوف a تعریف شده باشد در این صورت $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ یعنی اینکه می توانیم $f(x)$ را به میزان دلخواه از هر عدد مثبت بزرگ تر کنیم به شرطی که x را به اندازه کافی به a نزدیک کرده باشیم.

تعریف مشابهی از حد در مورد تابع هایی که وقتی x به a نزدیک می شود و مقدار تابع خیلی کوچک تر می شود در زیر وجود دارد.

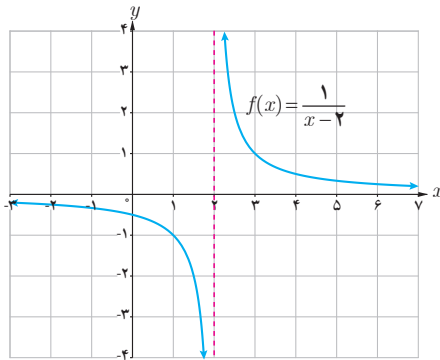
تعریف :

فرض کنید تابع f در همسایگی محذوف a تعریف شده باشد در این صورت $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$ یعنی اینکه می توانیم مقدارهای $f(x)$ را به میزان دلخواه از هر عدد منفی کوچک تر کنیم به شرطی که x را به اندازه کافی به a نزدیک کرده باشیم.

❖ **مثال :** برای حد تابع $f(x) = \frac{1}{x}$ در نقطه $x = 0$ می توان گفت : $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty$.

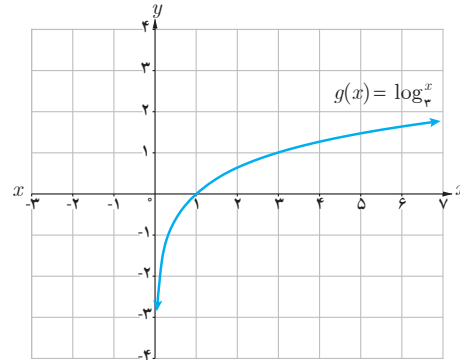
❖ **مثال :** در مورد حد تابع $f(x) = \frac{1}{|x|}$ در نقطه $x = 0$ می توان گفت : $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{|x|} = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{|x|} = +\infty$.

نمودار توابع f, g, h در شکل‌های زیر داده شده‌اند با توجه به آنها حدود خواسته شده را در صورت وجود به دست آورید.

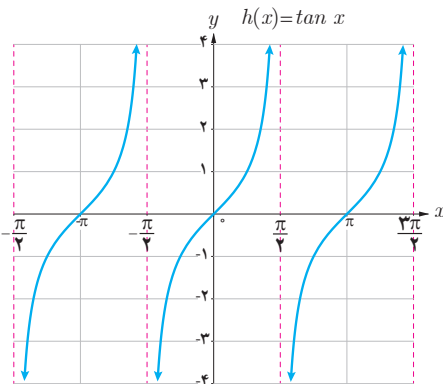


$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \dots$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \dots$$



$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \dots$$



$$\lim_{x \rightarrow (-\frac{\pi}{2})^+} h(x) = \dots$$

$$\lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2})^-} h(x) = \dots$$

$$\lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2})^+} h(x) = \dots$$

خواندنی

بی‌نهایت مفهومی انتزاعی است که در رشته‌های مختلف ریاضیات با تغییرات مختلف به کار می‌رود و معمولاً به معنای «فراتر از هر مقدار» است و برای توصیف مقادیر بیش از هر عدد به کار می‌رود و نشانه آن در ریاضیات ∞ می‌باشد.

این نماد به صورت چیزی است که محدود نیست و در آن هیچ محدودیت فضایی و زمانی وجود ندارد. در حسابان بی‌نهایت به معنای حدی بی‌کران است $x \rightarrow \infty$ یعنی متغیر x فراتر از هر مقدار در نظر گرفته شده رشد می‌کند.

بی‌نهایت دارای دو مفهوم فیزیکی و ریاضی است که کاملاً با یکدیگر متفاوت‌اند مفهوم فیزیکی بی‌نهایت دارای تعریف دقیقی نیست و در جاهای مختلف دارای تعاریف متفاوت است. به عنوان مثال می‌گوییم اگر جسم در کانون عدسی محدب قرار گیرد تصویر در بی‌نهایت تشکیل می‌شود. حال اگر دو عدسی با فواصل کانونی متفاوت در نظر بگیریم و اجسامی را روی کانون این دو عدسی قرار دهیم. طبق قاعده تصاویر هر دو در بی‌نهایت تشکیل می‌شود. اما تصویر این دو دقیقاً در یک نقطه تشکیل نمی‌شود. یعنی بی‌نهایت برای این دو عدسی متفاوت است اما مفهوم بی‌نهایت در ریاضیات کاملاً متفاوت با بی‌نهایت فیزیکی است در ریاضیات می‌گوییم «بی‌نهایت مقداری است که از هر مقدار دیگر بیشتر است» این مفهوم دقیقاً همان مفهومی است که در «حد در بی‌نهایت» در نظر گرفته می‌شود. به عنوان مثال در حد تابع می‌گوییم $x \rightarrow \infty$ یعنی اینکه x از هر عدد انتخاب شده‌ای بزرگ‌تر باشد.

برخی از قضایای حدهای بی نهایت^۱

❖ **قضیه ۱:** اگر n یک عدد طبیعی باشد؛ آن گاه:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^n} = +\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^n} = \begin{cases} +\infty & \text{عددی زوج باشد،} \\ -\infty & \text{عددی فرد باشد،} \end{cases}$$

❖ **مثال:** با توجه به قضیه فوق می توان نوشت:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^4} = +\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^4} = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^3} = -\infty$$

❖ **قضیه ۲:** الف) اگر $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = +\infty$ آن گاه $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ و برعکس.

ب) اگر $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty$ و $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty$ آن گاه $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$ و برعکس.

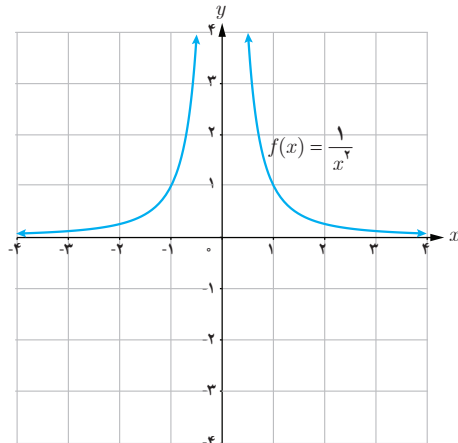
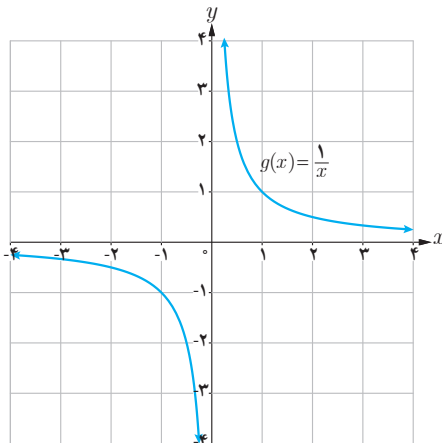
❖ **مثال:** $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2}{|x-1|} = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2}{|x-1|} = +\infty$ و در نتیجه $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2}{|x-1|} = +\infty$

کاردر کلاس

با استفاده از نمودار توابع داده شده و همچنین قضایای بالا حاصل حدود زیر را به دست آورید.

ب) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x}$

الف) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2}$



۱- ما در این کتاب به بیان برخی از قضایای حدهای بی نهایت پرداخته و آنها را اثبات نمی کنیم.

❁ **قضیه ۳:** اگر $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \neq 0$ و $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ آن گاه:

(الف) اگر $L > 0$ و مقادیر $g(x)$ در یک همسایگی محذوف a مثبت باشد، آن گاه $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty$

(ب) اگر $L < 0$ و مقادیر $g(x)$ در یک همسایگی محذوف a مثبت باشد، آن گاه $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = -\infty$

(پ) اگر $L > 0$ و مقادیر $g(x)$ در یک همسایگی محذوف a منفی باشد، آن گاه $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = -\infty$

(ت) اگر $L < 0$ و مقادیر $g(x)$ در یک همسایگی محذوف a منفی باشد، آن گاه $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty$

❁ **تذکر:** قضیه ۳ در حالتی که $x \rightarrow a^+$ یا $x \rightarrow a^-$ نیز برقرار است.

❁ **مثال:** هزینه پاک‌سازی x درصد از آلودگی‌های شهری و صنعتی از رودخانه‌ای به وسیله تابعی، با ضابطه $f(x) = \frac{255x}{100-x}$

محاسبه می‌شود که در آن x درصد آلودگی و $f(x)$ هزینه پاک‌سازی برحسب میلیون تومان است دامنه تابع $(0, 100)$ می‌باشد. مثلاً برای هزینه ۲۰ درصد از آلودگی‌های این رودخانه $63/75$ میلیون تومان لازم است.

برای پاک‌سازی ۹۵ درصد از آلودگی‌ها $f(95) = 4845$ و در نتیجه نزدیک به پنج میلیارد تومان برای این کار لازم است. با

توجه به قضیه فوق داریم: $\lim_{x \rightarrow 100^-} \frac{255x}{100-x} = +\infty$

و این بدان معنا است که با نزدیک شدن x به عدد 100 مقدار $f(x)$ از هر عدد مثبت از پیش تعیین شده‌ای بزرگ‌تر خواهد شد لذا نمی‌توان صد درصد آلودگی‌های رودخانه را پاک‌سازی کرد.

سد شهید عباسپور، اندیکا، خوزستان (عکاس: سیدمهدی حسینی)

❁ **مثال:** حاصل $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x+1}{4-x^2}$ را به دست آورید.

حل: از آنجا که $4 - x^2 = (2-x)(2+x)$ وقتی x در همسایگی چپ ۲، باشد. مخرج کسر با مقادیر مثبت به صفر میل می‌کند.

از طرفی $\lim_{x \rightarrow 2^-} x+1 = 3$ طبق بند (الف) قضیه فوق $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x+1}{4-x^2} = +\infty$

❖ **مثال:** حاصل $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x-1}{\sin x}$ را به دست آورید.

حل: وقتی x در همسایگی راست صفر باشد حد صورت کسر برابر -1 و حد مخرج کسر برابر صفر است و از آنجا که در

همسایگی راست صفر $\sin x$ مقداری مثبت است. در نتیجه طبق بند (ب) قضیه فوق $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x-1}{\sin x} = -\infty$

❖ **مثال:** حاصل $\lim_{x \rightarrow (-1)^-} \frac{x^2+x}{x^2+2x+1}$ را به دست آورید.

حل: از آنجا که حد فوق به صورت $\frac{0}{0}$ در می آید و چون $x \neq -1$ پس می توان صورت و مخرج کسر را بر $x+1$ تقسیم کرد. داریم:

$$\lim_{x \rightarrow (-1)^-} \frac{x^2+x}{x^2+2x+1} = \lim_{x \rightarrow (-1)^-} \frac{x(x+1)}{(x+1)^2} = \lim_{x \rightarrow (-1)^-} \frac{x}{x+1} = +\infty$$

کارد در کلاس

حدهای زیر را محاسبه کنید.

الف) $\lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{1-x}{x+2}$

ب) $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{[x]-2}{x-2}$

ب) $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2-1}{(x-1)^2}$

❖ **قضیه ۴:** اگر $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ و $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = +\infty$ (و یا $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = -\infty$) آنگاه $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$

❖ **تذکر:** قضیه فوق در حالتی که $x \rightarrow a^+$ یا $x \rightarrow a^-$ نیز برقرار است.

❖ **مثال:** حاصل $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{x+1}{\tan x}$ را به دست آورید.

حل: در یکی از کار در کلاس های قبل به صورت شهودی دیده شد که: $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}^+} \tan x = -\infty$ و $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}^-} \tan x = +\infty$ از طرفی

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{x+1}{\tan x} = 0 \text{ طبق قضیه فوق } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} (x+1) = \frac{\pi}{4} + 1$$

۱ توابع $f(x) = \frac{1}{x^2}$ و $g(x) = x + 1$ را در نظر بگیرید.

الف) حاصل $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$ را به دست آورید.

ب) تابع $f + g$ را به صورت یک تابع گویا بنویسید و حاصل $\lim_{x \rightarrow 0} ((f + g)(x))$ را محاسبه کنید.

پ) چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

۲ تابع $f \times g$ را به صورت یک تابع گویا بنویسید و حاصل $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) \times g(x)$ را محاسبه کنید و ارتباط آن را با $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$ بیان کنید.

همان‌طور در فعالیت فوق مشاهده کردید به‌طور کلی قضیه زیر را می‌توان بیان کرد.

❖ **قضیه ۵:** اگر $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = L$ آن‌گاه:

الف) $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x)) = +\infty$

ب) اگر $L > 0$ آن‌گاه $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \cdot g(x)) = +\infty$

پ) اگر $L < 0$ آن‌گاه $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \cdot g(x)) = -\infty$

❖ **تذکر:** قضیه فوق برای حالتی که $x \rightarrow a^+$ یا $x \rightarrow a^-$ نیز برقرار است.

❖ **مثال:** برای به دست آوردن حاصل $\lim_{x \rightarrow 0} (2x + 1 + \frac{1}{x^2})$ از آنجا که $\lim_{x \rightarrow 0} 2x + 1 = 1$ و $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$ با توجه به بند الف قضیه فوق حاصل حد برابر $+\infty$ می‌شود.

❖ **مثال:** حاصل $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x + \sin^2 x}{x^2}$ را به دست آورید.

حل: می‌توان نوشت $\frac{x + \sin^2 x}{x^2} = \frac{1}{x} + \frac{\sin^2 x}{x^2}$ از طرفی $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin^2 x}{x^2} = 1$ و $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$ و با توجه به بند الف قضیه فوق حاصل حد برابر $+\infty$ خواهد شد.

۱- این قضیه در حالت $l = 0$ در این کتاب بررسی نمی‌شود و در ارزشیابی‌ها رعایت این مسئله الزامی است. همچنین حالت $-\infty - \infty$ در این کتاب مورد بررسی قرار نمی‌گیرد.

۱ قضیه ۵، را در حالتی که $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$ بازنویسی کنید.

۲ حاصل حدود زیر را به دست آورید در هر مرحله مشخص کنید از کدام قضیه استفاده کرده‌اید.

الف) $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x+1}{x-1}$

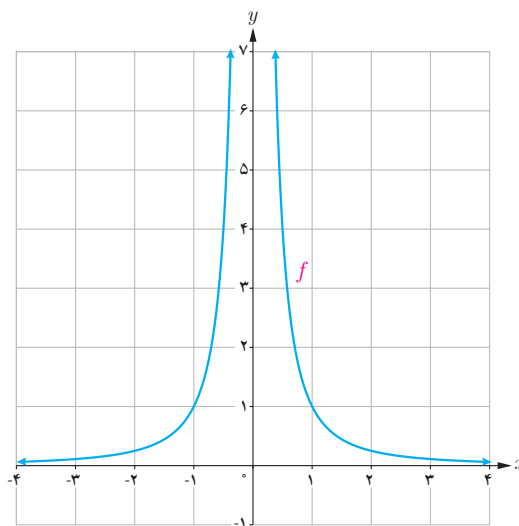
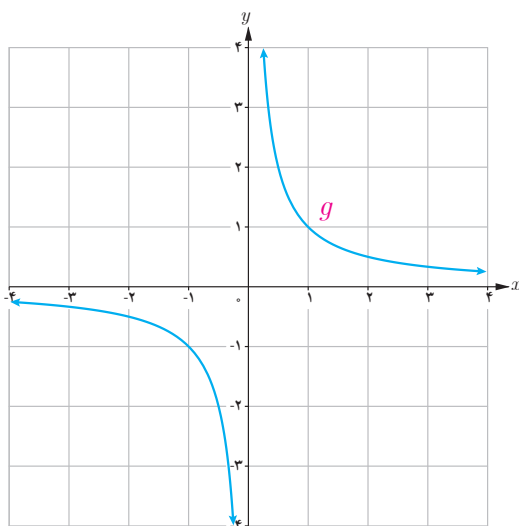
ب) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 + x}{x^2}$

پ) $\lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{x+2}{x^2 + 4x + 4}$

ت) $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2 - \cos 2x}{x}$

مجانبات قائم

به نمودارهای هر یک از توابع $f(x) = \frac{1}{x^2}$ و $g(x) = \frac{1}{x}$ در اطراف نقطه صفر توجه کنید.



$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = -\infty$ خط $x = 0$ را در هر دو منحنی، مجانبات قائم نمودار می‌گویند.

تعریف :

خط $x = a$ را مجانبات قائم نمودار تابع $f(x)$ گویند هرگاه حداقل یکی از شرایط زیر برقرار باشد.

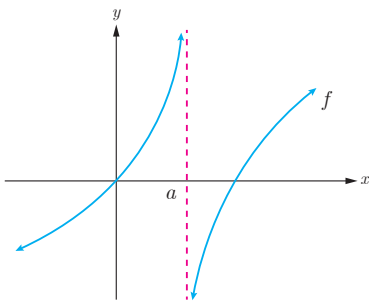
$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty$$

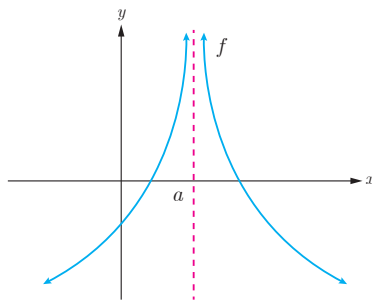
$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty$$

❁ مثال: در هر یک از شکل‌های زیر خط $x = a$ یک مجانب قائم منحنی داده شده است.



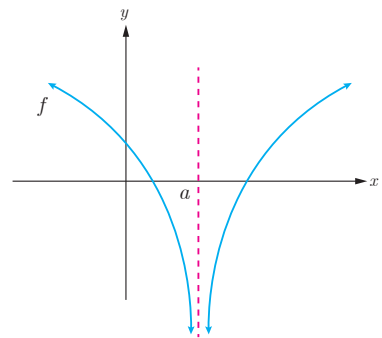
$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = +\infty$$



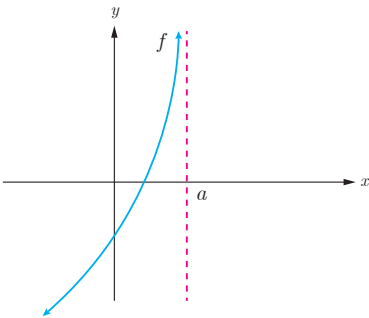
$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = +\infty$$

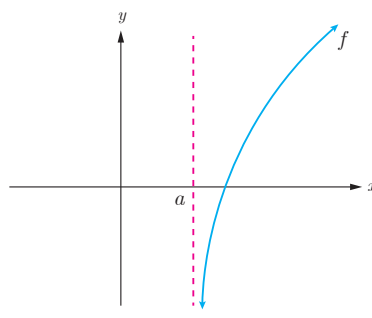


$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty$$



$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = +\infty$$



$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty$$

❁ مثال: کدام یک از خطوط $x = 3$ و $x = -1$ مجانب‌های قائم تابع $f(x) = \frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - 2x - 3}$ می‌باشند؟

حل: شرایط مجانب قائم را برای دو خط مذکور بررسی می‌کنیم.

$$\lim_{x \rightarrow (-1)^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-1)^-} \frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - 2x - 3} = -\infty$$

به علاوه از آنجا که $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = +\infty$ می‌توانستیم بگوییم $x = -1$ نیز مجانب قائم منحنی تابع f است از طرفی

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - 2x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(x-1)}{(x-3)(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-1}{x+1} = \frac{1}{2}$$

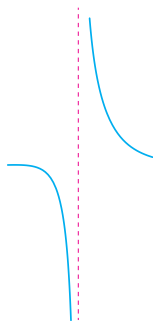
خط $x = 3$ شرایط مجانب قائم را ندارد. لذا منحنی تابع f فقط یک مجانب قائم به صورت $x = -1$ دارد.

❖ **مثال:** نمودار تابع با ضابطه $f(x) = \frac{x+1}{x^3+x}$ در نزدیکی مجانب قائم آن به چه صورتی می باشد؟

$$f(x) = \frac{x+1}{x(x^2+1)}$$

حل:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty$$



پس خط $x = 0$ مجانب قائم منحنی تابع است و در مجاورت این خط نمودار تابع به صورت روبه رو خواهد بود.

کارد کلاس

مجانب های قائم تابع $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - x - 6}$ را در صورت وجود به دست آورید.

۱ با استفاده از قضایای حدهای نامتناهی درستی حدهای زیر را نشان دهید.

الف) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{3+x^2}}{x^2} = +\infty$

پ) $\lim_{x \rightarrow -2} \left| \frac{5-x}{2+x} \right| = +\infty$

ب) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{(x-2)^4} = +\infty$

۲ حدهای زیر را محاسبه کنید.

الف) $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{2x}{x^2-4}$

ب) $\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x^2+2x-1}{x^2+x-12}$

پ) $\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x+1}{9-x^2}$

۳ نمودار تابعی را رسم کنید که دامنه آن $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$ بوده و دارای دو مجانب قائم باشد.

۴ نمودار تابعی را رسم کنید که دامنه آن $\{1\} - [-2, 2]$ بوده و دارای مجانب قائم باشد.

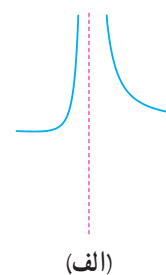
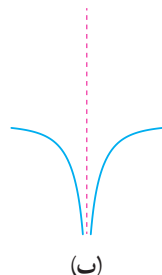
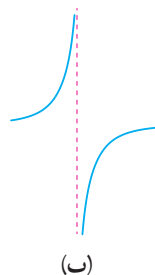
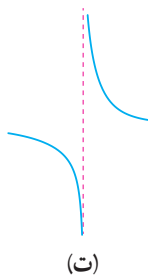
۵ مجانب‌های قائم توابع زیر را در صورت وجود به دست آورید.

الف) $f(x) = \frac{2x-1}{3-x}$

ب) $g(x) = \frac{x^2+x}{x^2-x}$

۶ نمودار تابع $f(x) = \frac{1}{x-|x|}$ در مجاورت مجانب قائم خود چگونه است؟

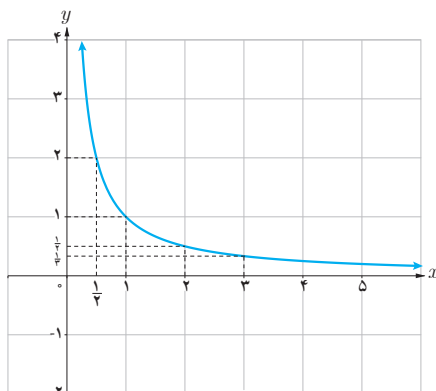
۷ کدام شکل زیر وضعیت نمودار تابع $f(x) = \frac{x}{x^2-2x+1}$ را در همسایگی $x=1$ نمایش می‌دهد؟ چرا؟



حد در بی نهایت

در درس قبل حدهای نامتناهی و مجانب‌های قائم یک منحنی را بررسی کردیم در آنجا مشاهده کردیم که با نزدیک شدن x به چه عددی $f(x)$ به دلخواه بزرگ تر می‌شود.
در این درس بررسی می‌کنیم که با دلخواه بزرگ شدن (نزدیک شدن) x مقادیر $f(x)$ چه تغییری می‌کند؟ این مطلب در رسم نمودارها و برای بررسی رفتار شاخه‌های نمودار تابع بسیار مفید است.

فعالیت



نمودار تابع $f(x) = \frac{1}{x}$ را در بازه $(0, +\infty)$ در نظر بگیرید.

۱ جدول زیر را کامل کنید.

x	۱	۲	۵	۱۰	۱۰۰	۱۰۲	۱۰۵	۱۰۶
$f(x)$	۱	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{5}$

۲ اگر بخواهیم فاصله $f(x)$ تا محور x ها از $\frac{1}{5}$ کمتر شود x را باید حداقل از چه عددی بزرگ تر بگیریم؟

۳ اگر بخواهیم فاصله $f(x)$ تا محور x ها از $\frac{1}{10}$ کمتر شود x را باید حداقل از چه عددی بزرگ تر در نظر بگیریم؟

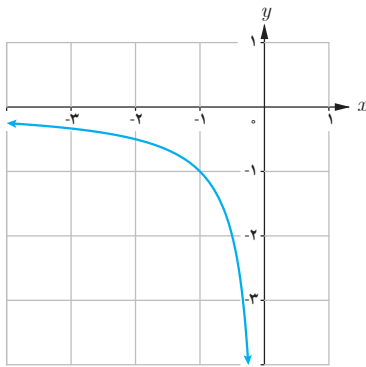
۴ اگر بخواهیم فاصله $f(x)$ تا محور x ها از $\frac{1}{10}$ کوچک تر شود x را باید حداقل از چه عددی بزرگ تر در نظر بگیریم؟

۵ آیا فاصله $f(x)$ تا محور x ها را می توان به هر میزان دلخواه کاهش داد؟

با توجه به نمودار تابع $f(x) = \frac{1}{x}$ و جدول صفحه قبل می توان مشاهده کرد در صورتی که x به اندازه کافی بزرگ اختیار شود می توان $f(x)$ را به اندازه دلخواه به صفر نزدیک کرد. در این صورت می گوئیم حد $f(x)$ وقتی x به سمت مثبت بی نهایت میل کند

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0 \text{ . برابر صفر است و می نویسیم .}$$

کارد کلاس



نمودار تابع $f(x) = \frac{1}{x}$ را در بازه $(-\infty, 0)$ در نظر بگیرید.

۱ جدول زیر را کامل کنید.

x	-۱	-۲	-۵	-۱۰	-۱۰۰	-۱۰۰۰	-۱۰۰۰۰	...
$f(x)$...

۲ اگر بخواهیم فاصله $f(x)$ از محور x ها کمتر از $\frac{1}{10}$ شود، x را باید از چه عددی کوچک تر در نظر بگیریم؟

۳ اگر بخواهیم فاصله $f(x)$ تا محور x ها از $\frac{1}{100}$ کمتر شود x را باید از چه عددی کوچک تر در نظر بگیریم؟

با توجه به نمودار تابع $f(x) = \frac{1}{x}$ و جدول بالا می توان مشاهده کرد اگر x به اندازه کافی کوچک تر (یعنی از هر عدد منفی

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0 \text{ : کوچک تر) شود آن گاه } f(x) \text{ را می توان به اندازه دلخواه به صفر نزدیک کرد. در این صورت می نویسیم :}$$

❖ **تذکر:** منظور از $x \rightarrow \pm\infty$ آن است که $x \rightarrow +\infty$ یا $x \rightarrow -\infty$ لذا با توجه به فعالیت و کار در کلاس صفحه قبل به طور خلاصه می توان نوشت:

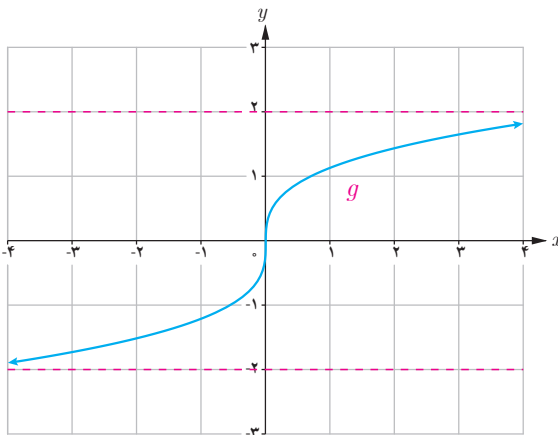
$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x} = 0$$

تعریف:

- اگر تابع $f(x)$ در بازه ای مانند $(a, +\infty)$ تعریف شده باشد گوییم حد $f(x)$ وقتی x به سمت مثبت بی نهایت میل می کند برابر l است و می نویسیم $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$ هرگاه بتوان با اختیار x های به قدر کافی بزرگ، فاصله $f(x)$ از l را به هر اندازه کوچک کرد.
- اگر تابع f در بازه $(-\infty, a)$ تعریف شده باشد. می گوییم حد $f(x)$ وقتی x به سمت منفی بی نهایت میل می کند برابر l است و می نویسیم $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = l$ هرگاه بتوان با اختیار x های به قدر کافی کوچک فاصله $f(x)$ را از l به هر اندازه کوچک کرد.

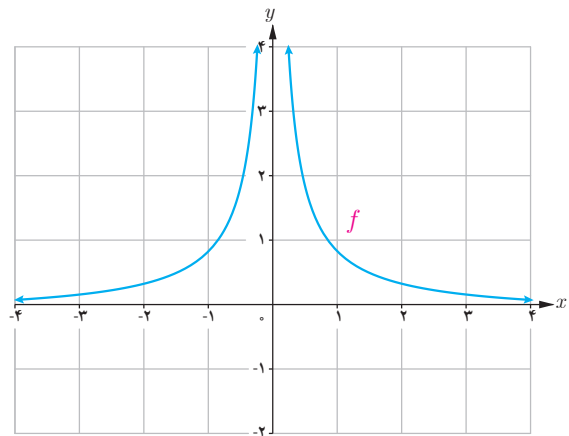
کاردر کلاس

با استفاده از نمودارهای f و g حدهای زیر را به دست آورید.



$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$$



$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$$

❖ **قضیه ۶:** اگر a عددی حقیقی و n عددی طبیعی باشد آنگاه:

$$\text{الف) } \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{a}{x^n} = 0$$

❖ **مثال:** حاصل هر یک از حدود $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\sqrt{2}}{x^2}$ و $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-5}{2x^3}$ برابر صفر است.

❖ **قضیه ۷:** اگر L_1 و L_2 اعداد حقیقی و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L_1$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = L_2$ آنگاه:

$$\text{الف) } \lim_{x \rightarrow +\infty} (f \pm g)(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = L_1 \pm L_2$$

$$\text{ب) } \lim_{x \rightarrow +\infty} (f \cdot g)(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = L_1 L_2$$

$$\text{پ) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)}{\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)} = \frac{L_1}{L_2} \quad (\text{با فرض } L_2 \neq 0)$$

❖ **تذکر:** قضیه فوق وقتی x به سمت $-\infty$ میل می کند نیز برقرار است.

❖ **مثال:** حدود زیر را محاسبه کنید.

$$\text{الف) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(3 + \frac{5}{x^3} \right)$$

$$\text{ب) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2 + \frac{3}{x^2}}{\frac{5}{x} + 4}$$

حل:

الف) با استفاده از قسمت الف قضیه ۷ و سپس استفاده از قضیه ۶ می توان نوشت:

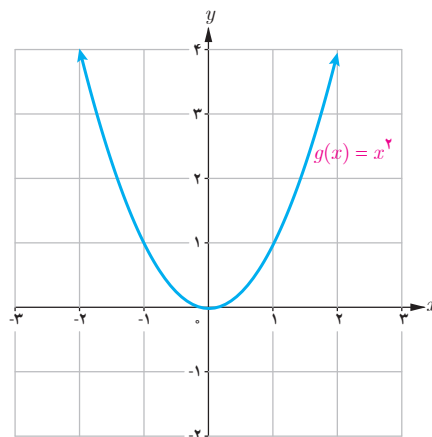
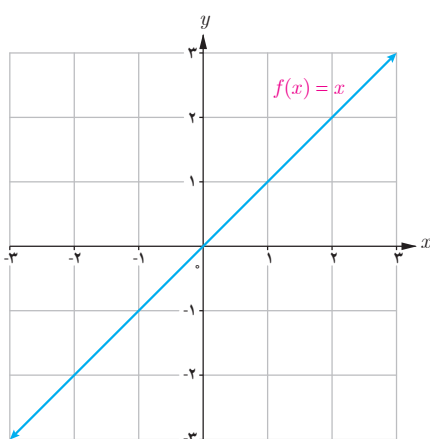
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(3 + \frac{5}{x^3} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 3 + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5}{x^3} = 3 + 0 = 3$$

ب) با استفاده از قسمت (پ) قضیه ۷ و سپس استفاده از قضیه ۶ می توان نوشت:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2 + \frac{3}{x^2}}{\frac{5}{x} + 4} = \frac{\lim_{x \rightarrow -\infty} 2 + \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3}{x^2}}{\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5}{x} + \lim_{x \rightarrow -\infty} 4} = \frac{2 + 0}{0 + 4} = \frac{1}{2}$$

حدهای نامتناهی در بی نهایت

در محاسبه حد توابع وقتی x به $+\infty$ میل می کند. ممکن است، با بزرگ شدن مقادیر x مقدارهای $f(x)$ به عدد خاصی نزدیک نشوند ولی مقادیر $f(x)$ از هر عدد دلخواه مثبت بزرگ تر شوند همان طور که در نمودار توابع $f(x) = x$ و $g(x) = x^2$ در شکل زیر دیده می شود با افزایش مقادیر x مقادیر $f(x)$ و $g(x)$ از هر عدد دلخواه مثبتی بزرگ تر می شود.



همچنین با کوچک شدن مقادیر x ، مقادیر $f(x)$ از هر عدد دلخواه منفی کوچک تر می شود. در نمودارهای بالا می توان مشاهده کرد که با کاهش مقادیر x مقادیر $f(x)$ از هر عدد منفی دلخواه کوچک تر و مقادیر $g(x)$ از هر عدد دلخواهی بزرگ تر می شود. در حالت کلی برای یک تابع f که در یک بازه $(a, +\infty)$ تعریف شده است اگر با میل کردن x به سمت $+\infty$ ، $f(x)$ نیز به سمت

$+\infty$ میل کند می گوئیم حد این تابع در $+\infty$ برابر $+\infty$ است و می نویسیم

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

برای مثال $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$

همچنین اگر با میل کردن x به سمت $+\infty$ ، $f(x)$ به سمت $-\infty$ میل کند می گوئیم حد این تابع در $+\infty$ برابر $-\infty$ است و می نویسیم

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ به عنوان مثال $\lim_{x \rightarrow +\infty} -x^2 = -\infty$

۱ مفاهیم $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ را بیان کنید.

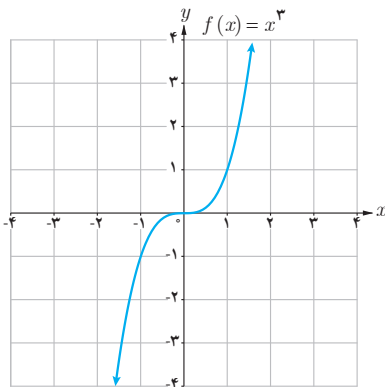
۲ با توجه به نمودار توابع $y = x^2$ و $y = x$ حدود زیر را مشخص کنید.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x =$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 =$$

فعالیت

تابع $f(x) = x^3$ را با نمودار روبه‌رو در نظر بگیرید.



۱ جدول زیر را کامل کنید.

x	$\dots \leftarrow$	-10^6	-1000	-100	-1	1	10	100	1000	10^6	$\rightarrow \dots$
$f(x)$	$\dots \leftarrow$	\dots	\dots	-10^6	\dots	1	1000	\dots	\dots	\dots	$\rightarrow \dots$

۲ با افزایش (کاهش) x ، مقدار $f(x)$ چه تغییری می‌کند؟

۳ در مورد حدهای $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^3$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3$ چه می‌توان گفت؟

❖ **قضیه ۸:** اگر n عددی طبیعی باشد آن گاه

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} x^n = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = -\infty \end{array} \right\} \text{ (ب) اگر } n \text{ فرد باشد:}$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} x^n = +\infty \text{ (الف) اگر } n \text{ زوج باشد:}$$

❖ **قضیه ۹:** اگر l عددی حقیقی (ناصفر) و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$ آن گاه

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \begin{cases} +\infty & \text{اگر } l \text{ مثبت باشد} \\ -\infty & \text{اگر } l \text{ منفی باشد} \end{cases}$$

❖ **تذکر:** قضیه ۹ در حالتی که $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$ نیز به طریق مشابه برقرار است.

❖ **قضیه ۱۰:** اگر l عددی حقیقی (ناصفر) و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = l$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = +\infty$ آن گاه.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \begin{cases} +\infty & \text{اگر } l \text{ مثبت باشد} \\ -\infty & \text{اگر } l \text{ منفی باشد} \end{cases}$$

❖ **تذکر:** قضیه ۱۰ در حالتی که $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -\infty$ نیز به طریق مشابه برقرار است.

❖ **مثال:** حدود زیر را محاسبه کنید.

الف) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-2x^3 + x - 1)$ ب) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (3 - 2x - 5x^4)$

حل:

الف) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-2x^3 + x - 1) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 \left(-2 + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3}\right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} -2x^3 = +\infty$

ب) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (3 - 2x - 5x^4) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^4 \left(\frac{3}{x^4} - \frac{2}{x^3} - 5\right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} -5x^4 = -\infty$

به طور کلی حد هر چند جمله‌ای به صورت $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ در $\pm\infty$ برابر حد جمله‌ای از آن است که دارای بزرگ‌ترین درجه است یعنی:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} a_n x^n$$

۱ الف) اگر $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ و $g(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_1 x + b_0$ دو چند جمله‌ای باشند نشان دهید.

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{a_n}{b_m} x^{n-m}$$

۲ در هر یک از حالت‌های $m > n$ و $m < n$ و $m = n$ حد قسمت قبل به چه صورت‌هایی نوشته می‌شود؟

۳ به کمک نتیجه قسمت قبل حدهای زیر را محاسبه کنید.

الف)
$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{3x^3 - 7x + 1}{2x^2 - x + 3}$$

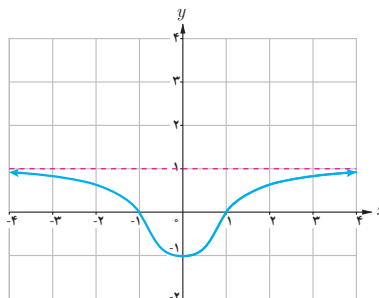
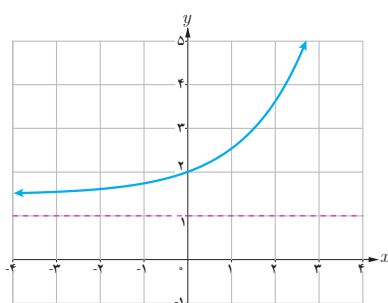
ب)
$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-3x^3 + x - 1}{6x^3 - 2x + 1}$$

پ)
$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x^2 - x + 1}{4x^3 + 2x - 1}$$

مجانب افقی

خط $y = L$ را مجانب افقی نمودار $y = f(x)$ می‌نامیم به شرطی که حداقل یکی از دو شرط $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$ برقرار باشد

به عنوان مثال در هر یک از شکل‌های زیر خط $y = 1$ مجانب افقی نمودارها است. چرا؟



❁ **مثال:** مجانب‌های افقی و قائم تابع $f(x) = \frac{2x-1}{x+1}$ را به دست آورید.

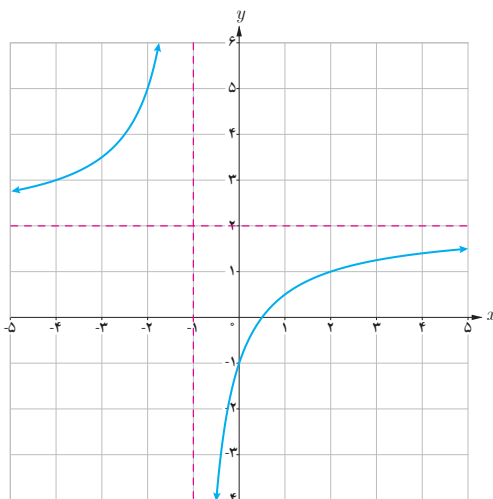
$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x-1}{x+1} = 2$$

حل: برای یافتن مجانب افقی کافی است حد تابع را در $\pm\infty$ حساب کنیم:

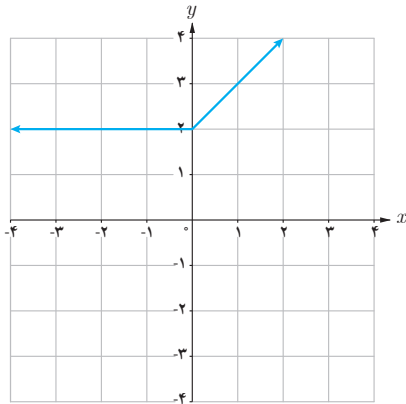
پس خط $y = 2$ مجانب افقی تابع است.

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{2x-1}{x+1} = -\infty$$

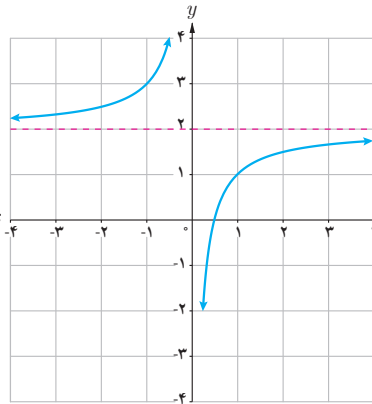
این تابع دارای مجانب قائم نیز می‌باشد و خط $x = -1$ مجانب قائم تابع است زیرا:
نمودار تابع به صورت زیر است.



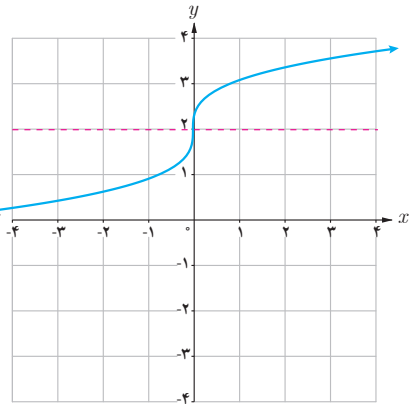
۱ کدامیک از نمودار توابع زیر مجانب افقی دارد؟ آن را مشخص کنید.



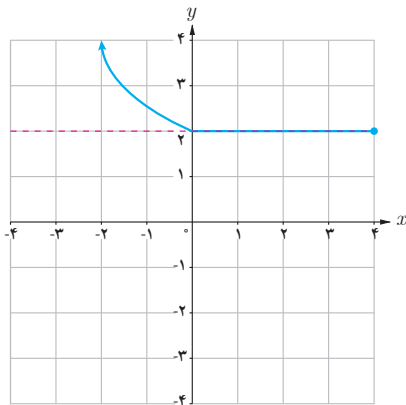
ب



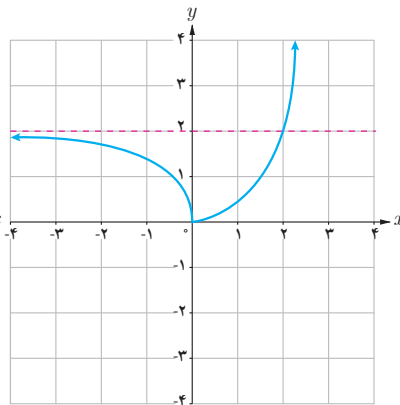
ب



الف



ت



ت

۲ مجانب‌های افقی و قائم تابع‌های زیر را در صورت وجود به دست آورید.

الف) $f(x) = \frac{x+1}{x^2-1}$

ب) $g(x) = x^x$

پ) $h(x) = \frac{x^2+1}{x+1}$

۱ مفهوم هر یک از گزاره‌های زیر را بیان کنید.

الف) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$

ب) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 4$

۲ برای تابع f که نمودار آن داده شده است موارد زیر را به دست آورید :

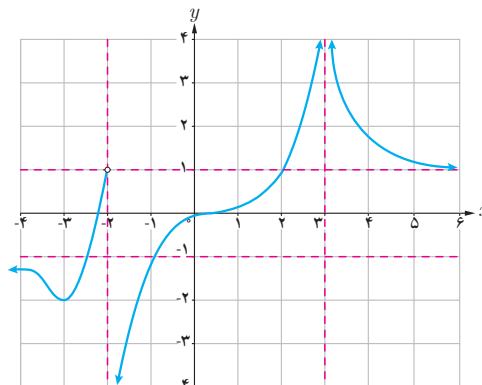
الف) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) =$

ب) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) =$

پ) $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) =$

ت) $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) =$

ث) $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) =$



مجانب‌های افقی و قائم (ج)

۳ حاصل حدود زیر را به دست آورید :

الف) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x+5}{x-2}$

ب) $\lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{t^2+1}{t^3-2t^2+1}$

پ) $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-x^2+2x}{4x+1}$

ت) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 - 2x^2)$

۴ مجانب‌های افقی و قائم نمودارهای هر یک از توابع زیر را در صورت وجود به دست آورید :

الف) $y = \frac{2x-1}{x-3}$

ب) $y = \frac{x}{x^2-4}$

پ) $y = \frac{1+2x^2}{1-x^2}$

ت) $y = \frac{2x}{1+x^2}$

۵ نمودار تابع f را به گونه‌ای رسم کنید که همه شرایط زیر را دارا باشد :

الف) $f(1) = f(-2) = 0$

ب) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = +\infty$

پ) خط $y = -1$ مجانب افقی آن باشد.

مشتق

۴

فصل

- ۱ آشنایی با مفهوم مشتق
- ۲ مشتق پذیری و پیوستگی
- ۳ آهنگ متوسط تغییر و آهنگ لحظه‌ای تغییر



ماهواره بر سیمرغ - پایگاه فضایی امام خمینی (ره)

مفهوم مشتق به مسئله تاریخی خط مماس در یک نقطه از منحنی و مسئله یافتن سرعت لحظه‌ای یک جسم مربوط می‌شود. امروزه مشتق در علوم مختلف کاربردهای وسیع و گسترده دارد. در این فصل مسائلی نظیر کمیته‌سازی سوخت مصرفی، پیشینه‌سازی سرعت و کمیته‌سازی زمان سفر با مفهوم مشتق ارتباط دارند.

آشنایی با مفهوم مشتق

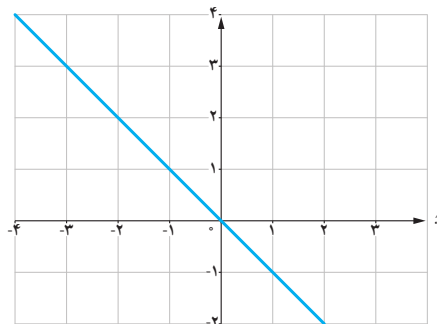
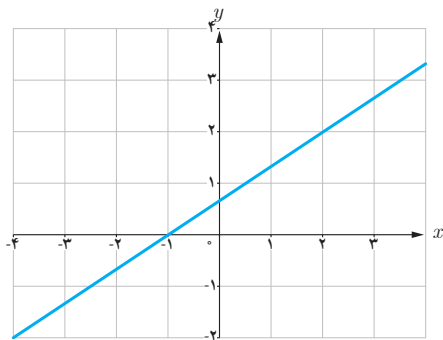


درس

مشتق یکی از مفاهیم اساسی ریاضی است که دارای کاربردهای وسیع در ریاضیات و علوم دیگر است. ایده اولیه در مورد مفهوم مشتق، به شیب یک خط مربوط می‌شود. به کمک این ایده به تدریج به صورت دقیق‌تری با مفهوم مشتق آشنا می‌شویم.

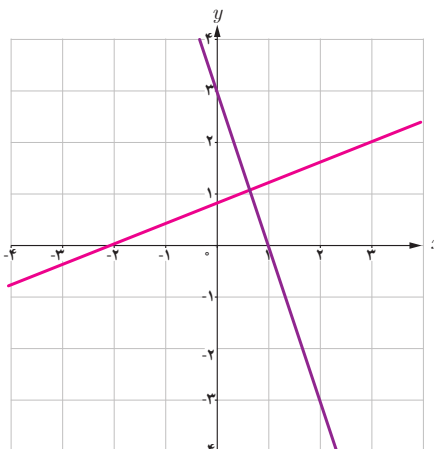
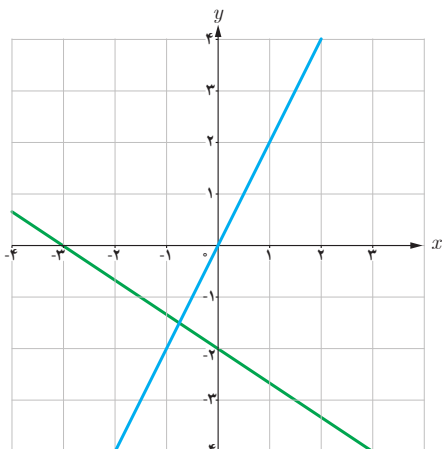
فعالیت

۱ شیب هر یک از خط‌های داده شده را به دست آورید و مشخص کنید که کدام یک مثبت و کدام یک منفی است؟

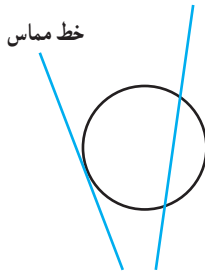


خط	d_1	d_2	d_3	d_4
شیب	$\frac{2}{5}$	-3	2	$-\frac{2}{3}$

۲ با توجه به جدول روبه‌رو، نمودار مربوط خط‌های d_1 , d_2 , d_3 و d_4 را روی شکل مشخص کنید.



خط مماس بر یک منحنی

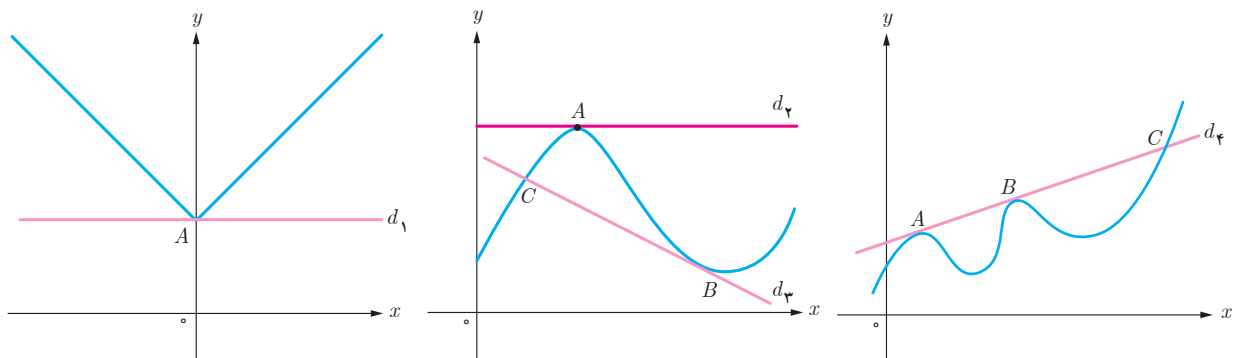


یافتن خط مماس در یک نقطه از یک منحنی مسئله‌ای تاریخی است که زمانی طولانی برای حل آن صرف شده است. مفهوم خط مماس بر یک دایره از زمان‌های گذشته مشخص بوده است. خط مماس بر دایره، خطی است که با دایره یک و فقط یک نقطه مشترک داشته باشد. این تعریف در حالت کلی برای همه منحنی‌ها صادق نیست.

خواندنی

از نظر تاریخی مسئله یافتن خط مماس در یک نقطه از یک منحنی، برای اولین بار در اوایل قرن هفدهم میلادی زمانی مطرح شد که فرما ریاضی‌دان فرانسوی اقدام به تعیین ماکزیمم‌ها و مینیمم‌های چند تابع خاص کرد. فرما دریافت که خطوط مماس، در نقاطی که منحنی ماکزیمم یا مینیمم دارد باید افقی باشد. از این رو به نظرش رسید که مسئله تعیین نقاط ماکزیمم یا مینیمم به حل مسئله دیگر، یعنی یافتن مماس‌های افقی مربوط می‌شود. تلاش برای حل این مسئله کلی‌تر بود که فرما را به کشف برخی از ایده‌های مقدماتی مفهوم «مشتق» هدایت کرد. مفهوم مشتق به شکل امروزی آن نخستین بار در سال ۱۳۶۶ میلادی، توسط نیوتن و به فاصله چند سال بعد از او توسط لایب‌نیتس، مستقل از یکدیگر پدید آمد. شیوه نیوتن مبتنی بر دیدگاه فیزیکی بود و از مشتق برای به دست آوردن سرعت لحظه‌ای استفاده کرد، اما لایب‌نیتس با دیدگاهی هندسی از مشتق برای به دست آوردن شیب خط مماس در منحنی‌ها استفاده کرد.

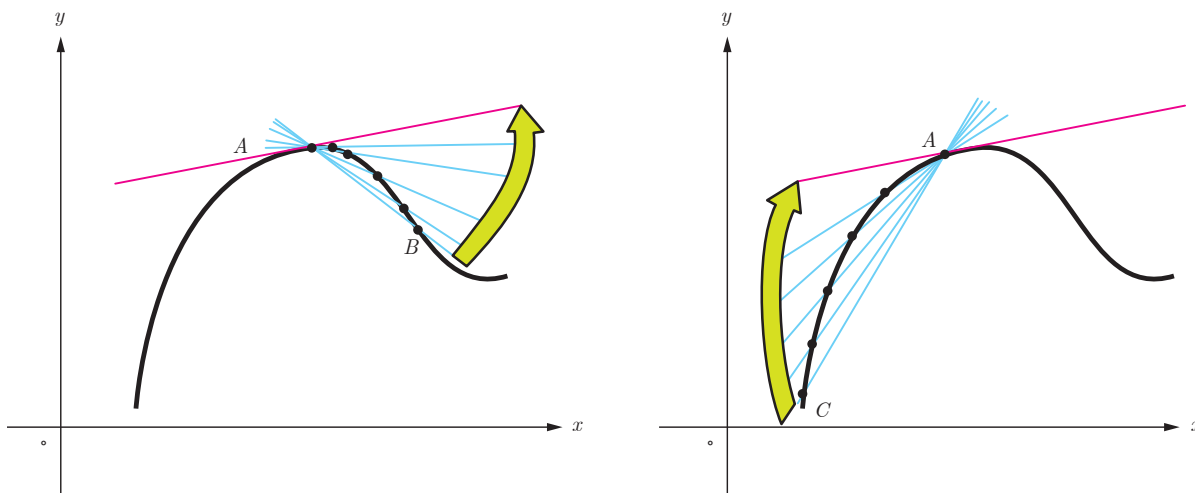
خط‌های d_1 تا d_4 را در نظر بگیرید. خط d_1 در نقطه A ، خط d_2 در نقطه B و خط d_3 در نقاط A و B بر منحنی مماس هستند. خط d_4 در نقطه A بر منحنی مماس نیست. همچنین خطوط d_2 و d_3 در نقطه C بر منحنی مماس نیستند. در ادامه این درس با دلایل این امر به صورت دقیق‌تری آشنا خواهید شد.



اکنون سعی می‌کنیم که به کمک نمودار منحنی، خط مماس بر منحنی در یک نقطه را بررسی کنیم. نقطه ثابت A را روی منحنی زیر در نظر می‌گیریم. خطی که از A و B می‌گذرد یک خط قاطع نامیده می‌شود. روی منحنی نقطه‌های دیگری را نزدیک‌تر به نقطه A اختیار می‌کنیم و خط‌های گذرنده از A و آن نقطه‌ها را رسم می‌کنیم. حدس بزنید که وقتی نقاط به قدر کافی به A نزدیک می‌شوند، برای خط‌های قاطع چه اتفاقی می‌افتد؟ به عبارت دیگر خط‌های قاطع به چه خطی نزدیک می‌شوند؟

اکنون نقطه C را سمت چپ نقطه A اختیار می‌کنیم و خط قاطع AC را رسم می‌کنیم. مانند قبل نقاط دیگری را نزدیک‌تر به نقطه A اختیار می‌کنیم. حدس می‌زنید برای خط‌های قاطع چه اتفاقی می‌افتد؟ به طور شهودی می‌توان گفت:

شیب خط مماس بر منحنی در نقطه A حد شیب خط‌های قاطع گذرنده از A است به شرطی که نقطه‌ها به قدر کافی به A نزدیک شوند.

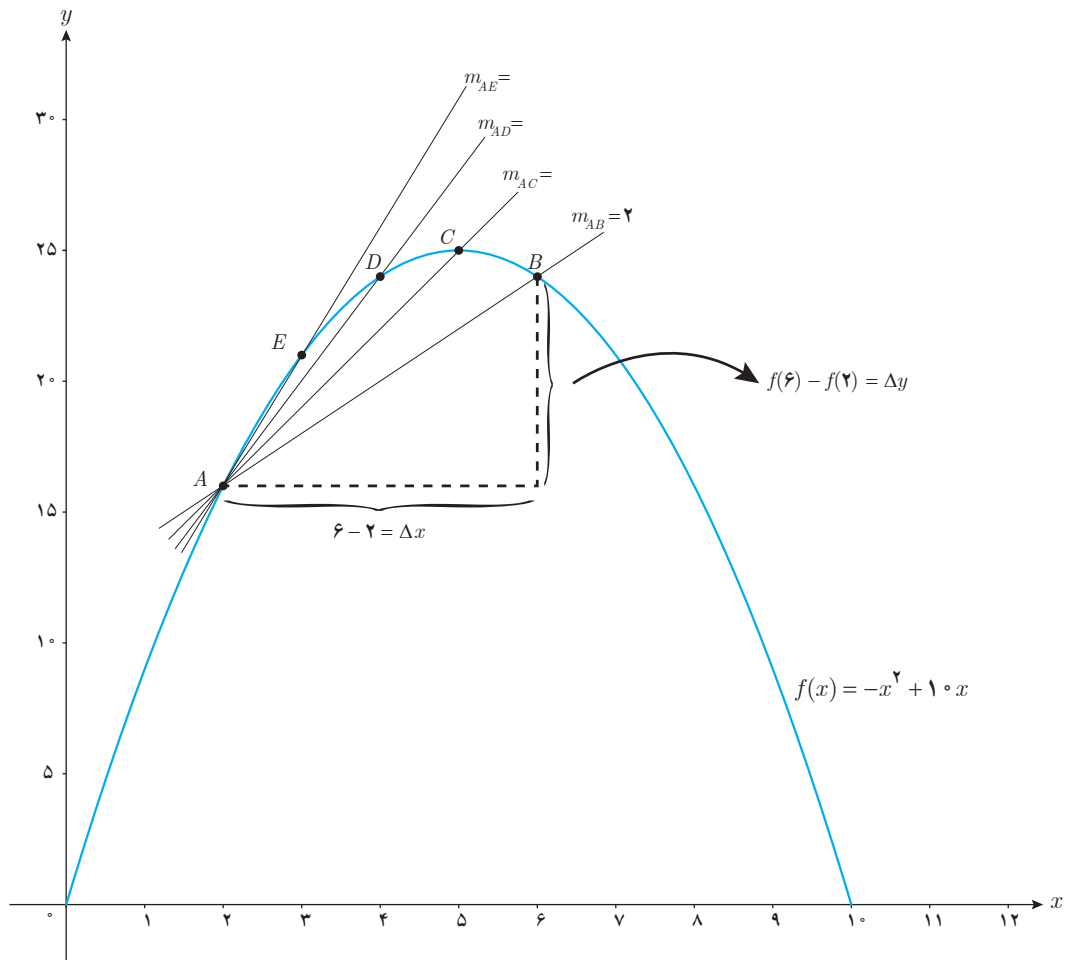


در ادامه این بحث را دقیق‌تر بررسی خواهیم کرد.

الف) تابع $f(x) = -x^2 + 1$ داده شده است، اگر $0 \leq x \leq 1$ ، نقاط $D(4, f(4))$ ، $C(5, f(5))$ ، $B(6, f(6))$ ، $A(2, f(2))$ و $E(3, f(3))$ را روی منحنی در نظر می‌گیریم. شیب خطی که از نقاط A و B می‌گذرد یعنی m_{AB} از دستور زیر به دست می‌آید:

$$m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{f(6) - f(2)}{6 - 2} = \frac{24 - 16}{4} = \frac{8}{4} = 2$$

به همین روش m_{AC} و m_{AD} و m_{AE} را به دست آورید.



همان‌طور که می‌دانید برای محاسبه شیب خط AB نسبت تغییر عمودی را به تغییر افقی به دست می‌آوریم. اگر این تغییرات را به ترتیب با Δy و Δx نمایش دهیم، داریم:

$$m_{AB} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

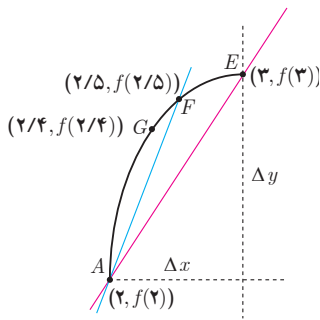
در هنگام محاسبه شیب‌های بالا، توضیح دهید که Δx ‌ها چگونه تغییر می‌کنند؟

$$[2, 6] \quad 2 \text{ ————— } 6 \quad \Delta x = 6 - 2 = 4 \quad \Delta y = 24 - 16 = 8$$

$$[2, 5] \quad 2 \text{ ————— } 5 \quad \Delta x = 5 - 2 = 3 \quad \Delta y = 25 - 16 = 9$$

$$[2, 4] \quad 2 \text{ ————— } 4 \quad \Delta x = 4 - 2 = 2 \quad \Delta y = 24 - 16 = 8$$

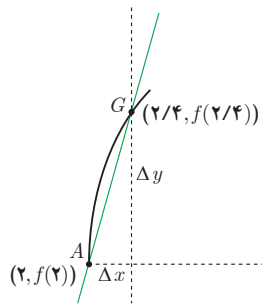
$$[2, 3] \quad 2 \text{ — } 3 \quad \Delta x = 3 - 2 = 1 \quad \Delta y = 21 - 16 = 5$$



$$m_{AF} = \frac{f(2/5) - f(2)}{2/5 - 2}$$

$$= \frac{18/75 - 16}{0/5}$$

$$= \frac{2/75}{0/5} = 5/5$$



$$m_{AG} = \frac{f(2/4) - f(2)}{2/4 - 2}$$

$$= \frac{17/16 - 16}{0/2} = \frac{1/16}{0/2} = 5/8$$

ب) حال فرض کنید که با ادامه روندی که در قسمت (الف) اختیار کردیم، نقاط بیشتری را نزدیک به A انتخاب کنیم. شیب خطوط به دست آمده به شیب خط مماس بر منحنی در نقطه A نزدیک می‌شود. برای درک بهتر این موضوع، منحنی $f(x) = -x^2 + 1 \circ x$ در فاصله $[2, 3]$ رسم شده است. در ادامه نمودار تابع در بازه $[2, 2/4]$ رسم شده است.

اگر به همین ترتیب بازه‌های کوچک‌تری در نظر بگیریم، شیب خطوط به دست آمده به شیب خط مماس بر منحنی در نقطه A نزدیک می‌شود. برای درک بهتر این موضوع، با تکمیل جدول و مقایسه شیب خط‌های قاطع، شیب خط مماس را حدس بزنید.

بازه $[a, b]$	شیب خطی که از نقاط $(a, f(a))$ و $(b, f(b))$ می‌گذرد.
$[2, 2/4]$	$\frac{f(2/4) - f(2)}{2/4 - 2} = \frac{17/16 - 16}{0/2} = \frac{1/16}{0/2} = 5/8$
$[2, 2/3]$	$\frac{f(2/3) - f(2)}{2/3 - 2} = \frac{11/9 - 16}{0/3} = \frac{5/9}{0/3} = 5/9$
$[2, 2/2]$	$\frac{f(2/2) - f(2)}{2/2 - 2} = \frac{17/4 - 16}{0/2} = \frac{1/4}{0/2} = 5/4$
$[2, 2/1]$	$\frac{f(2/1) - f(2)}{2/1 - 2} = \frac{16/1 - 16}{0/1} = \frac{0/1}{0/1} = 0/1$
$[2, 2/0.1]$	$\frac{f(2/0.1) - f(2)}{2/0.1 - 2} = \frac{16/0.01 - 16}{0/0.1} = \frac{0/0.01}{0/0.1} = 0/0.1$
$[2, 2/0.01]$	$\frac{f(2/0.01) - f(2)}{2/0.01 - 2} = \frac{16/0.0001 - 16}{0/0.01} = \frac{0/0.0001}{0/0.01} = 0/0.01$
\vdots	\vdots
$[2, 2+h]$ (h یک عدد خیلی کوچک و مثبت است.)	$\frac{f(2+h) - f(2)}{h} \longrightarrow ?$

اگر بخواهیم دقیق‌تر صحبت کنیم، باید در مورد مقادیر عبارت $\frac{f(2+h)-f(2)}{h}$ وقتی h به قدر کافی نزدیک به صفر (و مثبت)

است، بررسی کنیم. روند بالا این حدس را تقویت می‌کند که هر چقدر که بخواهیم می‌توانیم این مقادیر را به عدد ۶ نزدیک کنیم مشروط

بر آنکه h را به قدر کافی نزدیک به صفر (و مثبت) اختیار کنیم. به عبارت دیگر حدس می‌زنیم که: $\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(2+h)-f(2)}{h} = 6$ کافی است با محاسبه مقدار حد، صحت حدس خود را بررسی کنیم:

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(2+h)-f(2)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{-(2+h)^2 + 1 \cdot (2+h) - 16}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{-(h^2 + 4h + 4) + 2 + 1 \cdot h - 16}{h} =$$

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{-h^2 - 4h - 4 + 2 + h - 16}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{-h^2 - 3h - 18}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{-h^2 + 6h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{h(-h + 6)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} (-h + 6) = 6$$

به طریق مشابه می‌توان دید که اگر نقاط روی منحنی را در سمت چپ A اختیار کنیم، به عبارت دیگر اگر بازه‌هایی مانند، $[1/5, 2]$ ، $[1/6, 2]$ ، $[1/7, 2]$ ، $[1/8, 2]$ و... را در نظر بگیریم شیب خط‌های قاطع برابر با $6/5$ ، $6/4$ ، $6/3$ ، $6/2$ ، ... خواهد شد. به عبارت دیگر در این حالت هم شیب خط‌های قاطع به هر اندازه که بخواهیم به عدد ۶ نزدیک می‌شوند، مشروط بر آنکه h به

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(2+h)-f(2)}{h} = 6 \quad \text{قدر کافی از سمت چپ به صفر نزدیک شود، یعنی داریم:}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h)-f(2)}{h} = 6 \quad \text{بنابراین به طور کلی می‌توان نوشت:}$$

شیب خط مماس بر منحنی f در نقطه $A(a, f(a))$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$A \text{ شیب خط مماس بر منحنی در نقطه } = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

به شرط آنکه این حد موجود و متناهی باشد.

حد بالا را (در صورت وجود) مشتق تابع f در نقطه a می‌نامند و با $f'(a)$ نمایش می‌دهند، یعنی:

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

حد مذکور را شیب منحنی در a نیز می‌نامند.

بنابراین در مثال قبل داریم $f'(2) = 6$. در ادامه $f'(3)$ برای $f(x) = -x^2 + 1 \circ x$ محاسبه شده است:

$$\begin{aligned} f'(3) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3+h) - f(3)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-(3+h)^2 + 1 \circ (3+h) - 21}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-9 - 6h - h^2 + 3 \circ + 1 \circ h - 21}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-h^2 + 4h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (-h + 4) = 4 \end{aligned}$$

❖ **مثال:** معادله خط مماس بر منحنی تابع $f(x) = -x^2 + 1 \circ x$ را در نقطه $A(2, f(2))$ واقع بر نمودار تابع بنویسید.

❖ **حل:** با توجه به آنچه که در فعالیت قبل مشاهده شد:

$$A \text{ نقطه } f'(2) = 6 = \text{شیب خط مماس در نقطه } A$$

$$A(2, f(2)) = (2, 16)$$

$$y - 16 = 6(x - 2) \Rightarrow y = 6x + 4$$

کارد کلاس

معادله خط مماس بر منحنی تابع $y = x^2 + 3$ را در نقطه‌ای به طول ۲- بنویسید.

❖ **تذکر:** با نمادهای معرفی شده در فعالیت در مورد شیب خط‌های قاطع می‌توان دستورهای معادل دیگری برای محاسبه مشتق در یک نقطه به دست آورد، به طور مثال شیب خطی که از نقاط A و B می‌گذرد برابر است با:

$$m_{AB} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x}$$

$$f'(a) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x}$$

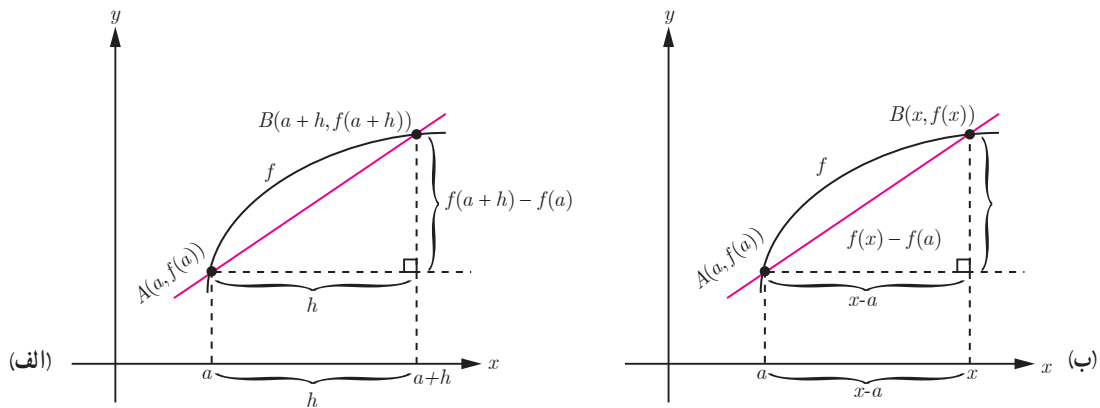
و از آنجا:

❖ **مثال:** اگر $f'(2)$ ، $f(x) = -x^2 + 1 \circ x$ را از دستور بالا به دست آورید:

$$\begin{aligned} f'(2) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(2 + \Delta x) - f(2)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{-(2 + \Delta x)^2 + 1 \circ (2 + \Delta x) - 16}{\Delta x} = \\ \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{-\cancel{4} - \Delta x^2 - \cancel{4}\Delta x + \cancel{2} \circ + 1 \circ \Delta x - \cancel{2}}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{-\Delta x^2 + 6\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x(-\Delta x + 6)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (-\Delta x + 6) = 6 \end{aligned}$$

محاسبه $f'(a)$ به روش دیگر

مشتق تابع f در نقطه $x = a$ به صورت: $f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ تعریف شد. اکنون دستور دیگری برای مشتق تابع f در نقطه $x = a$ می‌یابیم که در برخی محاسبات کار را ساده‌تر می‌کند.



با استفاده از نموداری مشابه نمودار (الف) برای محاسبه مشتق f در a داریم :

$$AB \text{ خط شیب} = m_{AB} = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

$$A \text{ در منحنی بر مماس خط شیب} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

با استفاده از نمودار (ب) راه دیگر محاسبه شیب خط مماس این است که نقطه دلخواه B را به مختصات $(x, f(x))$ در نظر بگیریم در این صورت داریم :

$$AB \text{ خط شیب} = m_{AB} = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

برای محاسبه شیب خط مماس کافی است که x را مرتباً به a نزدیک کنیم. در این صورت شیب خط مماس برابر با

$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ است مشروط بر اینکه این حد موجود باشد (واضح است که مانند قبل x باید از راست و چپ به قدر کافی به

a نزدیک شود). به عبارت دیگر : $f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$

❖ **مثال :** اگر $f(x) = x^2$ ، $f'(3)$ را به دو روش به دست آورید.

❖ **حل :**

$$f'(3) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3+h) - f(3)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(h+3)^2 - 9}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 + 6h + 9 - 9}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 + 6h}{h} \quad \text{روش اول}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(h+6)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (h+6) = 6$$

$$f'(3) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(x+3)}{x-3} = \lim_{x \rightarrow 3} (x+3) = 6 \quad \text{روش دوم}$$

در موقعیت‌های مختلف، ممکن است یکی از این دو روش بر دیگری به دلیل ساده‌تر بودن محاسبات برتری داشته باشد. معادل بودن این دو روش را به شیوه هندسی ملاحظه نمودید. در کار در کلاس بعد به شیوه جبری نیز معادل بودن دو روش صفحه قبل را بررسی کنید.

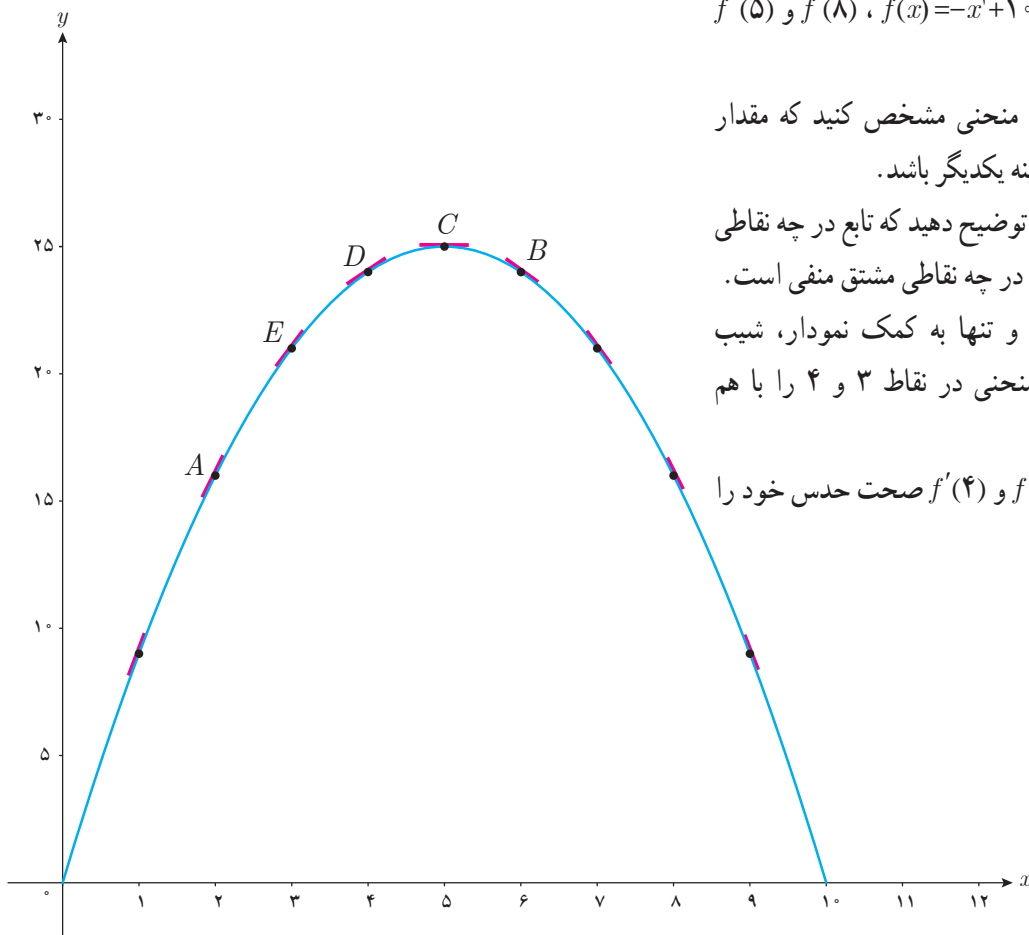
کارد کلاس

اگر $f'(a)$ موجود باشد، ثابت کنید.

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

❁ راهنمایی: تغییر متغیر $a+h=x$ را به کار برید.
توجه کنید وقتی که $h \rightarrow 0$ آنگاه $x \rightarrow a$

کارد کلاس



الف) برای تابع $f(x) = -x^2 + 10x$ ، $f'(8)$ و $f'(5)$ را حساب کنید.

ب) دو نقطه روی منحنی مشخص کنید که مقدار مشتق تابع در آنها قرینه یکدیگر باشد.

پ) به کمک شکل توضیح دهید که تابع در چه نقاطی دارای مشتق مثبت و در چه نقاطی مشتق منفی است.

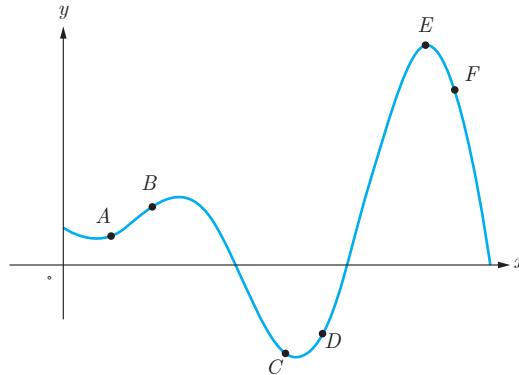
ت) بدون محاسبه و تنها به کمک نمودار، شیب خط‌های مماس بر منحنی در نقاط ۳ و ۴ را با هم مقایسه کنید.

ث) با محاسبه $f'(3)$ و $f'(4)$ صحت حدس خود را بررسی نمایید.

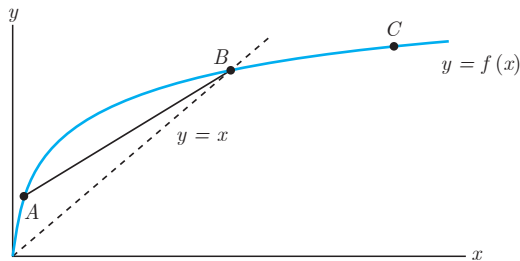
۱ اگر $f(x) = 3x^2 - 2x + 1$ ، $f'(2)$ را به دست آورید و معادله خط مماس بر منحنی f را در نقطه‌ای به طول ۲ واقع بر آن بنویسید.

۲ نقاط داده شده روی منحنی زیر را با شیب‌های ارائه شده در جدول نظیر کنید.

شیب	نقطه
-۳	
-۱	
۰	
$\frac{1}{2}$	
۱	
۲	



۳ برای نمودار $y = f(x)$ در شکل زیر شیب‌های داده شده از «الف» تا «ج» را از کوچک‌ترین به بزرگ‌ترین مرتب کنید.



الف) شیب نمودار در نقطه A

ب) شیب نمودار در نقطه B

پ) شیب نمودار در نقطه C

ت) شیب خط AB

ث) شیب خط $y=2$

ج) شیب خط $y=x$

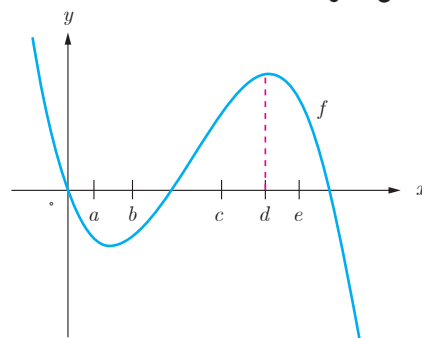
شیب‌های داده شده از «الف» تا «ج» را به ترتیب m_1, m_2, \dots, m_6 و ... را به ترتیب

در نظر بگیرید.

۴ با در نظر گرفتن نمودار f در شکل، نقاط به طول‌های a, b, c, d, e

را با مشتق‌های داده شده در جدول نظیر کنید.

x	$f'(x)$
	۰
	۰/۵
	۲
	-۰/۵
	-۲



۵ نقاطی مانند A, B, C, D, E, F و G را روی نمودار $y = f(x)$ مشخص کنید به طوری که:

الف) A ، نقطه‌ای روی نمودار است که شیب خط مماس بر نمودار در آن منفی است.

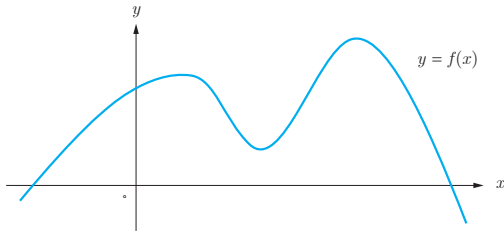
ب) B نقطه‌ای روی نمودار تابع است که مقدار تابع و مقدار مشتق در آن منفی است.

پ) C نقطه‌ای روی نمودار است که مقدار تابع در آنجا صفر است ولی مقدار مشتق در آن مثبت است.

ت) D نقطه‌ای روی منحنی است که مشتق در آنجا صفر است.

ث) نقاط E و F نقاط متفاوتی روی منحنی هستند که مشتق یکسان دارند.

ج) G نقطه‌ای روی منحنی است که مقدار تابع در آنجا مثبت ولی مقدار مشتق منفی است.



۶ اگر $f(x) = x^3 - 2$ ، $f'(-1)$ را به دست آورید.

۷ نقاط A, B, C, D, E, F را روی منحنی روبه‌رو در نظر می‌گیریم. در مورد شیب منحنی در این نقاط کدام گزاره درست و کدام یک نادرست است؟

الف) شیب منحنی در همه این نقاط مثبت است.

ب) $m_A < m_B$ (شیب خط مماس بر منحنی در نقطه A را با m_A

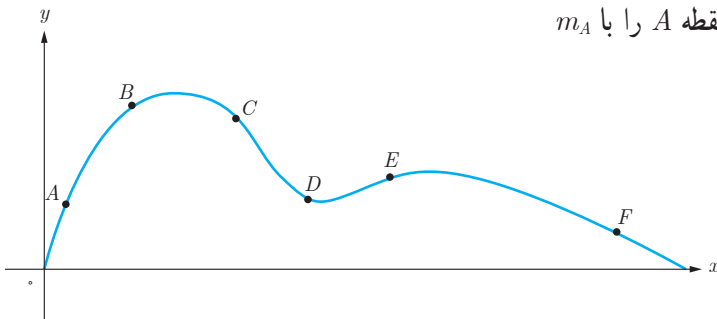
نمایش داده‌ایم)

پ) $m_E < m_B < m_A$

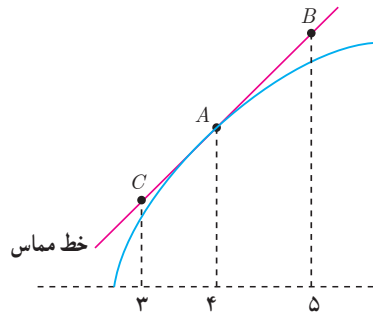
ت) شیب منحنی در نقاط C و D ، F منفی است.

ث) $m_F < m_D < m_C$

ج) $m_C < m_D < m_F < m_E < m_B < m_A$



۸ برای تابع f در شکل زیر داریم: $f'(4) = 1/5$ و $f(4) = 25$ با توجه به شکل مختصات نقاط A , B و C را بیابید.



- ۹ در هر ثانیه علی j متر با دو چرخه و رضا s متر با پای پیاده طی می کنند، به طوری که $j > s$. در یک زمان داده شده، چگونه می توان مسافت طی شده توسط رضا و علی را مقایسه کرد؟
- الف) علی $s - j$ متر بیش از رضا مسافت طی خواهد کرد.
- ب) علی $s \cdot j$ متر بیش از رضا مسافت طی خواهد کرد.
- پ) علی j/s متر بیش از رضا مسافت طی خواهد کرد.
- ت) علی $j \cdot s$ برابر رضا مسافت طی خواهد کرد.
- ث) علی j/s برابر رضا مسافت طی خواهد کرد.

مشتق پذیری و پیوستگی

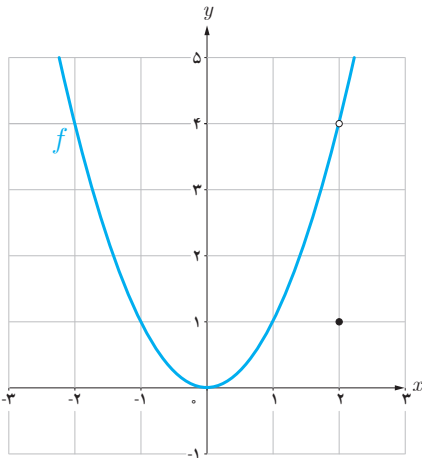
در درس گذشته مشتق تابع f در نقطه‌ای به طول x_0 به یکی از دو صورت زیر تعریف شد:

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \quad \text{یا} \quad f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

در صورت وجود حد (متناهی) فوق گفته می‌شود که f در x_0 مشتق پذیر است. در مطالعه رفتار یک تابع، مشخص کردن نقاطی که تابع در آن نقاط مشتق پذیر نیست دارای اهمیت است. در فعالیت زیر با یکی از حالت‌هایی که یک تابع در آن مشتق پذیر نیست آشنا می‌شوید.

فعالیت

نمودار تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 & x \neq 2 \\ 1 & x = 2 \end{cases}$ (شکل مقابل) را در نظر می‌گیریم:



الف) چگونه به کمک نمودار تابع و تعریف مشتق به عنوان شیب خط مماس می‌توانید استدلال کنید که $f'(2)$ وجود ندارد؟

اگر برای بررسی مشتق پذیری این تابع در $x = 2$ تعریف مشتق f در $x = 2$ را به کار گیریم:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 1}{x - 2} =$$

حد صورت کسر برابر ۳ است و حد مخرج کسر برابر صفر است. وقتی $x \rightarrow 2$ ، داریم:

$$\text{حد راست} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2 - 1}{x - 2} = +\infty$$

$$\text{حد چپ} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2 - 1}{x - 2} = -\infty$$

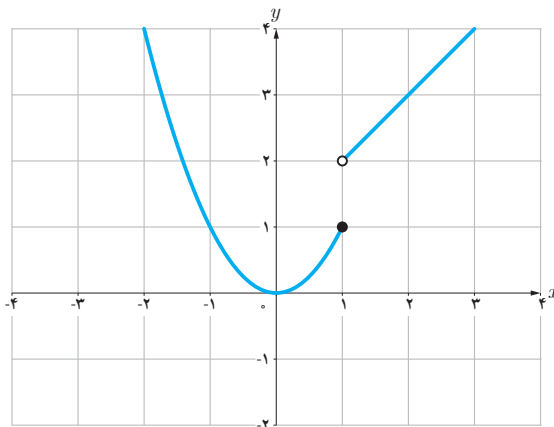
بنابراین $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2}$ موجود (و متناهی) نیست، پس $f'(2)$ وجود ندارد.

ب) نقطه دیگری (به جز $x = 2$) در نظر بگیرید. آیا تابع در این نقطه مشتق پذیر است؟ پاسخ خود را با پاسخ دوستانتان مقایسه کنید.

کاردر کلاس

تابع g (شکل زیر) را به صورت
$$g(x) = \begin{cases} x^2 & x \leq 1 \\ x + 1 & x > 1 \end{cases}$$
 در نظر می‌گیریم.

چرا $g'(1)$ موجود نیست؟



توابع f و g فعالیت و کار در کلاس قبل به ترتیب در $x = 2$ و $x = 1$ ناپیوسته بودند و همان گونه که مشاهده کردید، $f'(2)$ و $g'(1)$ موجود نبودند. بنابراین به نظر می‌رسد که اگر تابعی در یک نقطه مشتق پذیر باشد، الزاماً در آن نقطه باید پیوسته باشد. این مطلب را به عنوان یک قضیه ثابت می‌کنیم.

قضیه: اگر تابع f در $x = a$ مشتق پذیر باشد آن گاه f در a پیوسته است.

اثبات: کافی است نشان دهیم: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) - f(a)) = \lim_{x \rightarrow a} \left((x - a) \left(\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \right) \right) =$$

$$\lim_{x \rightarrow a} (x - a) \cdot \lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \right) = 0 \cdot f'(a) = 0$$

بنابراین $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) - f(a)) = 0$ و از آنجا $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ (چرا؟)

با توجه به این قضیه به طور منطقی می توان نتیجه گرفت که:

اگر تابع f در $x = a$ پیوسته نباشد، آن گاه f در $x = a$ مشتق پذیر هم نیست.

مثال بعد نشان می دهد که عکس قضیه درست نیست، یعنی حتی با وجود پیوستگی تابع در یک نقطه، لزوماً نمی توان مشتق پذیری تابع در آن نقطه را نتیجه گرفت.

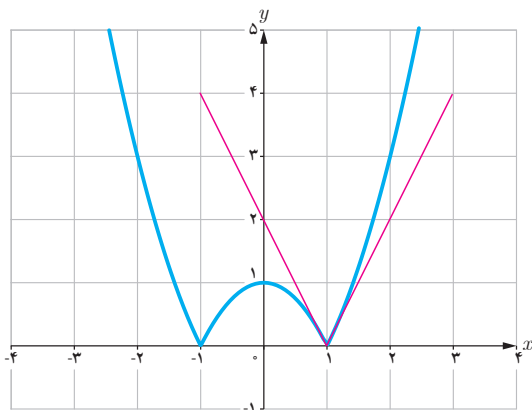
❁ **مثال:** مشتق پذیری تابع $f(x) = |x^2 - 1|$ را در $x = 1$ بررسی کنید.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{|x^2 - 1| - 0}{x - 1}$$

برای محاسبه $f'(1)$ ناچاریم حدهای راست و چپ را به دست آوریم.

$$\text{حد راست} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{|x^2 - 1|}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2$$

$$\text{حد چپ} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{|x^2 - 1|}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-(x^2 - 1)}{x - 1} = -2$$



بنابراین $f'(1)$ موجود نیست. به عبارت دیگر خط مماس بر منحنی در نقطه $x = 1$ وجود ندارد. اما حدهای یک طرفه فوق را می توان با وجود نیم خطهای مماس بر منحنی در نقطه $x = 1$ توجیه کرد. اگر از سمت راست به نقطه $x = 1$ نزدیک شویم، شیب نیم خط مماس بر منحنی در این نقطه برابر ۲ و اگر از سمت چپ به $x = 1$ نزدیک شویم، شیب خط مماس بر منحنی در این نقطه برابر ۲- است. حدهای راست و چپ بالا را به ترتیب مشتق های راست و چپ f در $x = 1$ می نامیم و با $f'_+(1)$ و $f'_-(1)$ نمایش می دهیم.

در مثال قبل f در $x=1$ پیوسته است ولی f در آن مشتق پذیر نیست.

نیم خط‌های مماس راست و چپ را به اختصار، نیم مماس راست و چپ می‌نامیم.

در حقیقت:

$$f'_-(1) = \text{شیب نیم مماس چپ}$$

$$f'_+(1) = \text{شیب نیم مماس راست}$$

معادله این نیم مماس‌ها نیز به ترتیب عبارت‌اند از:

$$\text{نیم مماس راست} \quad y - 0 = 2(x-1) \quad \text{یا} \quad y = 2x - 2, \quad x \geq 1$$

$$\text{نیم مماس چپ} \quad y - 0 = -2(x-1) \quad \text{یا} \quad y = -2x + 2, \quad x \leq 1$$

کاردرکلاس

نشان دهید که مشتق تابع f در مثال قبل در $x=-1$ نیز موجود نیست.
در صورت امکان معادله نیم مماس‌های راست و چپ در $x=-1$ را بنویسید.

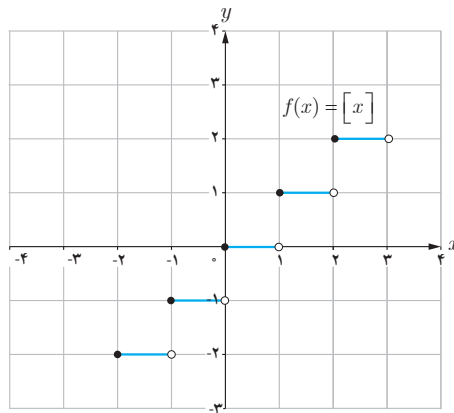
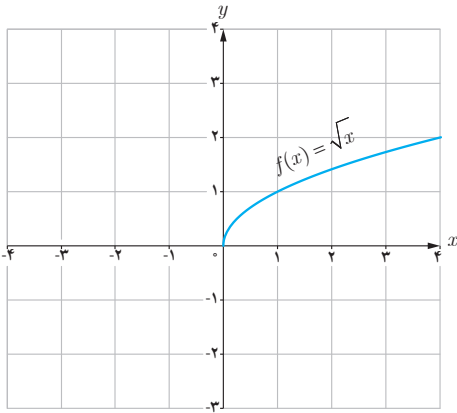
تعریف: مشتق راست و مشتق چپ تابع f در $x=a$ را با $f'_+(a)$ و $f'_-(a)$ نمایش می‌دهیم و آن را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$f'_+(a) = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}, \quad f'_-(a) = \lim_{x \rightarrow a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

یا به طور معادل:

$$f'_+(a) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}, \quad f'_-(a) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

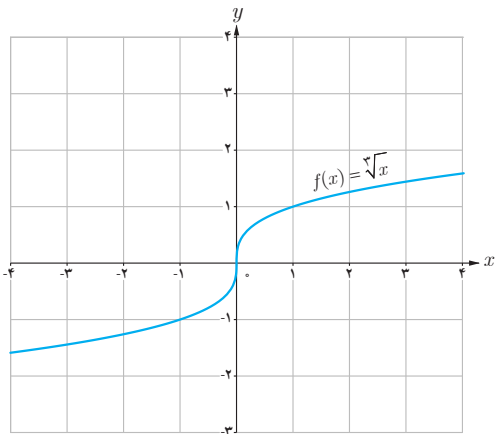
❁ **مثال:** توابع $f(x) = [x]$ و $g(x) = \sqrt{x}$ در صفر پیوسته نیستند. بنابراین $f'(\circ)$ و $g'(\circ)$ موجود نیستند.



اکنون به بررسی حالت دیگری می پردازیم که در آن تابع مشتق پذیر نیست.

❁ **مثال:** تابع $f(x) = \sqrt[3]{x}$ را در نظر می گیریم. مشتق پذیری این تابع را

در $x = \circ$ بررسی کنید.

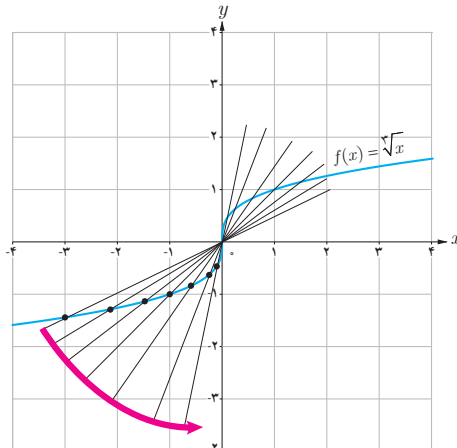
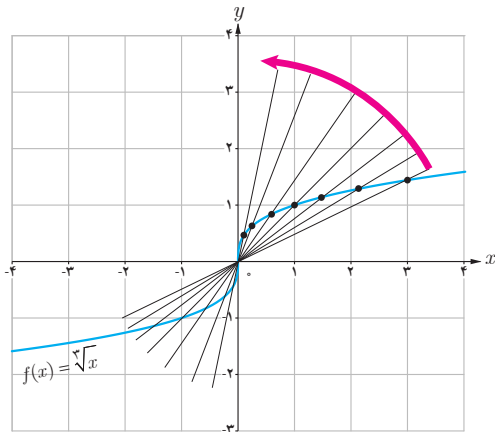


$$f'(\circ) = \lim_{x \rightarrow \circ} \frac{\sqrt[3]{x} - \circ}{x} = \lim_{x \rightarrow \circ} \frac{\sqrt[3]{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow \circ} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} = +\infty$$

بنابراین تابع f در صفر مشتق پذیر نیست. شکل ها نشان می دهند که وقتی از سمت راست یا چپ به نقطه صفر نزدیک می شویم خط های قاطع به خط $x = \circ$ نزدیک می شوند.

تابع $f(x) = \sqrt[3]{x}$ در $x = \circ$ مشتق پذیر نیست. خط $x = \circ$ را «مماس قائم»

منحنی می نامیم.



اگر تابع f در $x=a$ پیوسته باشد و $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = +\infty$ یا $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = -\infty$ در این صورت خط $x=a$ را «مماس قائم» بر منحنی f در نقطه $(a, f(a))$ می‌نامیم. بدیهی است $f'(a)$ در این حالت وجود ندارد.

به‌طور خلاصه می‌توان گفت:

تابع f در $x=a$ مشتق‌پذیر نیست هرگاه حداقل یکی از شرایط زیر برقرار باشد!

۱ در f پیوسته نباشد.

۲ در f پیوسته باشد و مشتق راست و مشتق چپ در $x=a$:

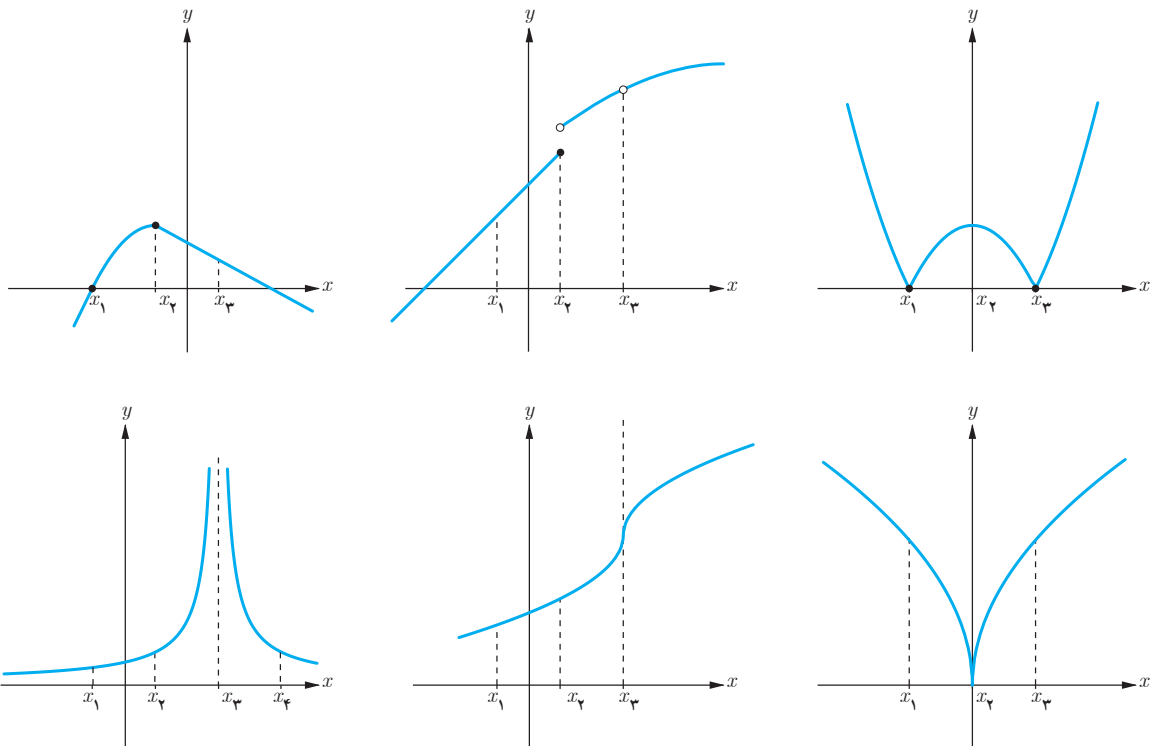
الف) هر دو موجود (متناهی) ولی نابرابر باشند (نقطه گوشه‌ای).

ب) یکی متناهی و دیگری نامتناهی باشد (نقطه گوشه‌ای).

پ) هر دو نامتناهی باشند.

کارد کلاس

در شکل‌های زیر مشخص کنید که هر تابع در کدام نقطه یا نقاط مشخص شده مشتق‌پذیر نیست.

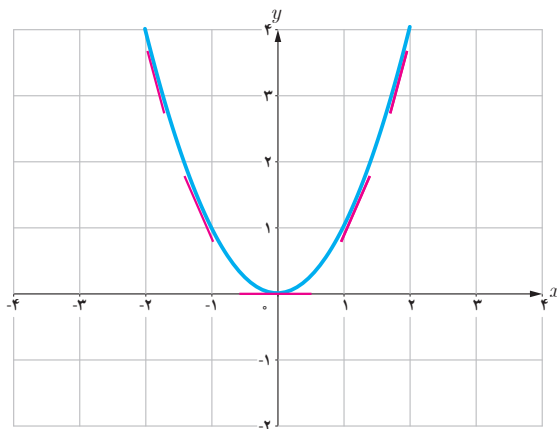


۱- همکاران محترم توجه دارند که ذکر مثال‌های پیچیده در این قسمت در زمره اهداف کتاب نیست.

تابع مشتق

تاکنون با مفهوم مشتق تابع در یک نقطه (معین) آشنا شده‌اید. حال به دنبال یافتن رابطه‌ای بین مجموعه نقاط متعلق به دامنه یک تابع و مشتق تابع در آن نقاط هستیم.

فعالیت



تابع $f(x) = x^2$ را در نظر می‌گیریم.

جدول زیر را کامل کنید (مشتق تابع در برخی نقاط حساب شده‌اند).

x	-۳	-۲	-۱	۰	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	۲
$f'(x)$		-۴		۰		$2\sqrt{3}$	۴

$$f'(-2) = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{f(x) - f(-2)}{x - (-2)} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - 4}{x + 2} = \lim_{x \rightarrow -2} (x - 2) = -4$$

$$f'(\sqrt{3}) = \lim_{x \rightarrow \sqrt{3}} \frac{f(x) - f(\sqrt{3})}{x - \sqrt{3}} = \lim_{x \rightarrow \sqrt{3}} \frac{x^2 - 3}{x - \sqrt{3}} = \lim_{x \rightarrow \sqrt{3}} \frac{(x + \sqrt{3})(x - \sqrt{3})}{x - \sqrt{3}} = 2\sqrt{3}$$

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x} = 0$$

می‌دانیم مشتق تابع در یک نقطه (در صورت وجود) برابر شیب خط مماس بر منحنی در آن نقطه است و از طرفی مماس بر منحنی در هر نقطه یکتاست، بنابراین $f'(x)$ تابعی از x است. حدس می‌زنید در چه نقاطی مشتق تابع $f(x) = x^2$ وجود دارد؟

اگر x عضوی از دامنه تابع f باشد، تابع مشتق f در x را با $f'(x)$ نمایش می‌دهیم و آن را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

مشروط بر آنکه حد فوق موجود باشد. مجموعه تمام نقاطی از دامنه f که برای آنها f' موجود باشد را دامنه f' می‌نامیم.

به طور مثال برای تابع $f(x) = x^2$ ، دامنه تابع f' ، مجموعه اعداد حقیقی است. روش محاسبه ضابطه تابع f' نیز، در ادامه ارائه شده است.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^2 + 2hx + h^2 - x^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(2x+h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (2x+h) = 2x \end{aligned}$$

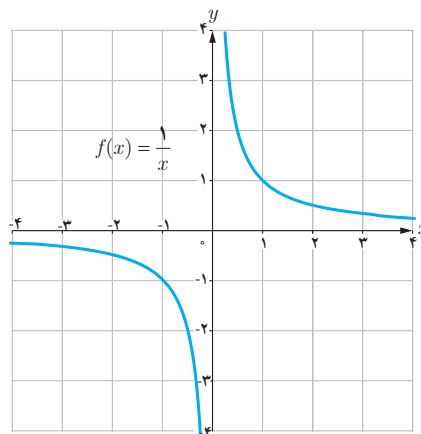
بنابراین $f'(x) = 2x$. همان گونه که قبلاً ذکر شد دامنه تابع f' ، مجموعه اعداد حقیقی است. به کمک این دستور مقدار مشتق تابع $f(x) = x^2$ در هر نقطه را می‌توان حساب کرد، به طور مثال:

$$f'(-\frac{1}{5}) = -\frac{2}{5}, \quad f'(\sqrt{7}) = 2\sqrt{7} \quad \text{و} \quad f'(5^\circ) = 10^\circ$$

❖ **مثال:** اگر $f(x) = \frac{1}{x}$ ، تابع مشتق و دامنه آن را به دست آورید. $f'(3)$ را از دو روش به دست آورید:
با استفاده از تابع مشتق و سپس با استفاده از تعریف مشتق در $x = 3$.

❖ **حل:** $f'(0)$ وجود ندارد. دامنه f' برابر $\mathbb{R} - \{0\}$ است. اگر $x \neq 0$ داریم:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x - x - h}{hx(x+h)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-h}{hx(x+h)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-1}{x(x+h)} = -\frac{1}{x^2} \end{aligned}$$



با استفاده از دستور فوق داریم: $f'(3) = \frac{-1}{9}$ البته مشتق f در هر نقطه دیگر ($x \neq 0$) را نیز به کمک این دستور می‌توان

محاسبه کرد، به طور مثال: $f'(\sqrt{5}) = \frac{-1}{5}$ و $f'(-2) = -\frac{1}{4}$ ، $f'(3)$ را به طور مستقیم نیز می‌توان حساب کرد:

$$f'(3) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{3}}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\frac{3-x}{3x}}{x-3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{-(x-3)}{3x(x-3)} = -\frac{1}{9}$$

در عمل هنگام حل مسائل با توجه به شرایط هر یک از دو روش فوق ممکن است مورد استفاده قرار گیرد.

کارد کلاس

اگر $f(x) = \begin{cases} 5x & x \neq 1 \\ 2 & x = 1 \end{cases}$ دامنه f و دامنه f' را محاسبه کنید و ضابطه f' را به دست آورید. نمودار f و نمودار f' را رسم کنید.

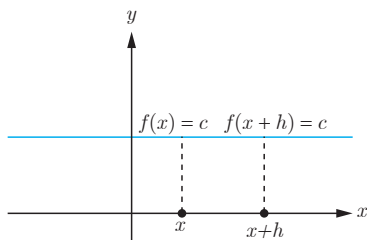
اکنون آماده هستیم که برای برخی از توابع، تابع مشتق را محاسبه کنیم.

محاسبه تابع مشتق برخی توابع

۱ اگر $f(x) = c$ آن‌گاه $f'(x) = 0$. به عبارت دیگر مشتق تابع ثابت در هر نقطه برابر صفر است.

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{c - c}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 0 = 0$$

به طور مثال اگر $f(x) = 7$ و $g(x) = -\frac{2}{5}$ آن‌گاه $f'(x) = 0$ و $g'(x) = 0$.



۲ اگر $n \in \mathbb{N}$ و $f(x) = x^n$ آن گاه: $f'(x) = nx^{n-1}$.

این دستور کاربرد زیادی دارد. قبلاً ثابت کردیم که اگر $f(x) = x^2$ ، آن گاه $f'(x) = 2x$. همچنین اگر $f(x) = x^3$ ، به کمک این دستور نشان می‌دهیم که: $f'(x) = 3x^2$. ابتدا این رابطه آخر را ثابت می‌کنیم و از روش ارائه شده برای اثبات دستور مشتق $f(x) = x^n$ استفاده می‌کنیم. اگر $f(x) = x^3$ داریم:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^3 - x^3}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h-x)[(x+h)^2 + x(x+h) + x^2]}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h[(x+h)^2 + x(x+h) + x^2]}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} [(x+h)^2 + x(x+h) + x^2] = x^2 + x^2 + x^2 = 3x^2 \end{aligned}$$

اکنون اگر $f(x) = x^n$ ، محاسبات کمی دشوارتر می‌شود، اما در عوض دستور مهم‌تری را ثابت کرده‌ایم.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\cancel{x} + h - \cancel{x})[(x+h)^{n-1} + (x+h)^{n-2}x + \dots + (x+h)x^{n-2} + x^{n-1}]}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} [(x+h)^{n-1} + (x+h)^{n-2}x + \dots + (x+h)x^{n-2} + x^{n-1}] \\ &= \underbrace{x^{n-1} + x^{n-1} + \dots + x^{n-1} + x^{n-1}}_{n} = nx^{n-1} \end{aligned}$$

۲ به طور کلی اگر n یک عدد صحیح باشد و $f(x) = x^n$ آن گاه: $f'(x) = nx^{n-1}$.

❖ مثال: اگر $f(x) = \frac{1}{x}$ و $x \neq 0$ قبلاً دیدید که $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$.

همچنین با استفاده از دستور اخیر داریم: $f(x) = \frac{1}{x} = x^{-1} \Rightarrow f'(x) = -x^{-1-1} = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$

* ۲ اگر $f(x) = \sqrt{x}$ و $x > 0$ آن گاه $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{x+h} - \sqrt{x})(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x+h-x}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \end{aligned}$$

* در مورد توابع رادیکالی در این کتاب فقط مشتق تابع $\sqrt{f(x)}$ و $\sqrt[3]{f(x)}$ که $f(x)$ گویاست، مورد نظر است، رعایت این موضوع در ارزشیابی‌ها الزامی است.

۵ اگر $f(x) = \sqrt{ax+b}$ و $ax+b > 0$ آن گاه $f'(x) = \frac{a}{2\sqrt{ax+b}}$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{a(x+h)+b} - \sqrt{ax+b}}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{a(x+h)+b} - \sqrt{ax+b})(\sqrt{a(x+h)+b} + \sqrt{ax+b})}{h(\sqrt{a(x+h)+b} + \sqrt{ax+b})} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{ax+ah+b - ax-b}{h(\sqrt{a(x+h)+b} + \sqrt{ax+b})} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a}{\sqrt{a(x+h)+b} + \sqrt{ax+b}} = \frac{a}{2\sqrt{ax+b}} \end{aligned}$$

۶ اگر $f(x) = \sqrt[3]{x}$ آن گاه $f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x+h} - \sqrt[3]{x}}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\sqrt[3]{x+h} - \sqrt[3]{x})(\sqrt[3]{(x+h)^2} + \sqrt[3]{x(x+h)} + \sqrt[3]{x^2})}{h(\sqrt[3]{(x+h)^2} + \sqrt[3]{x(x+h)} + \sqrt[3]{x^2})} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x+h-x}{h \cdot A} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} \end{aligned}$$

۷ اگر توابع f و g در $x = a$ مشتق پذیر باشند، آن گاه توابع kf ($k \in \mathbb{R}$)، $f \pm g$ ، fg و $\frac{f}{g}$ ($g(a) \neq 0$) نیز در $x = a$ مشتق پذیرند و داریم:

الف) $(f \pm g)'(a) = f'(a) \pm g'(a)$

ب) $(kf)'(a) = kf'(a)$

پ) $(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$

ت) $\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - g'(a)f(a)}{(g(a))^2}$

به کمک تعریف مشتق هر یک از روابط بالا را می توان ثابت نمود، اما در این کتاب به اثبات آنها نمی پردازیم. ❀ مثال: مشتق چند تابع محاسبه شده است.

الف) $f(x) = -\frac{2}{3}x^3 \Rightarrow f'(x) = -\frac{2}{3}x^2$

ب) $g(x) = x^5 + 4x^3 - \sqrt{2}x + 1 \Rightarrow g'(x) = 5x^4 + 12x^2 - \sqrt{2}$

پ) $h(x) = (2x^3+1)(-x^2+7x-2) \Rightarrow h'(x) = 6x^2(-x^2+7x-2) + (2x^3+1)(-2x+7)$

ت) $t(x) = \frac{x^2-4}{3x+1} \Rightarrow t'(x) = \frac{2x(3x+1) - 3(x^2-4)}{(3x+1)^2}$

۱ مشتق تابع‌های زیر را به دست آورید:

الف) $f(x) = \frac{1}{x-4}$

ب) $g(x) = \sqrt{x}(3x^2 + 5)$

پ) $h(x) = \frac{x}{2x^2 + x - 1}$

۲ اگر f و g توابع مشتق پذیر باشند و $f(2) = 3$ ، $f'(2) = 5$ ، $g(2) = 8$ و $g'(2) = -6$ مقدار $(fg)'(2)$ و $(\frac{f}{g})'(2)$ را به دست آورید.

مشتق توابع مثلثاتی

توابع $f(x) = \sin x$ و $g(x) = \cos x$ مشتق پذیر هستند و داریم:

$f'(x) = \cos x$ و $g'(x) = -\sin x$

❁ **اثبات:** با استفاده از تعریف مشتق داریم:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin x \cos h + \cos x \sin h - \sin x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin x(\cos h - 1) + \cos x \sin h}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left(\sin x \frac{\cos h - 1}{h} \right) + \lim_{h \rightarrow 0} \left(\cos x \frac{\sin h}{h} \right) \end{aligned}$$

در حسابان (۱) دیدیم که: $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos h - 1}{h} = 0$ ، $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h}{h} = 1$

بنابراین: $f'(x) = (\sin x)(0) + (\cos x)(1) = \cos x$ و در نتیجه

به طریق مشابه اگر $g(x) = \cos x$ داریم:

$$\begin{aligned} g'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(x+h) - \cos x}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos x \cos h - \sin x \sin h - \cos x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos x(\cos h - 1) - \sin x \sin h}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \cos x \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\cos h - 1)}{h} - \lim_{h \rightarrow 0} \sin x \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h}{h} \\ &= (\cos x)(0) - (\sin x)(1) = -\sin x \Rightarrow g'(x) = -\sin x \end{aligned}$$

با استفاده از دو دستور فوق می توان مشتق بسیاری از توابع مثلثاتی را به دست آورد.

❖ **مثال:** مشتق $f(x) = \tan x$ را به دست آورید.

$$f(x) = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \Rightarrow f'(x) = \frac{(\cos x)(\cos x) + (\sin x)(\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$$

کارد کلاس

مشتق توابع زیر را به دست آورید.

الف) $f(x) = \sin x \tan x$

ب) $g(x) = \frac{5 \cos x}{1 - \sin x}$

مشتق تابع مرکب / قاعده زنجیری

اگر f و g دو تابع مشتق پذیر باشند، در این صورت تابع مرکب $f \circ g$ مشتق پذیر است و داریم:

$$(f \circ g)'(x) = g'(x)f'(g(x))$$

❖ **مثال:** اگر $h(x) = (x^2 + 3x + 1)^6$ ، مطلوب است $h'(x)$.

❖ **حل:** اگر $f(x) = x^6$ و $g(x) = x^2 + 3x + 1$. آن گاه: $h(x) = f(g(x))$

$$h'(x) = g'(x)f'(g(x)) = (2x+3)f'(g(x))$$

اگر $g(x) = u$ آن گاه لازم است که $f'(u)$ را پیدا کنیم.

$$f(u) = u^6 \Rightarrow f'(u) = 6u^5 = 6(g(x))^5 = 6(x^2 + 3x + 1)^5$$

بنابراین:

$$h'(x) = (2x+3)(6)(x^2 + 3x + 1)^5$$

دستور فوق را به صورت زیر نیز می توان ارائه کرد،

اگر f تابعی بر حسب u و u تابعی از x باشد:

$$y = f(u) \Rightarrow y' = u'f'(u)$$

❖ **مثال:** مشتق تابع $y = \sin^2 x$ را به دست آورید.

❖ **حل:** با فرض $\sin x = u$ داریم: $y = u^2$ و از آنجا:

$$y' = u' \cdot 2u = (\cos x)(2)(\sin x) = 2 \sin x \cos x$$

مشتق تابع‌های زیر را به دست آورید.

الف) $f(x) = (x^2 + 1)^3(5x - 1)$

ب) $g(x) = \cos^2 x$

پ) $h(x) = \sin(3x^2 + 5)$

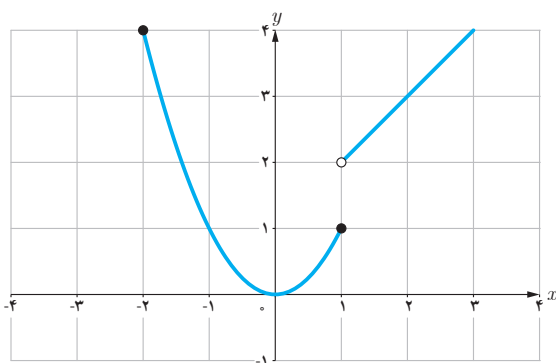
مشتق‌پذیری روی یک بازه

تابع f روی بازه (a, b) مشتق‌پذیر است هرگاه، در هر نقطه این بازه مشتق‌پذیر باشد.
تابع f روی بازه $[a, b]$ مشتق‌پذیر است، هرگاه f در بازه (a, b) مشتق‌پذیر باشد و در نقطه a مشتق راست و در b مشتق چپ داشته باشد.

مشتق‌پذیری روی بازه‌های $[a, b]$ و (a, b) را به طور مشابه تعریف کنید.

تابع f روی بازه $[a, b]$ مشتق‌پذیر است هرگاه ...

تابع f روی بازه (a, b) مشتق‌پذیر است هرگاه ...



اگر $D_f = \mathbb{R}$ و f در هر عدد حقیقی مشتق‌پذیر باشد،
گوییم f روی بازه $(-\infty, +\infty)$ مشتق‌پذیر است.

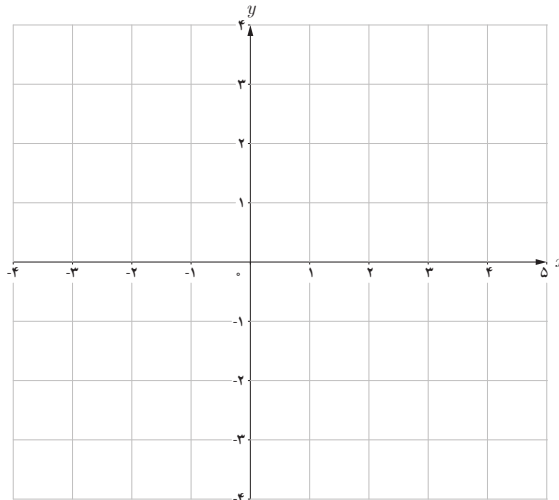
❖ **مثال:** تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 & -2 \leq x \leq 1 \\ x+1 & x > 1 \end{cases}$ را در نظر
می‌گیریم.

f روی بازه‌های $[1, \infty)$ و $[-2, 1]$ مشتق‌پذیر است. ولی

f روی بازه $[1, 2]$ مشتق‌پذیر نیست (چرا؟)

$$f(x) = \begin{cases} 2x+4 & x < -1 \\ x^2-1 & -1 \leq x < 2 \\ -x+5 & 2 < x < 5 \end{cases} \text{ اگر } f(x) \text{ نمودار } f \text{ را رسم کنید و مشتق پذیری } f \text{ را روی بازه‌های } [-1, 1], (2, 5) \text{ و } [-2, 0]$$

بررسی کنید.



مشتق مرتبه دوم

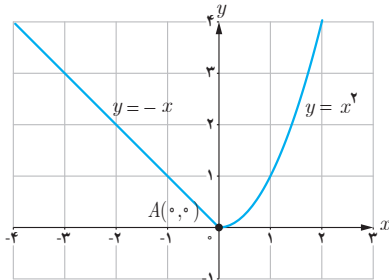
مشتق تابع $y = f(x)$ با نماد $y' = f'(x)$ نمایش داده شد. به همین ترتیب اگر تابع مشتق، مشتق پذیر باشد، مشتق مرتبه دوم $y = f(x)$ را به $y'' = f''(x)$ نمایش می‌دهیم و برای محاسبه آن از تابع $y' = f'(x)$ نسبت به x مشتق می‌گیریم.

❖ مثال: اگر $y = 3x^4 + 2x^2 - 1$ آن گاه:

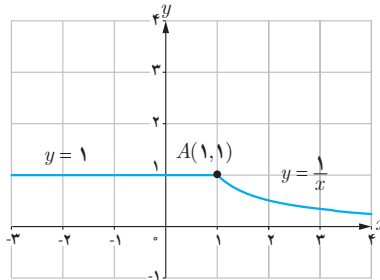
$$y' = 12x^3 + 4x, \quad y'' = 36x^2 + 4$$

۱ دو تابع مختلف مانند f و g مثال بزنید که هر دو در $x = 2$ پیوسته باشند ولی در این نقطه مشتق پذیر نباشند.

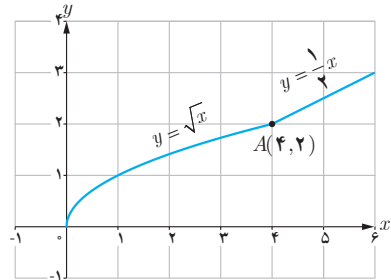
۲ با محاسبه مشتق راست و مشتق چپ توابع داده شده در نقطه A ، نشان دهید که این توابع در نقطه A مشتق پذیر نیستند.



(الف)



(ب)



(پ)

۳ تابع $f(x) = \begin{cases} 5x - 4 & x < 0 \\ x^2 & 0 \leq x \leq 3 \\ x + 6 & x > 3 \end{cases}$ داده شده است.

(ب) نشان دهید که $f'(0)$ و $f'(3)$ وجود ندارند.

(ت) نمودار تابع f' را رسم کنید.

(الف) نمودار تابع f را رسم کنید.

(پ) ضابطه تابع مشتق را بنویسید.

۴ نمودار تابعی را رسم کنید که مشتق آن

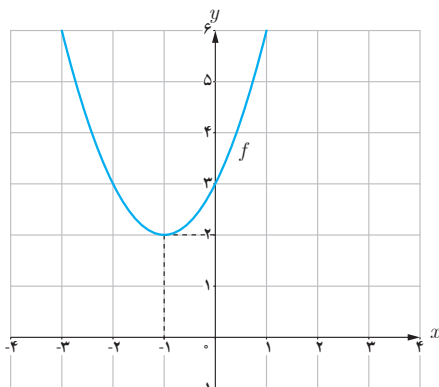
(ب) در $x = 2$ برابر ۳ شود.

(ت) در تمام نقاط یکسان باشد.

(الف) در یک نقطه برابر صفر شود.

(پ) در تمام نقاط مثبت باشد.

(ث) در تمام نقاط منفی باشد.



۵ (الف) با استفاده از نمودار تابع $f(x) = x^2 + 2x + 3$ (شکل

مقابل) مقادیر زیر را به ترتیب صعودی مرتب کنید.

$f'(2)$ و $f'(-1)$ و $f'(0)$ و $f'(3)$

(ب) صحت ادعای خود در (الف) را با محاسبه مشتق تابع

$f(x) = x^2 + 2x + 3$ بررسی کنید.

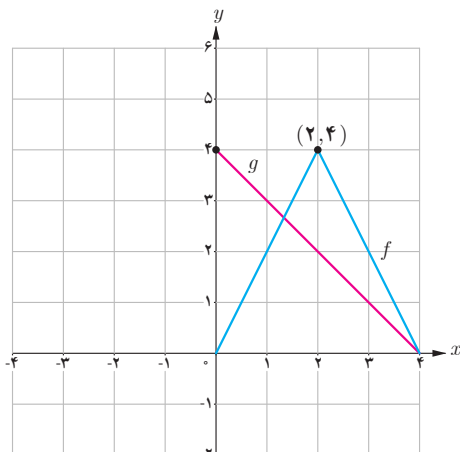
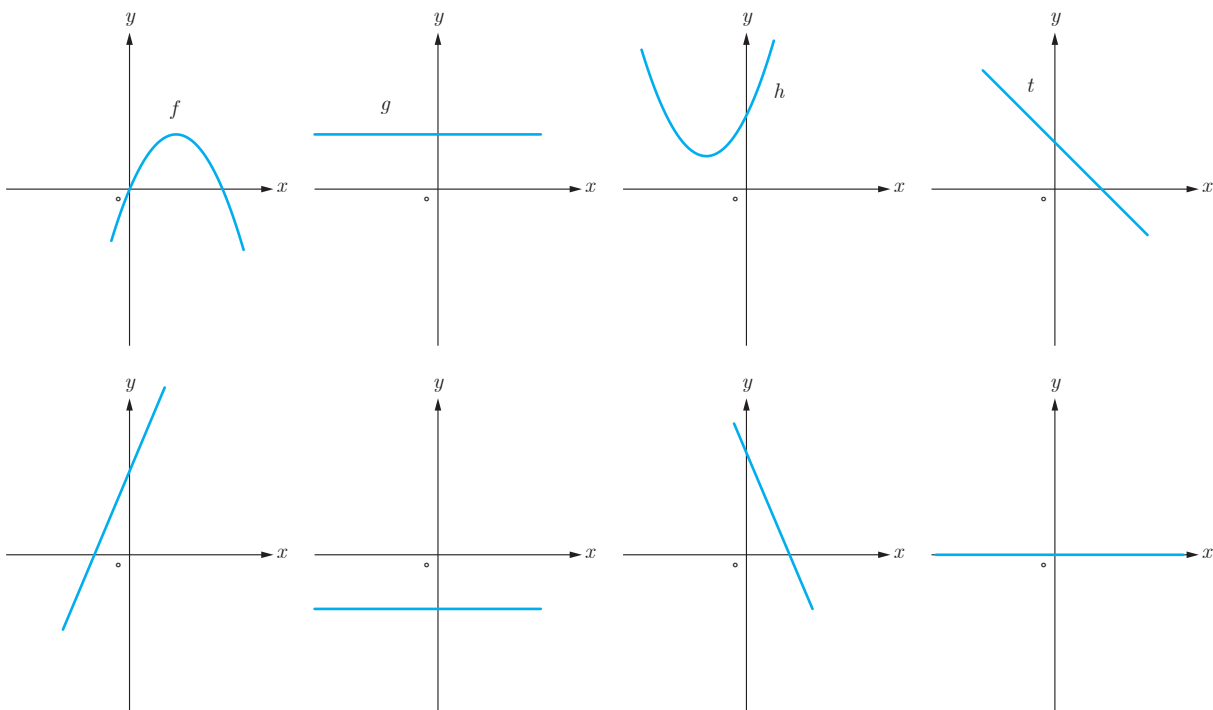
(پ) تابع مشتق را رسم کنید.

۶ مشتق پذیری تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 + 3 & x \geq 1 \\ 2x & x < 1 \end{cases}$ را در نقطه $x = 1$ بررسی کنید.

۷ سه تابع مختلف مثال بزنید که مشتق آنها با هم برابر باشند.

۸ اگر $f(x) = |x^2 - 4|$ به کمک تعریف مشتق، مشتق پذیری f را در نقاط به طول های ۲ و -۲ بررسی کنید.

۹ نمودار توابع f و g و h و t را به نمودار مشتق آنها، نظیر کنید.



۱۰ نمودار توابع f و g را در شکل مقابل در نظر بگیرید.

الف) اگر $h(x) = f(x) \cdot g(x)$ مطلوب است $h'(1)$ ، $h'(2)$ و $h'(3)$

ب) اگر $k(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ مطلوب است $k'(1)$ ، $k'(2)$ و $k'(3)$

۱۱ اگر $f'(1) = 3$ و $g'(1) = 5$ مطلوب است، $(f+g)'(1)$ و $(3f+2g)'(1)$

۱۲ اگر $f(x) = \begin{cases} x^2 & x \leq 0 \\ x & x > 0 \end{cases}$ نشان دهید $f'_+(0)$ و $f'_-(0)$ موجودند ولی $f'(0)$ موجود نیست.

۱۳ مشتق توابع داده شده را بیابید.

الف) $f(x) = (3x^2 - 4)(2x - 5)^3$

پ) $f(x) = (\sqrt{3x+2})(x^3 + 1)$

ب) $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 1}{-3x + 2}$

ت) $f(x) = \frac{9x - 2}{\sqrt{x}}$

۱۴ مشتق توابع مثلثاتی زیر را به دست آورید.

الف) $f(x) = \sin^2 x + \cos^2 x$

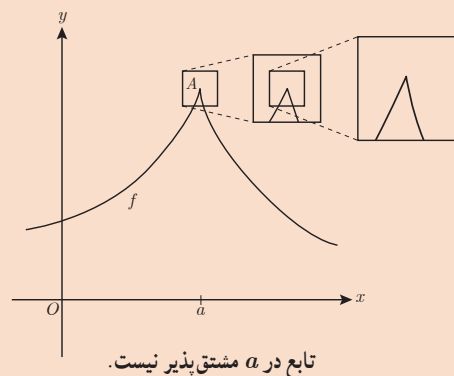
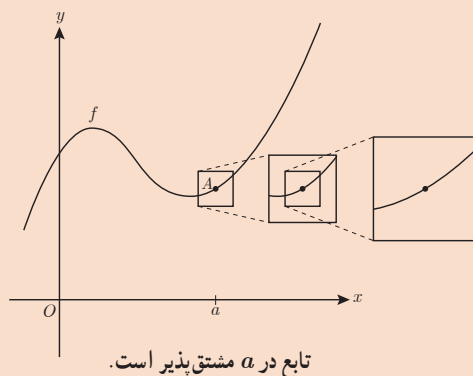
پ) $f(x) = \operatorname{tg}^2 x - 2 \cos x$

ب) $f(x) = \frac{1 - \sin x}{1 + \sin x}$

ت) $f(x) = \sin x \cos^2 x$

خواندنی

مشتق پذیری در یک نقطه به صورت شهودی می تواند برحسب رفتار تابع در نزدیکی نقطه $A(a, f(a))$ تعبیر شود. اگر نمودار تابع را در نزدیک نقطه A در نظر بگیریم و مرتباً از نمای نزدیک تری به نمودار نگاه کنیم، هنگامی که f در a مشتق پذیر باشد، نمودار منحنی شبیه یک خط راست می شود.

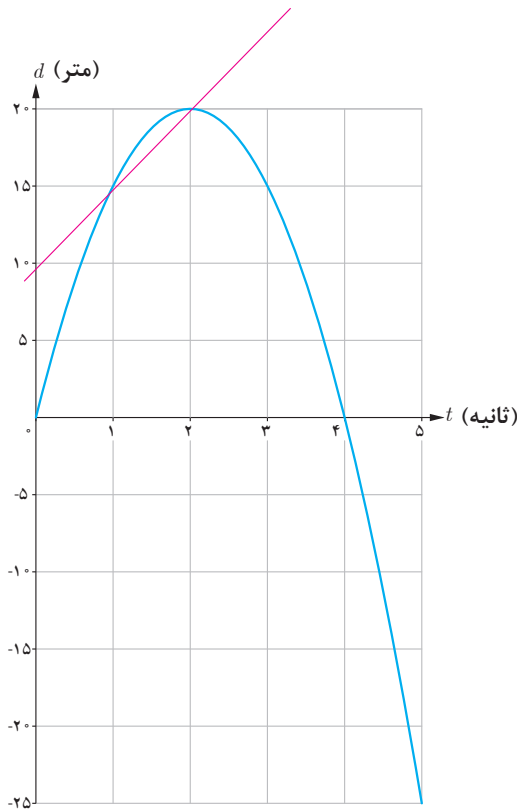


آهنگ متوسط تغییر و آهنگ لحظه‌ای تغییر

با مفهوم سرعت متوسط در فیزیک آشنا شده‌اید. اگر اتومبیلی در امتداد خط راست مسافت 28° کیلومتر را در ۴ ساعت طی کند سرعت متوسط آن در این زمان $\frac{28^\circ}{4} = 7^\circ$ کیلومتر بر ساعت است. با این حال ممکن است اتومبیل در لحظات مختلف سرعت‌های متفاوتی داشته باشد. همچنین مطابق آنچه که در درس فیزیک آموخته‌اید، سرعت متوسط روی یک بازه زمانی خیلی کوچک، به سرعت لحظه‌ای نزدیک است. اگر نمودار مکان - زمان در مورد حرکت اتومبیل را داشته باشیم، سرعت متوسط اتومبیل بین هر دو لحظه دلخواه، برابر شیب خطی است که نمودار مکان - زمان را در آن دو لحظه قطع می‌کند.

همچنین در درس فیزیک سرعت لحظه‌ای در هر لحظه دلخواه t ، برابر شیب خط مماس بر نمودار در آن لحظه تعریف شد. با آنچه که در درس‌های گذشته ملاحظه کردید، می‌توان گفت که سرعت در لحظه t همان مقدار مشتق تابع (مکان - زمان) در لحظه t است. مفهوم مشتق را در بسیاری از پدیده‌های دیگر نیز می‌توان مشاهده کرد. ابتدا در مورد سرعت متوسط و سرعت لحظه‌ای به ذکر مثالی خواهیم پرداخت.





❖ مثال: خودرویی در امتداد خط راست طبق معادله

$d(t) = -5t^2 + 20t$ حرکت می‌کند، که در آن $0 \leq t \leq 5$ برحسب ثانیه است. با در نظر گرفتن نمودار مکان - زمان (شکل):

الف) سرعت متوسط خودرو را در بازه‌های زمانی $[1, 2]$ ، $[1, 1/5]$ و $[1, 1/4]$ به دست آورید.

ب) اگر به همین ترتیب بازه‌های کوچک‌تری مانند $[1, 1/3]$ و $[1, 1/2]$ و ... اختیار کنیم، سرعت متوسط در این بازه‌ها به چه عددی نزدیک می‌شود؟

پ) سرعت لحظه‌ای را با استفاده از مشتق تابع d در $t=1$ به دست آورید.

ت) سرعت لحظه‌ای در $t=2$ و $t=3$ چقدر است؟

❖ حل:

الف)

$$\text{سرعت متوسط در بازه زمانی } [1, 2] = \frac{d(2) - d(1)}{2 - 1} = \frac{20 - 15}{1} = 5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$\text{سرعت متوسط در بازه زمانی } [1, 1/5] = \frac{d(1/5) - d(1)}{1/5 - 1} = \frac{18/5 - 15}{-4/5} = \frac{3/5}{-4/5} = -3/4 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$\text{سرعت متوسط در بازه زمانی } [1, 1/4] = \frac{d(1/4) - d(1)}{1/4 - 1} = \frac{18/2 - 15}{-3/4} = \frac{3/2}{-3/4} = -2 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

ب) اگر به همین ترتیب بازه‌های زمانی کوچک‌تری اختیار کنیم، سرعت متوسط به سرعت لحظه‌ای در $t=1$ نزدیک می‌شود.

پ) $d'(t) = -10t + 20$ ، پس $d'(1) = 10$

ت) $d'(2) = 0$ ، $d'(3) = -10$

سرعت در لحظه $t=2$ ، صفر است و مماس بر منحنی در این نقطه موازی محور x هاست و خودرو ساکن است. مقدار سرعت در لحظه‌های $t=1$ و $t=3$ برابر است و علامت منفی در مورد $d'(3)$ نشان می‌دهد که جهت حرکت در $t=3$ برخلاف جهت حرکت در $t=1$ است.

به جز مفهوم سرعت، در مطالعه پدیده‌های زیاد دیگری که در قالب یک تابع نمایش داده می‌شوند با موضوع نسبت تغییرات متغیر وابسته به تغییرات متغیر مستقل مواجه می‌شویم. نسبت تغییرات دما به تغییرات زمان و همچنین نسبت تغییرات جمعیت نسبت به زمان نمونه‌های دیگری از اینگونه تغییرات هستند.

به طور کلی آهنگ متوسط تغییر یک تابع را در بازه‌ای مانند $[a, a+h]$ به شکل زیر تعریف می‌کنیم:

$$\text{آهنگ متوسط تغییر تابع } f \text{ در بازه } [a, a+h] = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

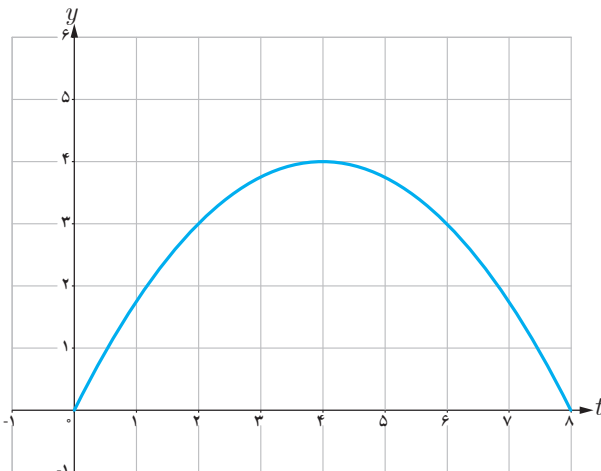
همچنین آهنگ تغییر لحظه‌ای تابع f را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\text{آهنگ لحظه‌ای تغییر تابع } f \text{ در نقطه } x=a = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(a)$$

آهنگ متوسط تغییر با شیب خط قاطع و آهنگ لحظه‌ای تغییر با مقدار مشتق و شیب خط مماس در آن نقطه برابرند.

کارد کلاس

- ۱ نمودار زیر موقعیت یک ذره را در لحظه t نمایش می‌دهد. مقادیر زیر را از کوچک به بزرگ مرتب کنید: (محاسبه عددی لازم نیست.)



A سرعت متوسط بین $t=1$ و $t=3$

B سرعت متوسط بین $t=5$ و $t=6$

C سرعت لحظه‌ای در $t=1$

D سرعت لحظه‌ای در $t=3$

E سرعت لحظه‌ای در $t=5$

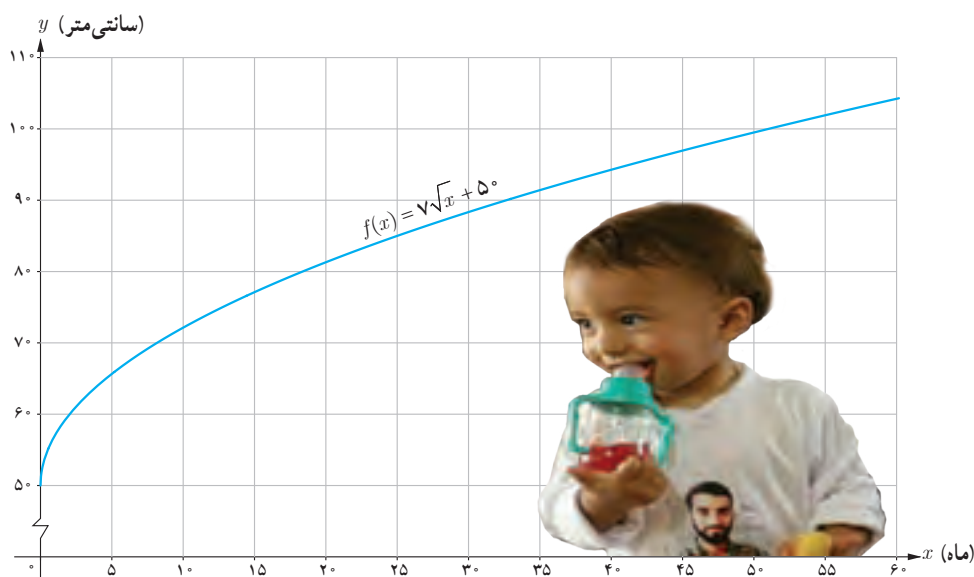
F سرعت لحظه‌ای در $t=6$

کاربردهای دیگر از آهنگ متوسط تغییر و آهنگ لحظه‌ای تغییر

آهنگ رشد: همان گونه که در حسابان (۱) ملاحظه کردید تابع $f(x) = \sqrt{x} + 50$ قد متوسط کودکان را بر حسب سانی متر تا حدود ۶۰ ماهگی نشان می‌دهد، که در آن x مدت زمان پس از تولد (بر حسب ماه) است. آهنگ متوسط رشد در بازه زمانی $[0, 60]$ چنین است:

$$\frac{f(60) - f(0)}{60 - 0} = \frac{\sqrt{60} + 50 - 50}{60} \approx \frac{0.9}{\text{ماه}} \text{ سانی متر}$$

یعنی در طی ۵ سال، رشد متوسط قد حدود 0.9 سانی متر در هر ماه است.



کاردر کلاس

الف) آهنگ متوسط رشد در بازه زمانی $[0, 25]$ چقدر است؟

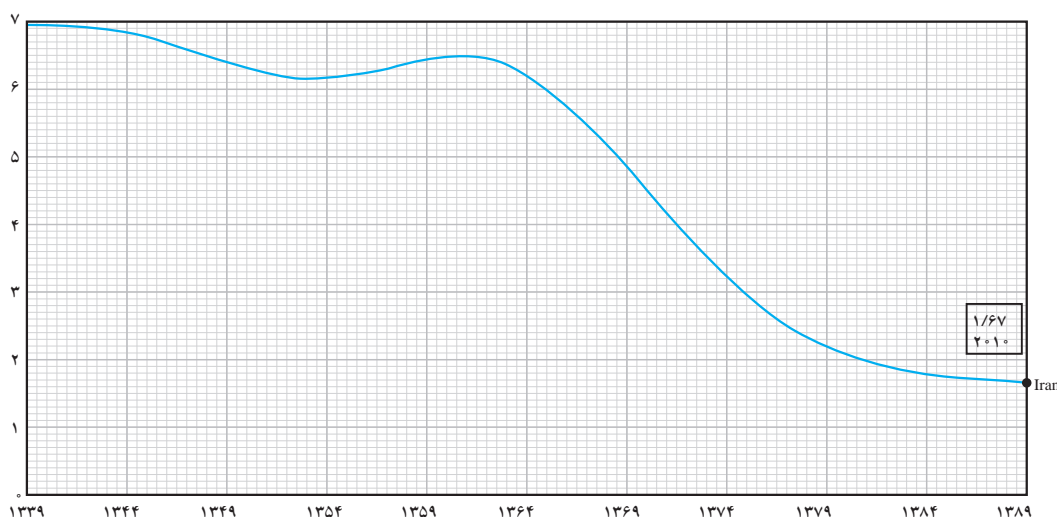
ب) آهنگ لحظه‌ای تغییر قد کودک را در ۲۵ ماهگی و ۴۹ ماهگی، با هم مقایسه کنید. کدام یک بیشتر است؟

پ) اگر قد علی در ۱۶ ماهگی، ۸۰ سانی متر و در ۳۶ ماهگی، ۹۵ سانی متر باشد، آهنگ متوسط تغییر رشد او را در این فاصله حساب کنید و با نمودار بالا مقایسه کنید.

نرخ باروری: نمودار زیر روند رو به کاهش نرخ باروری در کشورمان را در طی نیم قرن نمایش می‌دهد. آهنگ متوسط تغییر باروری در بازه زمانی [۱۳۳۹, ۱۳۸۹] در مدت ۵۰ سال برابر است با:

$$\frac{۱/۶-۷}{۱۳۸۹-۱۳۳۹} = \frac{-۵/۴}{۵۰} = -۰/۱۰۸$$

آهنگ متوسط تغییر باروری در بازه زمانی [۱۳۷۹, ۱۳۶۴] را به دست آورید. (با استفاده از مقادیر تقریبی روی نمودار) بازه زمانی را مشخص کنید که در آن آهنگ متوسط تغییر باروری مثبت باشد.

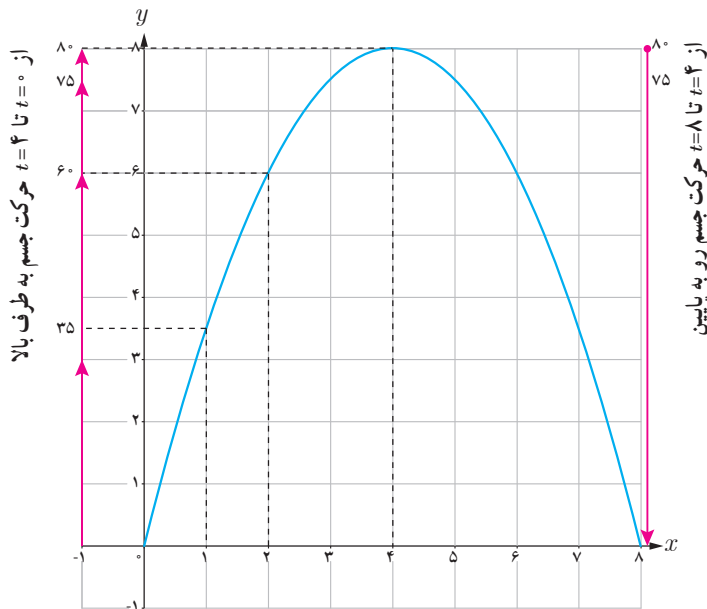


میانگین تعداد فرزندان متولد شده به ازای هر مادر ایرانی

خواندنی

نرخ باروری در ایران در سال‌های ۱۳۶۰ تا ۱۳۶۵ به حدود ۶/۵ فرزند رسید. با توجه به اینکه کشورمان امکانات لازم برای چنین رشد جمعیت بالایی را دارا نبود، سیاست‌های کاهش جمعیت و عوامل دیگر باعث شد که نرخ باروری تا سال ۱۳۸۵ به ۱/۹ کاهش یابد. بررسی‌ها نشان می‌دهند که کاهش باروری در ایران بزرگ‌ترین و سریع‌ترین کاهش باروری ثبت شده بود. کارشناسان معتقدند که باید سیاست‌های کاهش رشد جمعیت پس از کاهش نرخ باروری به حدود ۲/۵ فرزند متوقف می‌شد. کاهش رشد جمعیت مشکلات فراوانی نظیر کاهش نیروی کار و بحران سالمندی را در پی خواهد داشت. با ابلاغ سیاست‌های کلی «جمعیت» توسط رهبر معظم انقلاب اسلامی در سال ۱۳۹۳، و تغییر برنامه‌های وزارت بهداشت، براساس نتایج سرشماری عمومی نفوس و مسکن سال ۱۳۹۵، نرخ باروری به حدود ۲/۰۱ افزایش یافته است. با این حال نگرانی‌های مربوط به احتمال کاهش بیش از حد رشد جمعیت در سال‌های ۱۴۲۵ تا ۱۴۳۰ تأکید می‌کند که این سیاست‌ها تا دستیابی کامل به اهداف تعیین شده باید دنبال شود.

سرعت متوسط و سرعت لحظه‌ای



❁ مثال: جسمی را از سطح زمین به طور عمودی پرتاب می‌کنیم. جهت حرکت به طرف بالا را مثبت در نظر می‌گیریم. فرض کنیم ارتفاع این جسم از سطح زمین در هر لحظه از معادله $h(t) = -5t^2 + 40t$ به دست می‌آید. به طور مثال ۲ ثانیه پس از پرتاب این جسم در ارتفاع ۶۰ متری از سطح زمین است. به هر حال جسم پس از مدتی به زمین برمی‌گردد. نمودار مکان-زمان حرکت این جسم در شکل نشان داده شده است.

اگر سرعت متوسط این جسم در بازه‌های زمانی $[0, 2]$ ، $[1, 2]$ ، $[2, 3]$ و $[3, 4]$ را به ترتیب با v_1 ، v_2 ، v_3 و v_4 نمایش دهیم، داریم:

$$v_1 = \frac{h(2) - h(0)}{2 - 0} = \frac{60}{2} = 30 \text{ m/s}$$

$$v_2 = \frac{h(2) - h(1)}{2 - 1} = 25 \text{ m/s}$$

$$v_3 = \frac{h(3) - h(2)}{3 - 2} = \frac{75 - 60}{1} = 15 \text{ m/s}$$

$$v_4 = \frac{h(4) - h(3)}{4 - 3} = \frac{80 - 75}{1} = 5 \text{ m/s}$$

سرعت لحظه‌ای در زمان‌های $t=1$ ، $t=2$ ، $t=3$ و $t=4$ با استفاده از مشتق تابع h چنین به دست می‌آید:

$$h(t) = -5t^2 + 40t \Rightarrow h'(t) = -10t + 40$$

$$h'(1) = 30 \text{ m/s} \quad , \quad h'(2) = 20 \text{ m/s} \quad , \quad h'(3) = 10 \text{ m/s} \quad , \quad h'(4) = 0 \text{ m/s}$$

در $t=4$ جسم به بالاترین ارتفاع خود از سطح زمین (۸۰ متر) می‌رسد و در این لحظه سرعت آن برابر صفر (متر بر ثانیه) می‌شود. سپس جسم شروع به حرکت به طرف زمین می‌کند. سرعت متوسط در بازه $[4, 5]$ برابر $\frac{h(5) - h(4)}{5 - 4} = -5 \text{ m/s}$ و سرعت لحظه‌ای در $t=5$ برابر $h'(5) = -10 \text{ m/s}$ است. علامت منفی نشان می‌دهد که حرکت جسم رو به پایین است.

با توجه به مثال قبل :

الف) سرعت جسم هنگام پرتاب و هنگام برخورد به زمین را به دست آورید.

ب) سرعت متوسط جسم را در بازه زمانی $[5, 8]$ به دست آورید.

پ) لحظاتی را معلوم کنید که سرعت جسم 35 m/s و -35 m/s است.

تمرین

۱ جدول زیر درجه حرارت T (سانتی گراد) را در شهری از ساعت ۸ تا ۱۸ در یک روز نشان می دهد.

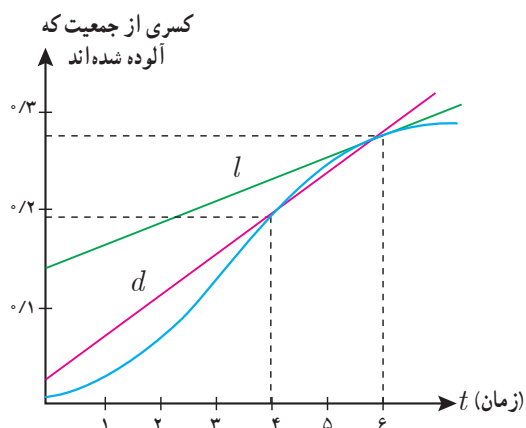
ساعت h	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲	۱۳	۱۴	۱۵	۱۶	۱۷	۱۸
درجه حرارت T	۱۱	۱۳	۱۴	۱۷	۱۹	۱۸	۱۷	۱۵	۱۳	۱۰	۹

آهنگ تغییر متوسط درجه حرارت نسبت به زمان را :

الف) از ساعت ۸ تا ساعت ۱۲ به دست آورید.

ب) از ساعت ۱۲ تا ساعت ۱۸ به دست آورید.

پ) پاسخها را تفسیر کنید.



۲ کسری از جمعیت یک شهر که به وسیله یک ویروس آلوده

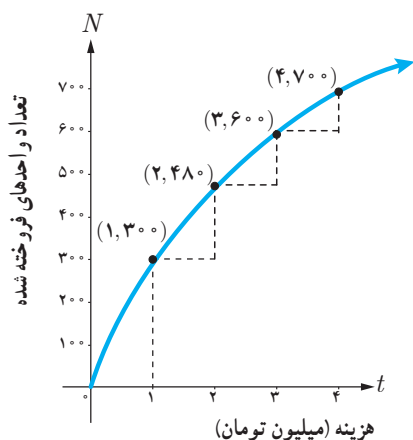
شده اند برحسب زمان (هفته) در نمودار روبه رو نشان داده شده است.

الف) شیب های خطوط l و d چه چیزهایی را نشان می دهند.

ب) گسترش آلودگی در کدام یک از زمان های $t=1$ ، $t=2$ یا $t=3$

بیشتر است؟

پ) قسمت ب را برای $t=4$ ، $t=5$ و $t=6$ بررسی کنید.



۳ نمودار روبه‌رو نمایش میزان فروش تعداد نوعی کالا (N) پس از صرف t میلیون تومان هزینه برای تبلیغ است. الف) آهنگ تغییر N بر حسب t را وقتی t از ۰ تا ۱، ۱ تا ۲، ۲ تا ۳ و ۳ تا ۴ تغییر می‌کند به دست آورید.

ب) به نظر شما چرا آهنگ تغییرات، وقتی که مقادیر t افزایش می‌یابند، در حال کاهش است؟

۴ معادله حرکت متحرکی به صورت $f(t) = t^2 - t + 1$ بر حسب متر در بازه زمانی $[0, 5]$ ثانیه داده شده است. در کدام لحظه سرعت لحظه‌ای با سرعت متوسط در بازه زمانی $[0, 5]$ با هم برابرند؟

۵ توپی از یک پل به ارتفاع ۱۱ متر به هوا پرتاب می‌شود. $f(t)$ نشان‌دهنده فاصله توپ از سطح زمین در زمان t است. برخی از مقادیر $f(t)$ در جدول زیر نمایش داده شده است.

t	ثانیه s	۰	۰/۱	۰/۲	۰/۳	۰/۴	۰/۵	۰/۶
$f(t)$	متر m	۱۱	۱۲/۴	۱۳/۸	۱۵/۱	۱۶/۳	۱۷/۴	۱۸/۴

بر اساس جدول کدام یک از مقادیر زیر می‌تواند سرعت توپ را هنگامی که در ارتفاع نظیر زمان ۰/۴ ثانیه، است نشان دهد؟

الف) $1/23 \text{ m/s}$ ب) $14/91 \text{ m/s}$ ج) $11/5 \text{ m/s}$ د) $16/03 \text{ m/s}$

۶ با توجه به مقادیر تابع f در جدول زیر، f' را برای نقاط داده شده تخمین بزنید. به طور مثال $f'(0) \approx -6$. بقیه جدول را کامل کنید.

x	۰	۵	۱۰	۱۵	۳۰
$f(x)$	۱۰۰	۷۰	۵۵	۴۶	۴۰
مقدار تقریبی $f'(x)$	-۶				

۷ کدام یک از عبارات زیر درست و کدام یک نادرست است :

- الف) آهنگ تغییر متوسط تابعی مانند f در بازه $[0, 1]$ همیشه کمتر از شیب آن منحنی در نقطه است.
 ب) اگر تابعی صعودی باشد، آهنگ تغییر متوسط آن، همواره صعودی است.
 پ) تابعی وجود ندارد که برای آن هم $f'(a) = 0$ و هم $f(a) = 0$.

۸ یک توده باکتری پس از t ساعت دارای جرم $m(t) = \sqrt{t} + 2t^3$ گرم است.

- الف) جرم این توده باکتری در بازه زمانی $3 \leq t \leq 4$ چند گرم افزایش می‌یابد؟
 ب) آهنگ رشد جرم توده باکتری در لحظه $t=3$ چقدر است؟

۹ گنجایش ظرفی 40 لیتر مایع است. در لحظه $t=0$ سوراخی در ظرف ایجاد می‌شود. اگر حجم مایع باقی‌مانده در ظرف پس از t ثانیه از رابطه $V = 40 \left(1 - \frac{t}{10}\right)^2$ به دست آید :

- الف) آهنگ تغییر متوسط حجم مایع در بازه زمانی $[0, 1]$ چقدر است؟
 ب) در چه زمانی، آهنگ تغییر لحظه‌ای حجم برابر آهنگ تغییر متوسط آن در بازه $[0, 100]$ می‌شود؟

کاربردهای مشتق

۵

فصل

- ۱ اکستریم‌های یک تابع و توابع صعودی و نزولی
- ۲ جهت تقعر نمودار یک تابع و نقطه عطف آن
- ۳ رسم نمودار توابع

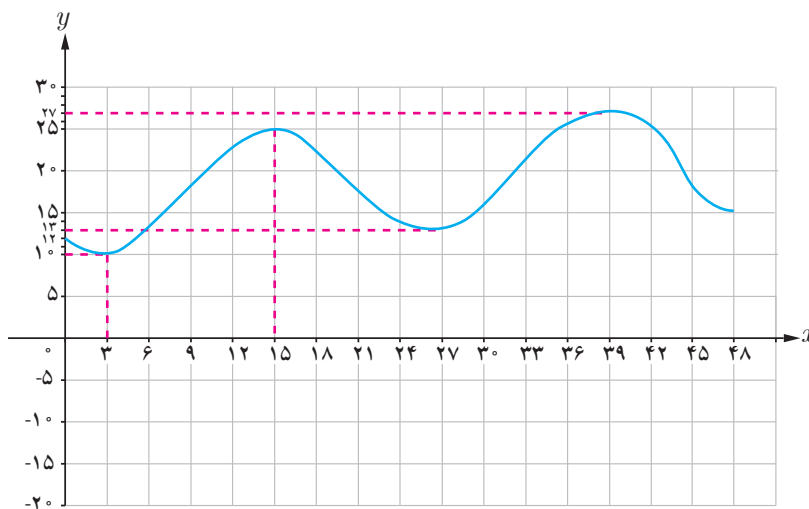
گردنه حیران (اردبیل)

سرعت لحظه‌ای یک اتومبیل، با مشتق معادله مکان - زمان نسبت به زمان و یا شیب خط مماس بر نمودار مکان زمان است. شتاب لحظه‌ای، مشتق دوم معادله مکان نسبت

اکسترم‌های یک تابع و توابع صعودی و نزولی

درس

نمودار زیر، نمودار تابع تغییرات دمای هوای یک شهر در دو شبانه‌روز متوالی است. اگر x زمان و y دما باشد؛ بیشترین و کمترین دما در این ۴۸ ساعت در چه زمان‌هایی بوده است و مقدار آنها چند است؟



نقاط به طول ۱۵ و ۳۹ به گونه‌ای هستند که مقدار تابع در آنها نسبت به مقادیر تابع در نقاط اطراف آنها (نقاط یک همسایگی حول آنها) بیشتر است، بدین خاطر اصطلاحاً گفته می‌شود تابع در این نقاط «ماکزیم نسبی» دارد. نقاط به طول ۳ و ۲۷ به گونه‌ای هستند که مقدار تابع در آنها نسبت به مقادیر تابع در نقاط اطراف آنها کمتر است، لذا اصطلاحاً گفته می‌شود تابع در این نقاط «مینیم نسبی» دارد. به طور دقیق‌تر می‌توان گفت:

تعریف:

اگر f یک تابع و $I \subseteq D_f$ یک همسایگی از نقطه c (بازه‌ی باز شامل نقطه c) باشد که الف) به ازای هر x متعلق به I داشته باشیم $f(x) \leq f(c)$ ، در این صورت $f(c)$ را یک ماکزیم نسبی تابع f می‌نامیم.

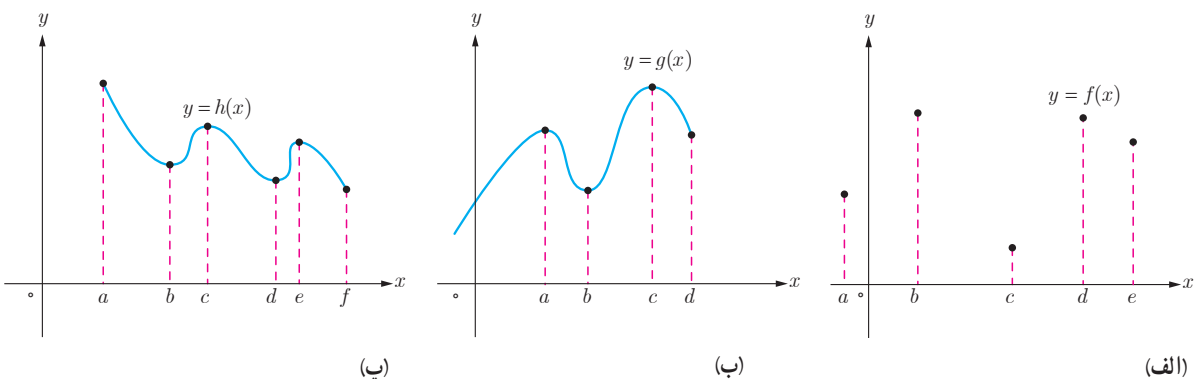
ب) به ازای هر x متعلق به I داشته باشیم $f(x) \geq f(c)$ ، در این صورت $f(c)$ را یک مینیم نسبی تابع f می‌نامیم.

دقت کنید که در نمودار، مقادیر ماکزیمم نسبی برابر ۲۵ و ۲۷ هستند و نقاط ماکزیمم نسبی نقاط (۲۵, ۱۵) و (۲۷, ۳۹) هستند و یا به عبارتی مقادیر ماکزیمم‌های نسبی در نقاطی به طول $x = ۱۵$ و $x = ۳۹$ اتفاق افتاده‌اند. به طریق مشابه مقادیر مینیمم نسبی ۱۰ و ۱۳ هستند و نقاط مینیمم نسبی نقاط (۱۰, ۳) و (۱۳, ۲۷) هستند و یا به عبارتی مقادیر مینیمم‌های نسبی در نقاطی به طول $x = ۱۰$ و $x = ۱۳$ اتفاق افتاده‌اند.

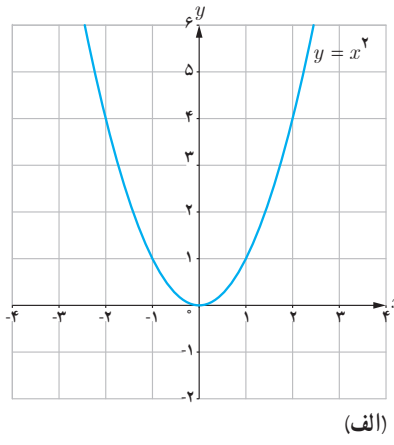
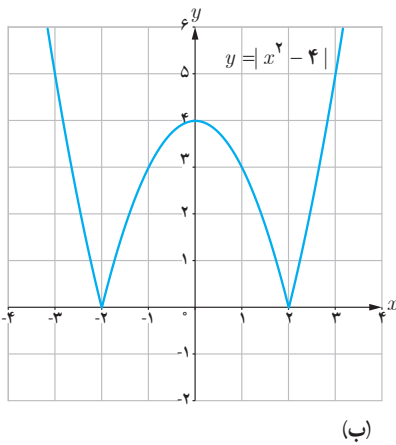
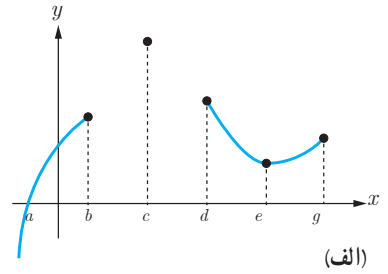
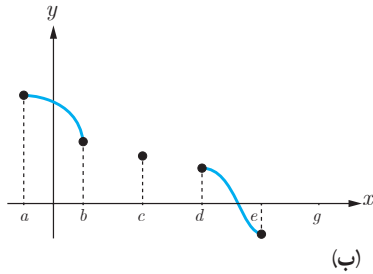
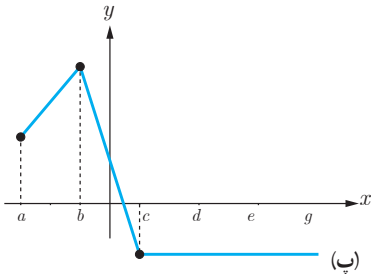
در بسیاری از مسائل فقط بیشترین و کمترین مقدار یک تابع در یک مجموعه اهمیت دارد. به بزرگ‌ترین مقدار تابع f در مجموعه I «ماکزیمم مطلق» این تابع در این مجموعه می‌گوییم. همچنین به کوچک‌ترین مقدار تابع f در مجموعه I «مینیمم مطلق» این تابع در این مجموعه می‌گوییم. بنابراین نقاط ماکزیمم مطلق و مینیمم مطلق تابع f در مجموعه I به ترتیب «بالترین» و «پایین‌ترین» نقطه نمودار تابع در آن مجموعه هستند و زمانی که می‌گوییم ماکزیمم مطلق تابع f در نقطه $x = a$ (منظور نقطه‌ای از تابع به طول $x = a$ است) اتفاق افتاده است یعنی $f(a)$ مقدار ماکزیمم مطلق و $(a, f(a))$ نقطه ماکزیمم مطلق تابع بر مجموعه مورد نظر است. به عبارتی برای هر $x \in I$ داریم $f(x) \leq f(a)$. همچنین وقتی می‌گوییم مینیمم مطلق تابع f در نقطه $x = a$ اتفاق افتاده است یعنی $f(a)$ مقدار مینیمم مطلق و $(a, f(a))$ نقطه مینیمم مطلق تابع بر مجموعه مورد نظر است.

❖ **تذکر:** گوییم تابع f در نقطه $x = c$ اکسترمم نسبی دارد هرگاه در این نقطه ماکزیمم نسبی یا مینیمم نسبی داشته باشد و اگر در نقطه $x = c$ ماکزیمم مطلق یا مینیمم مطلق داشته باشد می‌گوییم در آن نقطه اکسترمم مطلق دارد.

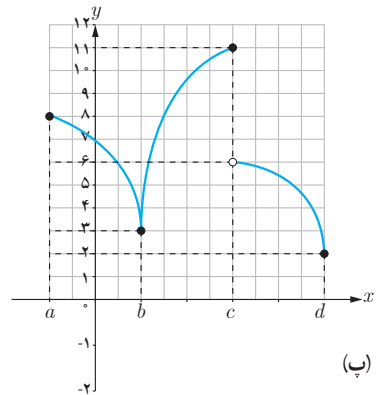
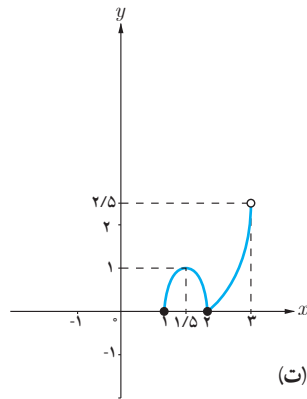
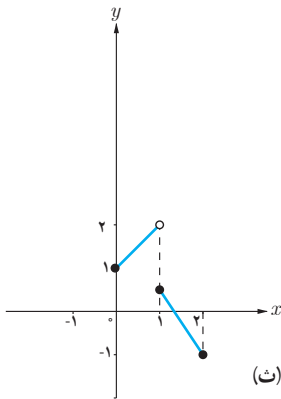
۱ در هر یک از نمودارهای توابع زیر مقدار ماکزیمم مطلق و مینیمم مطلق و همچنین طول نقاط ماکزیمم مطلق و مینیمم مطلق را مشخص نمایید.



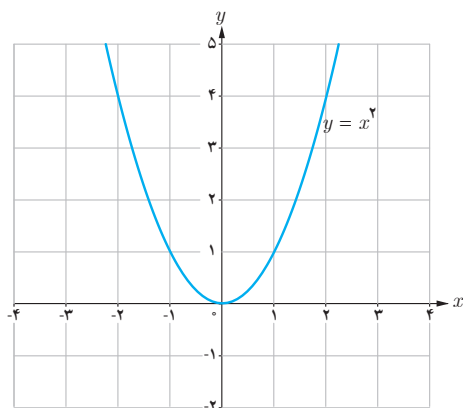
۲ دقت کنید که با توجه به تعریف، نقطهٔ ماکزیمم نسبی یا مینیمم نسبی به گونه‌ای است که تابع در یک همسایگی آن تعریف شده است اما نقطهٔ ماکزیمم مطلق و مینیمم مطلق لزماً نیست حتماً در چنین شرطی صدق کند. حال با توجه به این مطلب در هر نمودار زیر، نقاط ماکزیمم و مینیمم نسبی و ماکزیمم و مینیمم مطلق را مشخص نمایید.



۳ در هر یک از نمودارهای زیر، مقادیر و طول نقاط اکسترمم‌های نسبی و اکسترمم‌های مطلق را مشخص نمایید.



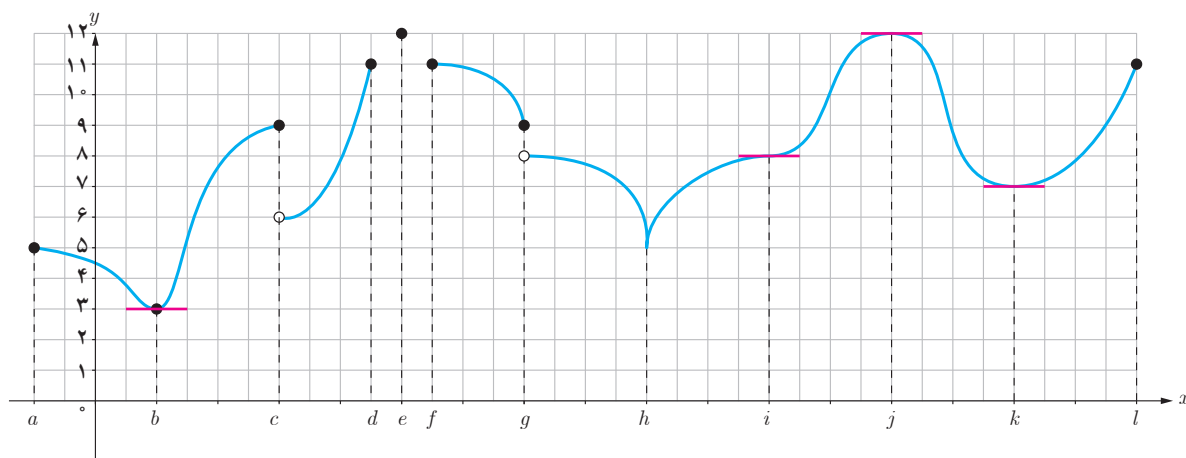
۴ نمودار یک تابع را رسم کنید که در نقطهٔ (۲, ۴) ماکزیمم نسبی و در نقطهٔ (۵, ۱) مینیمم نسبی دارد.



۵ تابع $f(x) = x^2$ را در نظر بگیرید.
 الف) وجود مقادیر ماکزیمم مطلق و مینیمم مطلق تابع f را در بازه‌های $[0, 1]$ و $(0, 1)$ بررسی کنید.
 ب) وجود اکسترم‌های مطلق تابع f را بر \mathbb{R} بررسی نمایید.

فعالیت

۱ در نمودار زیر نقاطی که تابع در آنها مماس افقی دارد؛ یعنی تمام جاهایی که مشتق در آنها وجود دارد و برابر صفر است مشخص شده‌اند. به سؤالات زیر پاسخ دهید.

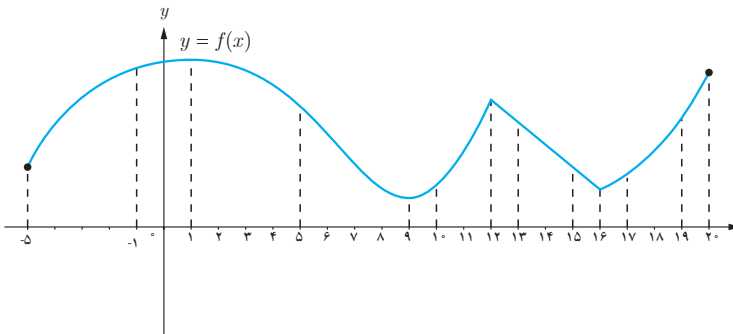


- الف) تمام نقاط اکسترم نسبی را مشخص نمایید.
 ب) تمام نقاطی که مشتق در آنها وجود ندارد را مشخص نمایید.
 پ) تمام نقاطی که مشتق برابر صفر است را بنویسید.
 ت) آیا در همهٔ نقاط اکسترم نسبی مشتق وجود دارد؟
 ث) در اکسترم‌های نسبی که مشتق در آنها وجود دارد، مقدار این مشتق چقدر است؟
 ج) آیا امکان دارد در نقطه‌ای مشتق برابر صفر باشد ولی آن نقطه اکسترم نسبی نباشد؟
 چ) آیا امکان دارد در نقطه‌ای مشتق وجود نداشته باشد ولی آن نقطه اکسترم مطلق باشد؟

۲ سعی کنید نمودارهای دیگری رسم کنید که در آنها نقاط اکسترممی باشد که مشتق در این نقاط موجود باشد (خط مماس بر منحنی در نقاط اکسترمم وجود داشته باشد). مقدار مشتق در این نقاط اکسترمم چقدر است؟

- ۳ با توجه به آنچه در قسمت‌های ۱ و ۲ دیدید، کدام یک از موارد زیر می‌تواند درست باشد؟
 الف) اگر $f'(c)$ وجود نداشته باشد، آنگاه $x = c$ یک نقطه اکسترمم نسبی نیست.
 ب) اگر $f'(c) = 0$ ، آنگاه $x = c$ یک نقطه اکسترمم نسبی است.
 پ) اگر $x = c$ طول یک نقطه اکسترمم نسبی باشد و $f'(c)$ موجود باشد، آنگاه $f'(c) = 0$.

فعالیت



- ۱ شکل روبه‌رو نمودار یک تابع پیوسته را نشان می‌دهد.

الف) وجود ماکزیمم مطلق و مینیمم مطلق را برای تابع f در بازه‌های بسته زیر بررسی کنید.

$$[-1, 0], [5, 10], [13, 15], [10, 13], [16, 20]$$

ب) وجود هر یک از مقادیر ماکزیمم مطلق و مینیمم مطلق را برای تابع f در بازه‌های باز زیر بررسی کنید.

$$(-1, 0), (5, 10), (13, 15), (10, 13), (16, 20)$$

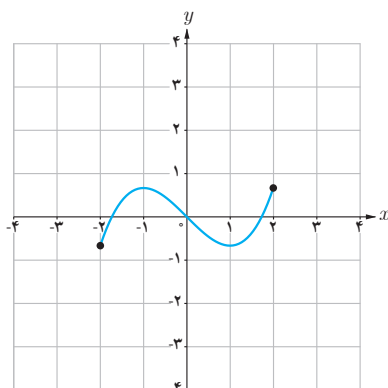
- ۲ با توجه به آنچه در قسمت ۱ مشاهده کردید کدام یک از موارد زیر نمی‌تواند درست باشد؟
 الف) هر تابع پیوسته بر یک بازه بسته دارای اکسترمم‌های مطلق است.
 ب) هر تابع پیوسته بر یک بازه باز دارای اکسترمم‌های مطلق است.
 قضیه زیر را بدون اثبات می‌پذیریم.

قضیه: اگر تابع f در بازه بسته $[a, b]$ پیوسته باشد، آن‌گاه تابع در این بازه هم ماکزیمم مطلق و هم مینیمم مطلق دارد.

با توجه به آنچه تا به حال ملاحظه کردیم، اکستریم‌های مطلق تابع در «نقاط ابتدا و انتهای بازه»، یا در «اکستریم‌های نسبی تابع» و یا در «نقاطی که تابع در آنها مشتق‌پذیر نیست» اتفاق می‌افتند. از طرفی دیدیم که در اکستریم‌های نسبی یا «مشتق تابع وجود ندارد» و یا «مشتق وجود دارد و برابر صفر است». بنابراین اکستریم‌های مطلق تابع را باید در بین نقاطی بررسی کنیم که یکی از سه ویژگی زیر را داشته باشند:

- ۱ نقاطی که مشتق تابع در آنها وجود ندارد.
- ۲ نقاطی که مشتق در آنها برابر صفر است.
- ۳ نقاط ابتدایی و انتهایی بازه مورد نظر.

مجموعه حاصل از اجتماع نقاط دو دسته (۱) و (۲) را «نقاط بحرانی» می‌نامیم؛ «به عبارتی نقاط بحرانی نقاطی از دامنه تابع هستند که مشتق تابع در آنها وجود ندارد و یا وجود دارد و برابر صفر است.» برای یافتن نقاط اکستریم مطلق ابتدا این نقاط بحرانی را مشخص می‌نماییم. در این صورت از بین تمام نقاط بحرانی و نقاط انتهایی بازه، نقطه یا نقاطی که بیشترین مقدار تابع در آنها اتفاق می‌افتد نقاط ماکزیمم مطلق تابع و مقدار تابع در این نقاط ماکزیمم مطلق تابع است. همچنین در بین نقاط مذکور نقطه یا نقاطی که کمترین مقدار تابع در آنها اتفاق می‌افتد نقاط مینیمم مطلق تابع و مقدار تابع در این نقاط مینیمم مطلق تابع است.



❖ **مثال:** اکستریم‌های مطلق تابع $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x$ را در بازه $[-2, 2]$ بیابید.

❖ **حل:** بنابر آنچه گفته شد باید نقاط بحرانی، یعنی نقاطی که مشتق در آنها وجود ندارد یا برابر صفر است را مشخص نماییم. بنابراین باید در بازه $(-2, 2)$ به دنبال نقاطی باشیم که تابع در آنها مشتق نداشته باشد و یا مشتق در آنها برابر صفر باشد. اما f' در تمام بازه $(-2, 2)$ مشتق‌پذیر است و داریم $f'(x) = x^2 - 1$ و مقدار f' در $x = \pm 1$ برابر صفر می‌شود یعنی داریم $f'(1) = 0$ و $f'(-1) = 0$. بنابراین طول نقاط بحرانی و $x = \pm 2$ طول نقاط انتهایی بازه هستند و از آنجا که داریم:

$$f(-2) = -\frac{2}{3} \qquad f(-1) = \frac{2}{3} \qquad f(1) = -\frac{2}{3} \qquad f(2) = \frac{2}{3}$$

لذا مقادیر ماکزیمم و مینیمم مطلق تابع بر این بازه به ترتیب برابر $\frac{2}{3}$ و $-\frac{2}{3}$ و نقاط ماکزیمم نقاط به طول $x = -1$ و $x = 2$ و نقاط مینیمم نقاط به طول $x = 1$ و $x = -2$ است.

❁ **مثال:** مقادیر ماکزیمم مطلق و مینیمم مطلق تابع f با ضابطه $f(x) = |x^2 - 1|$ را روی بازه $[-2, 2]$ پیدا کنید.

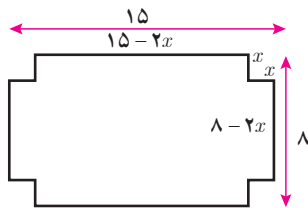
❁ **حل:** نقاط $x = \pm 2$ نقاط انتهایی بازه اند. برای یافتن نقاط اکسترمم مطلق، باید به دنبال نقاط بحرانی باشیم، یعنی نقاطی مانند c که برای آنها $f'(c) = 0$ یا $f'(c)$ وجود نداشته باشد. لذا باید مشتق پذیری تابع f در نقاط بازه بررسی شود. اما داریم:

$$f(x) = |x^2 - 1| = \begin{cases} x^2 - 1 & x \leq -1 \text{ یا } 1 \leq x \\ 1 - x^2 & -1 \leq x \leq 1 \end{cases} \Rightarrow f'(x) = \begin{cases} 2x & x < -1 \text{ یا } 1 < x \\ -2x & -1 < x < 1 \end{cases}$$

حال باید مشتقات چپ و راست را در نقاط $x = -1$ و $x = 1$ به دست آوریم که با توجه به تعاریف مشتق چپ و راست از فصل مشتق خواهیم داشت:

$$f'_-(-1) = -2, \quad f'_+(-1) = 2, \quad f'_-(1) = -2, \quad f'_+(1) = 2 \quad \text{و}$$

بنابراین تابع f در نقاط $x = \pm 1$ مشتق پذیر نیست و از طرفی f' تنها در نقطه $x = 0$ مقدار صفر می گیرد. لذا نقاط $x = 0$ و $x = \pm 1$ نقاط بحرانی این تابع اند و با بررسی مقدار تابع در این نقاط و نقاط انتهایی بازه، به سادگی مشخص می شود که مینیمم مطلق تابع در دو نقطه $x = \pm 1$ است و مقدار آن برابر صفر است و ماکزیمم مطلق در نقاط $x = \pm 2$ است و مقدار آن برابر ۳ است. در بسیاری از مسائل در زندگی خواهان این هستیم که با داشتن برخی شرایط از پیش تعیین شده، مسئله را طوری حل کنیم که بیشترین بازده را داشته باشیم. به عنوان نمونه در مثال زیر می خواهیم از ورقه‌ای با ابعاد مشخص جعبه‌ای با بیشترین حجم ممکن بسازیم.



❁ **مثال:** یک سازنده جعبه‌های حلبی، با بریدن مربع‌های همنهشت از چهار گوشه ورق‌های حلبی به ابعاد ۸ اینچ^۱ و ۱۵ اینچ و بالا بردن چهار طرف آن، جعبه‌های سر باز می‌سازد. اگر بخواهیم حجم جعبه‌های ساخته شده بیشترین مقدار ممکن باشد، طول ضلع مربع‌هایی که باید بریده شود چقدر باید باشد؟

❁ **حل:** فرض کنید طول ضلع مربعی که از گوشه‌های مستطیل مفروض برحسب اینچ بریده می‌شود x باشد. پس

$$\begin{aligned} 0 \leq x \leq \frac{15}{2} & \quad \text{طول قوطی مورد نظر} \\ 0 \leq x \leq 4 & \quad \text{عرض قوطی} \end{aligned}$$

پس با توجه به این مفروضات داریم:

$$V(x) = x(15 - 2x)(8 - 2x) = 4x^2 - 46x^2 + 120x, \quad 0 \leq x \leq 4$$

۱- هر اینچ تقریباً معادل ۲/۵۴ سانتی متر است.

چون V روی $[۰, ۴]$ پیوسته است، پس دارای اکسترم‌های مطلق در این بازه است و داریم:

$$V'(x) = ۱۲x^۲ - ۹۲x + ۱۲۰ = ۰$$

$$(۳x - ۵)(x - ۶) = ۰ \Rightarrow x = \frac{۵}{۳} \text{ یا } x = ۶$$

اما $x = ۶$ در بازه مورد نظر قرار ندارد، پس قابل قبول نیست و $x = \frac{۵}{۳}$ تنها نقطه بحرانی تابع است. از طرفی $V(۰) = ۰$ ،

$V(\frac{۵}{۳}) > ۰$ و $V(۴) = ۰$ نشان می‌دهد که ماکزیمم مطلق تابع در $x = \frac{۵}{۳}$ حاصل می‌شود و لذا طول ضلع مربع‌های مورد نظر باید $\frac{۵}{۳}$ اینچ باشد.

❖ **مثال:** در کره‌ای به شعاع R یک استوانه محاط کرده‌ایم. شعاع قاعده و ارتفاع استوانه را طوری به دست آورید که حجم استوانه، بیشترین مقدار ممکن را داشته باشد.

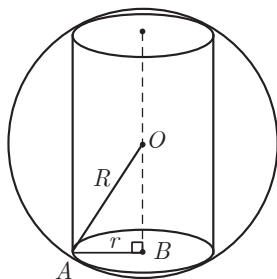
❖ **حل:** فرض کنیم استوانه مورد نظر دارای شعاع قاعده r و ارتفاع h باشد. اگر O مرکز کره باشد، در مثل قائم‌الزاویه OAB ،

$$OB = \frac{h}{۲} \text{ و داریم:}$$

$$AB^۲ + OB^۲ = OA$$

$$\text{بنابراین } r^۲ + \frac{h^۲}{۴} = R^۲$$

حجم این استوانه برابر است با:



$$V = \pi r^۲ h = \pi \left(R^۲ - \frac{h^۲}{۴}\right) h \Rightarrow V(h) = \pi R^۲ h - \frac{\pi}{۴} h^۳ ; ۰ \leq h \leq ۲R$$

برای یافتن نقاط بحرانی این تابع در بازه $[۰, ۲R]$ ، ریشه‌های مشتق را به دست می‌آوریم:

$$V'(h) = \pi R^۲ - \frac{۳\pi}{۴} h^۲ = ۰ \Rightarrow h = \frac{۲R}{\sqrt{۳}}$$

از طرفی $V(۰) = ۰$ و $V(۲R) = ۰$

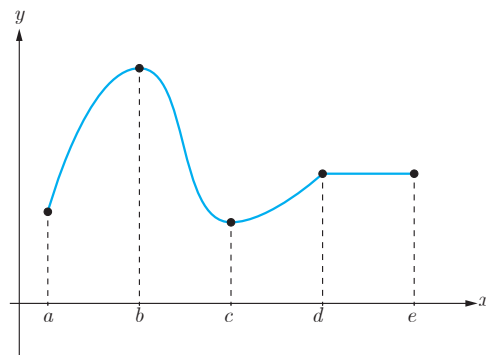
بنابراین تابع V به ازای $h = \frac{۲R}{\sqrt{۳}}$ ، بیشترین مقدار حجم را دارد. با توجه به اینکه $r^۲ + \frac{h^۲}{۴} = R^۲$ ، مقدار r برابر با $r = \frac{\sqrt{۲}R}{\sqrt{۳}}$ می‌باشد.

تشخیص صعودی یا نزولی بودن یک تابع

در فصل اول با مفهوم صعودی یا نزولی بودن یک تابع در یک بازه آشنا شدیم. همچنین در فصل قبل با مفهوم مشتق آشنا شدیم و دیدیم که مقدار مشتق یک تابع در یک نقطه برابر است با شیب خط مماس بر نمودار تابع در آن نقطه. از طرفی برای یک تابع مانند f با تابع f' آشنا شدیم. اکنون خواهیم دید که با بررسی f' می‌توان ویژگی‌هایی از تابع f و نمودار آن از جمله صعودی و نزولی بودن تابع را مشخص نمود.

فعالیت

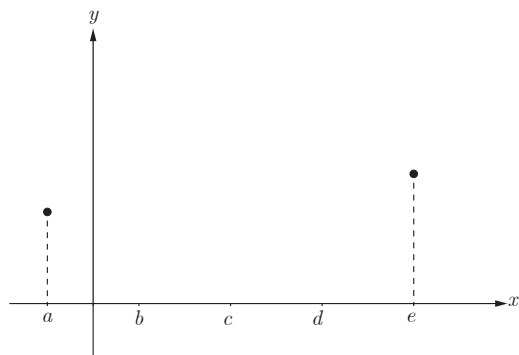
۱ نمودار تابع f در شکل زیر رسم شده است.



الف) با رسم مماس‌هایی در نقاط مختلف نمودار f تعیین کنید در چه بازه‌هایی شیب مماس‌ها مثبت و در چه بازه‌هایی شیب مماس‌ها منفی و در چه زیرمجموعه‌ای از دامنه شیب مماس‌ها برابر صفر است.

ب) تعیین کنید در چه بازه‌هایی مشتق f مثبت و در چه بازه‌هایی مشتق f منفی و در چه بازه‌هایی f' برابر صفر است.

پ) تعیین کنید در چه بازه‌هایی تابع f صعودی اکید و در چه بازه‌هایی نزولی اکید و در چه بازه‌هایی مقدار تابع f ثابت است.



۲ دو نقطه از نمودار یک تابع در شکل روبه‌رو داده شده‌اند. نمودار این تابع را در بازه $[a, e]$ به گونه‌ای رسم کنید که دارای همه ویژگی‌های زیر باشد:

- تابع f در بازه (a, e) مشتق‌پذیر باشد.
- مقدار مشتق تابع در بازه‌های (a, b) و (b, c) و (c, d) و (d, e) به ترتیب منفی، مثبت، صفر و منفی باشد.
- تعیین کنید تابع f در کدام بازه‌ها صعودی اکید و در کدام بازه‌ها نزولی اکید و در کدام بازه‌ها ثابت است.

با توجه به آنچه گفته شد قضیه زیر را بدون اثبات بیان می‌نمایم.

قضیه:

فرض کنیم تابع f بر بازه $[a, b]$ پیوسته و بر بازه (a, b) مشتق‌پذیر باشد. در این صورت:

الف) اگر به ازای هر x در (a, b) ، $f'(x) > 0$ ، آن‌گاه تابع f بر $[a, b]$ صعودی اکید است.

ب) اگر به ازای هر x در بازه (a, b) ، $f'(x) < 0$ ، آن‌گاه تابع f بر $[a, b]$ نزولی اکید است.

پ) اگر به ازای هر x در بازه (a, b) ، $f'(x) = 0$ ، آن‌گاه تابع f بر $[a, b]$ یک تابع ثابت است.

کارد کلاس

۱ توابع $f(x) = \begin{cases} 2x & x \geq 1 \\ x & x < 1 \end{cases}$ و $g(x) = x^2$ در تمام \mathbb{R} صعودی اکیداند.

الف) آیا می‌توان گفت هر تابع که در یک بازه صعودی اکید باشد، در آن بازه مشتق‌پذیر هم هست؟
 ب) آیا می‌توان گفت هر تابع که در یک بازه صعودی اکید و مشتق‌پذیر باشد، در هر نقطه از آن بازه دارای مشتق مثبت است؟

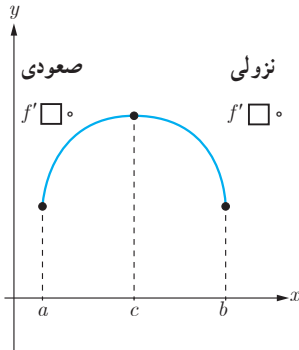
۲ تابع $f(x) = \frac{1}{x}$ را در نظر بگیرید.

الف) نشان دهید که این تابع در بازه‌های $(-\infty, 0)$ و $(0, +\infty)$ اکیداً نزولی است.

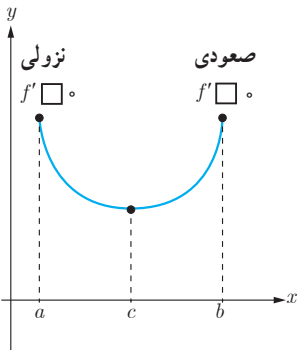
ب) آیا می‌توان گفت این تابع در تمام دامنه خود اکیداً نزولی است؟

در ادامه محکی برای تعیین نقاط ماکزیمم نسبی و مینیمم نسبی ارائه می‌دهیم.

فرض کنیم $c \in (a, b) \subseteq D_f$ یک نقطه بحرانی تابع f باشد و f بر (a, b) پیوسته و به جز احتمالاً در c مشتق پذیر باشد.

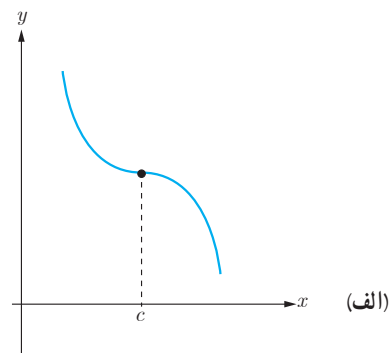
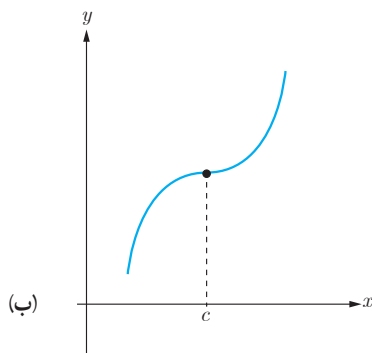


۱ اگر تابع f در بازه‌ای مانند (a, c) در سمت چپ آن صعودی و در بازه‌ای مانند (c, b) در سمت راست آن نزولی باشد، در این صورت $x=c$ یک نقطه ماکزیمم نسبی تابع f است. در شکل مقابل بخشی از نمودار تابع f رسم شده است. علامت f' را در دو طرف نقطه c مشخص نمایید.



۲ مشابه قسمت (۱) را برای نقطه مینیمم نسبی تابع f بنویسید.

۳ در شکل‌های زیر نمودار تابع f و نقطه c مشخص شده است و $f'(c) = 0$. الف) علامت f' را در دو طرف نقطه c در هر دو نمودار بررسی کنید. ب) در هر یک از نمودارها مشخص کنید آیا c یک نقطه اکسترمم نسبی است؟



با توجه به آنچه گفته شد می توان محک زیر را که به نام آزمون مشتق اول معروف است بیان نمود.

آزمون مشتق اول

فرض کنیم تابع f بر بازه ای باز مانند I ($I \subseteq D_f$) پیوسته باشد و $c \in I$ یک نقطه بحرانی تابع f باشد. هرگاه f بر این بازه به جز احتمالاً در نقطه c ، مشتق پذیر باشد، در این صورت:

(الف) اگر به ازای تمام مقادیر x در بازه ای مانند (a, c) ، $f'(x) > 0$ ، و به ازای تمام مقادیر x در بازه ای مانند (c, b) ، $f'(x) < 0$ ، در این صورت $f(c)$ یک مقدار ماکزیمم نسبی f است.

(ب) اگر به ازای تمام مقادیر x در بازه ای مانند (a, c) ، $f'(x) < 0$ ، و به ازای تمام مقادیر x در بازه ای مانند (c, b) ، $f'(x) > 0$ ، آن گاه $f(c)$ یک مقدار مینیمم نسبی f است.

(پ) اگر f' در نقطه c تغییر علامت ندهد، به طوری که f' در هر دو طرف c مثبت یا هر دو طرف آن منفی باشد، آن گاه $f(c)$ نه مینیمم نسبی و نه ماکزیمم نسبی است.

❖ **مثال:** اکستریم های نسبی و مطلق تابع $f(x) = x^3 - 2x^2 - 4x + 6$ را در بازه $[-3, 4]$ به دست آورید و مشخص کنید این تابع در چه بازه هایی صعودی و در چه بازه هایی نزولی است؟

❖ **حل:** از آنجا که توابع چندجمله ای همواره مشتق پذیرند لذا برای مشخص کردن نقاط بحرانی تابع f باید تمام نقاطی که مشتق تابع در آنها صفر می شود را به دست آوریم.

$$f'(x) = 3x^2 - 4x - 4 \qquad f'(x) = 0 \Rightarrow x = 2 \quad \text{یا} \quad x = -\frac{2}{3}$$

لذا نقاط بحرانی این تابع نقاط $x = 2$ و $x = -\frac{2}{3}$ است و نقاط $x = -3$ و $x = 4$ هم که نقاط انتهایی بازه هستند و داریم:

$$(-3, -27), \left(-\frac{2}{3}, \frac{202}{27}\right), (2, -2), (4, 22)$$

لذا $x = -3$ و $x = 4$ به ترتیب طول نقاط ماکزیمم و مینیمم مطلق و مقادیر آنها به ترتیب ۲۲ و -۲۷ است. حال برای تعیین اکستریم های نسبی و صعودی و نزولی بودن تابع باید مشتق تابع را تعیین علامت کنیم. با توجه به تعیین علامت معادلات درجه دوم داریم:

x		$-\frac{2}{3}$		۲	
$f'(x)$	+	۰	-	۰	+

از این جدول مشخص می‌شود که تابع f در بازه $\left(-\frac{2}{3}, 2\right)$ نزولی و در سایر جاها صعودی است. همچنین مشخص می‌شود که نقطه $x = -\frac{2}{3}$ یک ماکزیمم نسبی و مقدار آن برابر $\frac{202}{27}$ است و نقطه $x = 2$ یک مینیمم نسبی و مقدار آن برابر -2 است. می‌توان اطلاعات فوق را در جدول زیر که به آن جدول تغییرات تابع می‌گوییم نمایش داد.

x	-3	$-\frac{2}{3}$	2	4
f'	$+$	0	$-$	$+$
f	-27	$\frac{202}{27}$	-2	22

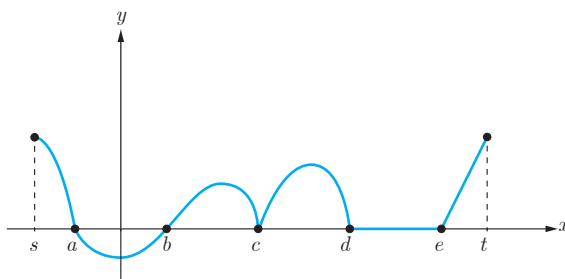
ماکزیمم نسبی
مینیمم نسبی

کارد کلاسی

نمودار تابع f' در شکل زیر داده شده است. (الف) صعودی و نزولی بودن تابع f را در $[s, t]$ بررسی کنید.

(ب) نقاط a, b, c, d, e و کدام بحرانی، کدام ماکزیمم نسبی و کدام مینیمم نسبی اند؟

(پ) آیا نقاط بازه (d, e) اکسترمم نسبی هستند؟



- ۱ نمودار تابعی را رسم کنید که همه شرایط زیر را داشته باشد.
 نقطهٔ ماکزیمم نسبی داشته باشد که مشتق در آن برابر صفر باشد.
 نقطهٔ مینیمم نسبی داشته باشد که تابع در آن نقطه پیوسته باشد ولی مشتق نداشته باشد.
 نقطهٔ ماکزیمم مطلق تابع نقطهٔ بحرانی نباشد.
 نقطهٔ ماکزیمم نسبی داشته باشد که تابع در آن ناپیوسته باشد.
 نقطه‌ای داشته باشد که اکسترمم نسبی نباشد ولی مشتق تابع در آن نقطه صفر باشد.
- ۲ نمودار تابعی را رسم کنید که بر دامنه‌اش پیوسته باشد ولی بر آن ماکزیمم و مینیمم مطلق نداشته باشد.
- ۳ برای هر مورد زیر نمودار یک تابع را رسم کنید.
 الف) تابع f در بازه‌ای مانند $[a, b]$ صعودی است اما صعودی اکید نیست.
 ب) تابع f در بازه‌ای مانند $[a, b]$ نزولی است اما نزولی اکید نیست.
 پ) تابع f در بازه‌ای مانند $[a, b]$ هم صعودی و هم نزولی است.
- ۴ برای هر کدام از موارد زیر نمودار یک تابع را رسم کنید.
 الف) تابعی که در یک بازه اکیداً نزولی است اما در برخی نقاط آن بازه پیوسته نیست.
 ب) تابعی که در یک بازه اکیداً صعودی و بر آن بازه پیوسته است اما در برخی نقاط آن بازه مشتق‌پذیر نیست.
 پ) تابعی که در یک بازه اکیداً نزولی و مشتق‌پذیر است اما مشتق آن در برخی نقاط منفی نباشد.
- ۵ نمودار تابع f را به گونه‌ای رسم کنید که ماکزیمم مطلق داشته باشد ولی تابع $|f|$ ماکزیمم مطلق نداشته باشد.
- ۶ نقاط اکسترمم نسبی و مطلق توابع زیر را در بازه‌های داده شده در صورت وجود بیابید و نقاط بحرانی این توابع را به دست آورید.

الف) $f(x) = 3x^2 - 2x + 5$ $[-2, 1]$

ب) $f(x) = x^3 - 3x$ $[-1, 2]$

پ) $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & 0 \leq x < 2 \\ 4 - x & x \geq 2 \end{cases}$

۷ ضرایب a و b را در تابع $f(x) = x^2 + ax + b$ طوری پیدا کنید که در نقطه $(2, 1)$ ، ماکزیمم نسبی داشته باشد.

۸ نمودار تابعی مانند f را به گونه‌ای رسم کنید که در تمام شرایط زیر صدق کند.

$$f(0) = 0, \quad f(4) = -2, \quad f(-1) = 5$$

نقطه $(1, 1)$ ماکزیمم نسبی این تابع باشد.

۹ یک برگه کاغذی مستطیل شکل با اضلاع x و y در اختیار داریم. با بریدن چهار مربع به ضلع h از گوشه‌های آن و تا زدن اضلاع، یک مکعب ساخته شده است. اگر $xy = 100 \text{ cm}^2$ و $h = 2 \text{ cm}$ ، مقادیر x و y را طوری پیدا کنید که حجم این مکعب بیشترین مقدار ممکن شود.

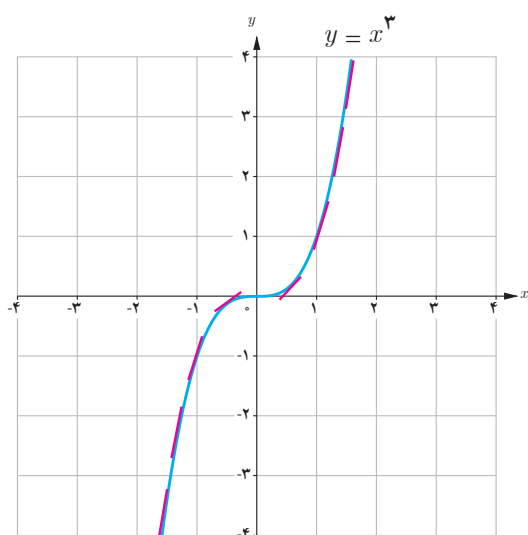
۱۰ یک مستطیل در یک نیم‌دایره محاط شده است. اگر شعاع دایره، ۴ سانتی‌متر باشد، طول و عرض مستطیل را طوری به دست آورید که مساحت آن بیشترین مقدار ممکن باشد.

۱۱ توابع زیر در چه بازه‌هایی صعودی و در چه بازه‌هایی نزولی اند؟

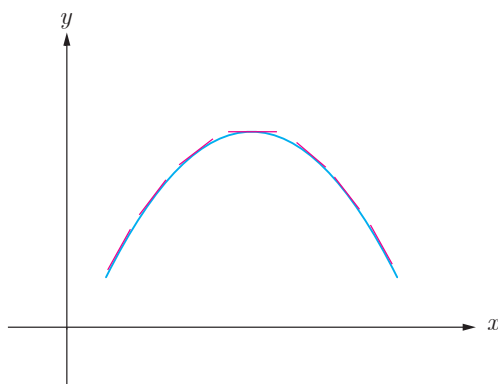
$$\text{الف) } f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 7$$

$$\text{ب) } f(x) = \frac{x}{x-2}$$

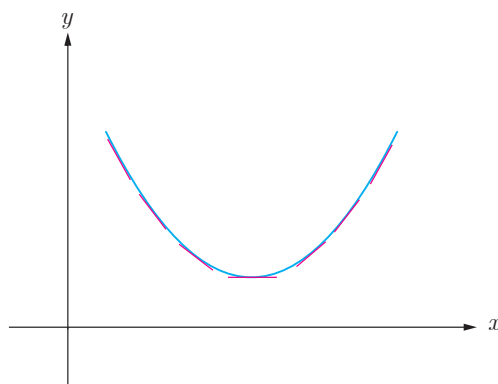
جهت تقعر نمودار یک تابع و نقطه عطف آن



با تابع $f(x) = x^3$ آشنایی دارید. از آنجا که مشتق این تابع $f'(x) = 3x^2$ در $x = 0$ برابر صفر و در سایر نقاط همواره مثبت است، لذا شیب خطوط مماس بر منحنی این تابع در $x = 0$ برابر صفر و در تمام نقاط دیگر مثبت است و این تابع همواره صعودی است. با این حال اگر خطوط مماس بر این منحنی را به صورت پاره‌خط‌هایی کوچک در اطراف نقاط مماس رسم کنید خواهید دید که این پاره‌خط‌ها برای x های منفی در بالای نمودار و برای x های مثبت در زیر نمودار واقع‌اند. اصطلاحاً گفته می‌شود که جهت تقعر این تابع در بازه $(-\infty, 0)$ به سمت پایین و در بازه $(0, +\infty)$ به سمت بالا است. برای درک بهتر مفهوم تقعر منحنی یک تابع به دو شکل زیر توجه کنید.

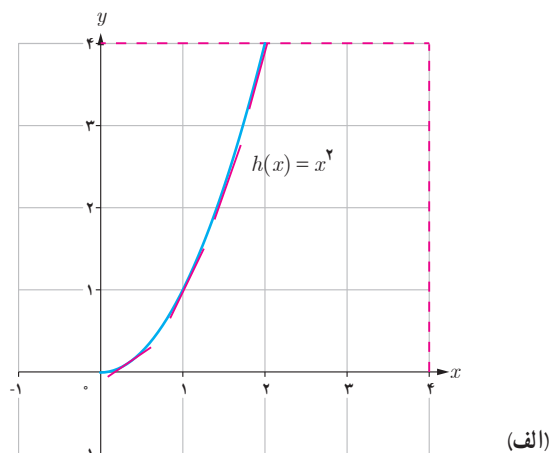
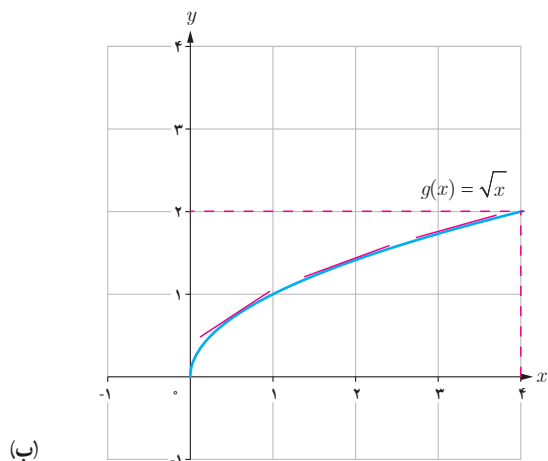


مماس‌ها در بالای منحنی‌اند.
تقعر به سمت پایین است.



مماس‌ها در زیر منحنی‌اند.
تقعر به سمت بالا است.

در زیر بخشی از نمودارهای دو تابع $h(x) = x^2$ و $g(x) = \sqrt{x}$ در بازه $[0, +\infty)$ و خطوط مماس بر منحنی‌های آنها در برخی نقاط این بازه رسم شده است.



۱ با حرکت از نقطه $x = 0$ به سمت راست، شیب خطوط مماس در هر کدام از منحنی‌ها چگونه تغییر می‌کند؟ (کم می‌شود یا زیاد) جهت تقعر منحنی در هر کدام از نمودارها چگونه است؟

۲ جهت تقعر منحنی چه ارتباطی با تغییرات شیب (کم شدن یا زیاد شدن) خطوط مماس دارد؟

۳ تابع h' در بازه $[0, +\infty)$ صعودی است یا نزولی؟

۴ تابع g' در بازه $[0, +\infty)$ صعودی است یا نزولی؟

۵ (الف) در حالت کلی، صعودی یا نزولی بودن تابع f چه ارتباطی با علامت تابع f' دارد؟

علامت f' بر بازه I مثبت است، آنگاه تابع f بر بازه I است.

علامت f' بر بازه I منفی است، آنگاه تابع f بر بازه I است.

(ب) با توجه به قسمت (الف)، صعودی یا نزولی بودن تابع f چه ارتباطی با علامت تابع f'' دارد؟

علامت f'' بر بازه I مثبت است آنگاه تابع f' بر بازه I است.

علامت f'' بر بازه I منفی است آنگاه تابع f' بر بازه I است.

۶ با توجه به آنچه گفته شد موارد زیر را کامل کنید:

- الف) اگر مقدار f'' در یک بازه مثبت باشد، تابع f' در آن بازه است و لذا شیب خطوط مماس بر منحنی در آن بازه می‌یابد و تقعر منحنی تابع f در آن بازه رو به است.
- ب) اگر مقدار f'' در یک بازه منفی باشد، تابع f' در آن بازه است و لذا شیب خطوط مماس بر منحنی در آن بازه می‌یابد و تقعر منحنی تابع f در آن بازه رو به است.

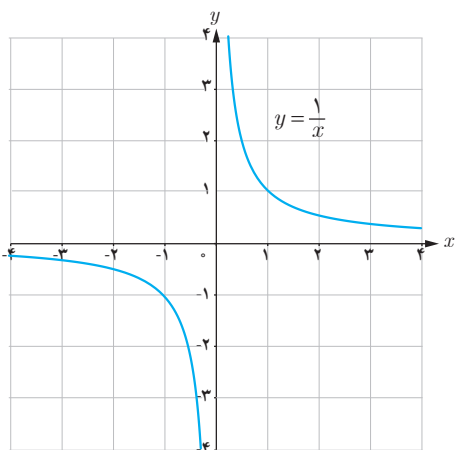
آنچه در فعالیت قبل مورد بررسی قرار گرفت به طور خلاصه در قضیه زیر، که آزمونی برای تعیین جهت تقعر نمودار تابع است، آورده شده و در این کتاب اثبات آن مدنظر نیست.

قضیه:

فرض کنیم $f''(x)$ به ازای هر نقطه x از بازه I موجود باشد.

- الف) اگر به ازای هر x از I ، $f''(x) > 0$ ، آنگاه نمودار f روی بازه I تقعر رو به بالا دارد.
- ب) اگر به ازای هر x از I ، $f''(x) < 0$ ، آنگاه نمودار f روی بازه I تقعر رو به پایین دارد.
- پ) اگر به ازای هر x از I ، $f''(x) = 0$ ، آزمون بی نتیجه است.

❖ مثال: جهت تقعر توابع زیر را در دامنه تعریفشان به دست آورید.



الف) $f(x) = \frac{1}{x}$

ب) $g(x) = x^2 + 3x^2 + 1$

❖ حل: الف) داریم $D_f = \mathbb{R} - \{0\}$

$$f(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow f'(x) = \frac{-1}{x^2} \Rightarrow f''(x) = \frac{2}{x^3}$$

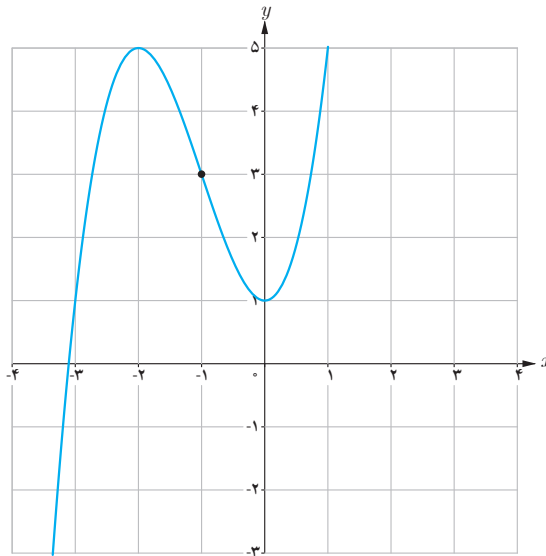
بنابراین:

- اگر $x > 0$ ، آنگاه $f''(x) > 0$ و لذا جهت تقعر نمودار این تابع بر بازه $(0, +\infty)$ رو به بالاست.
- اگر $x < 0$ ، آنگاه $f''(x) < 0$ و لذا جهت تقعر نمودار این تابع بر بازه $(-\infty, 0)$ رو به پایین است.

ب) داریم $D_g = \mathbb{R}$

$$g(x) = x^3 + 3x^2 + 1 \Rightarrow g'(x) = 3x^2 + 6x \Rightarrow g''(x) = 6x + 6$$

$$g''(x) = 0 \Rightarrow 6x + 6 = 0 \Rightarrow x = -1$$

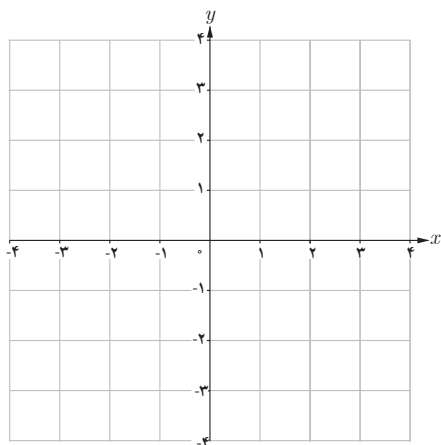


بنابراین:

اگر $x > -1$ آنگاه $g''(x) > 0$ و لذا جهت تقعر نمودار این تابع بر بازه $(-1, +\infty)$ به سمت بالاست.

اگر $x < -1$ آنگاه $g''(x) < 0$ و لذا جهت تقعر نمودار این تابع بر بازه $(-\infty, -1)$ به سمت پایین است.

کاردو کلاس



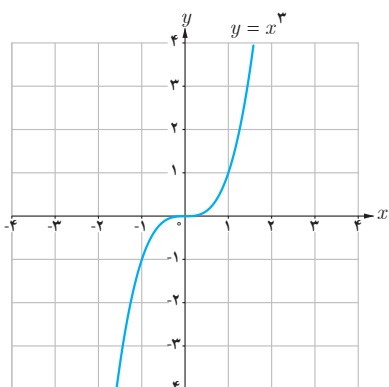
نمودار تابع $y = f(x)$ را با اطلاعات زیر رسم کنید:

$$f(0) = f(1) = f(2) = 0$$

و بر بازه $(-\infty, 1)$ ، $f''(x) < 0$ ،

و بر بازه $(1, \infty)$ ، $f''(x) > 0$.

نقطه عطف نمودار یک تابع

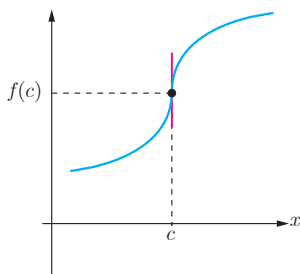


نمودار تابع $f(x) = x^3$ را در نظر بگیرید. دیدیم که جهت تقعر نمودار این تابع در بازه $(-\infty, 0)$ رو به پایین و در بازه $(0, +\infty)$ رو به بالاست. بنابراین نقطه $x = 0$ نقطه‌ای است که جهت تقعر منحنی در آن عوض می‌شود. از طرفی در $x = 0$ منحنی دارای مماس نیز هست. چنین نقطه‌ای از یک منحنی را نقطه عطف آن منحنی گوئیم. به عبارت دیگر:

تعریف

فرض کنیم تابع f در نقطه $x = c$ پیوسته است. در این صورت نقطه $(c, f(c))$ نقطه عطف تابع f است، هرگاه هر دو شرط زیر برقرار باشند:

- الف) نمودار f در نقطه $(c, f(c))$ خط مماس داشته باشد.
- ب) جهت تقعر f در نقطه $(c, f(c))$ تغییر کند.



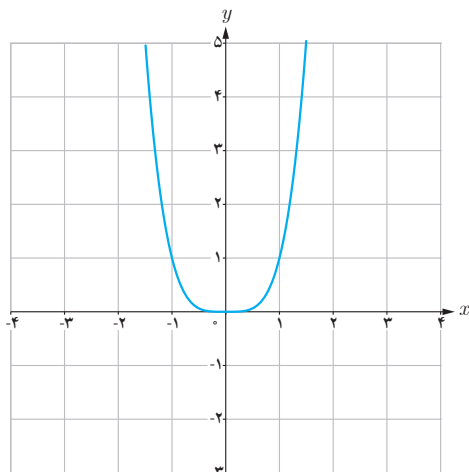
خط $x = c$ مماس قائم است.

- از شرط (الف) در تعریف نقطه عطف تابع f نتیجه می‌شود که با $f'(c)$ موجود است و یا تابع f در نقطه c مماس قائم دارد.
- از شرط (ب) می‌توان نتیجه گرفت که خط مماس بر نمودار تابع در نقطه $(c, f(c))$ از نمودار تابع عبور می‌کند.

از آنجا که تقعر تابع در دو طرف نقطه عطف تغییر می‌کند؛ لذا f'' در یک طرف نقطه c مثبت و در طرف دیگر آن منفی است. بنابراین $f''(c)$ نمی‌تواند مقداری به جز صفر داشته باشد؛ یعنی برای اینکه $(c, f(c))$ یک نقطه عطف منحنی باشد، یا باید $f''(c) > 0$ وجود نداشته باشد و یا اگر وجود دارد باید داشته باشیم $f''(c) = 0$. با این حال شرط $f''(c) = 0$ برای نقطه عطف بودن $x = c$

به تنهایی کافی نیست؛ یعنی ممکن است $f''(c) = 0$ ولی $x = c$ یک نقطه عطف تابع نباشد. به طور مثال تابع $f(x) = x^4$ را بررسی می‌کنیم. داریم:

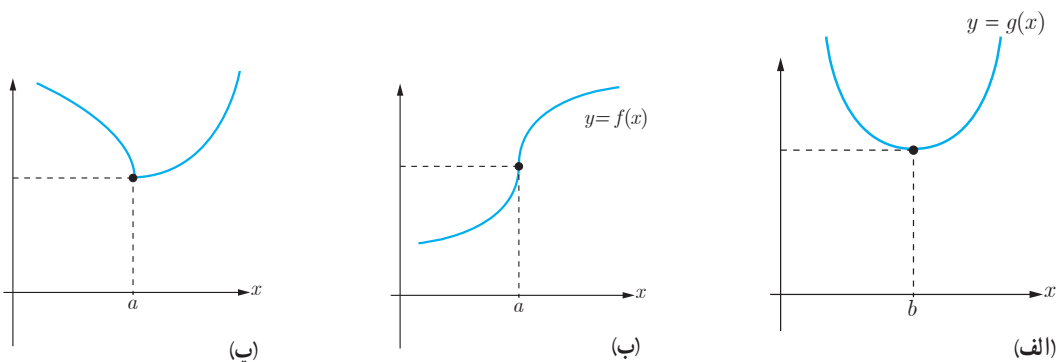
$$f'(x) = 4x^3, \quad f''(x) = 12x^2$$



با اینکه $f''(0) = 0$ اما تابع f'' در دو طرف $x = 0$ مثبت است و لذا تقعر همواره به سمت بالاست و جهت تقعر در $x = 0$ عوض نمی‌شود و لذا $x = 0$ یک نقطه عطف این تابع نیست.

کارد کلاس

۱ در هر یک از نمودارهای زیر، نقاط عطف را در صورت وجود مشخص و خط مماس بر منحنی در نقاط عطف را رسم کنید.



۲ کدام یک از گزاره‌های زیر درست و کدام نادرست است؟ برای گزاره‌های نادرست مثال نقض بیاورید.

- (الف) در نقطه عطف علامت $f''(x)$ تغییر می‌کند.
- (ب) هر نقطه که علامت f'' در آن تغییر کند، نقطه عطف است.
- (پ) هر نقطه‌ای که در آن مقدار f'' برابر صفر شود یک نقطه عطف است.
- (ت) تابع می‌تواند بیش از یک نقطه عطف داشته باشد.
- (ث) تابع صعودی اکید، نقطه عطف ندارد.

❖ **مثال:** جهت تقعر نمودار تابع زیر را مشخص کنید و نقاط عطف آنها را به دست آورید.

الف) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 15$

ب) $f(x) = \sqrt[3]{x}$

❖ **حل:**

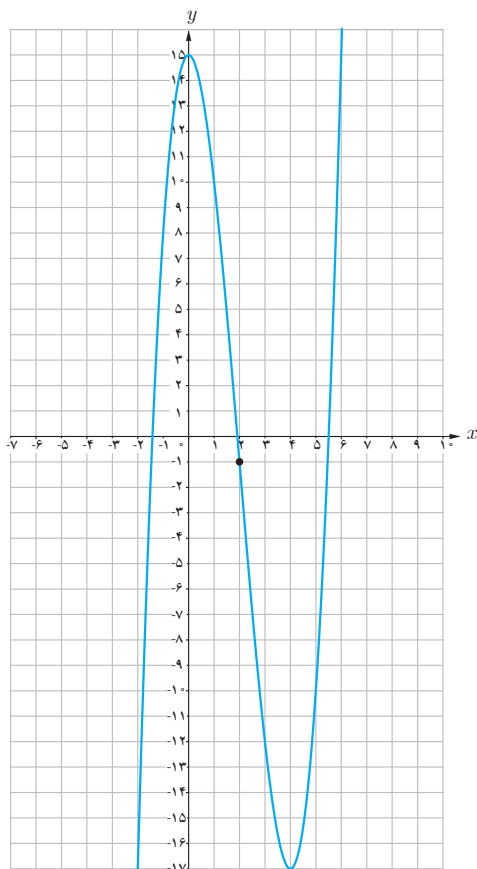
الف) $f'(x) = 3x^2 - 12x$ و $f''(x) = 6x - 12$

$f'''(x) = 6 \Rightarrow x = 1$

از آنجا که $f''(x)$ یک تابع خطی است، و در تمام \mathbb{R} تعریف شده است و تنها در $x = 1$ برابر صفر می‌شود، بنابراین تنها نقطه‌ای که می‌تواند نقطه عطف باشد $x = 1$ است به شرط آنکه:

۱ $f''(1) > 0$ موجود باشد

۲ $f''(1) < 0$ در دو طرف $x = 1$ تغییر علامت دهد.



اما $f''(x)$ یک تابع چند جمله‌ای است و دامنه آن \mathbb{R} است و $f''(1) < 0$ نیز موجود و برابر -6 است. از طرفی داریم:

x	$-\infty$	1	$+\infty$
f''	$(-)$	0	$(+)$
f		-12	
		نقطه عطف	

$$f(x) = \sqrt[3]{x} \rightarrow f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} \rightarrow f''(x) = \frac{-2}{9\sqrt[3]{x^5}} \quad (\text{ب})$$

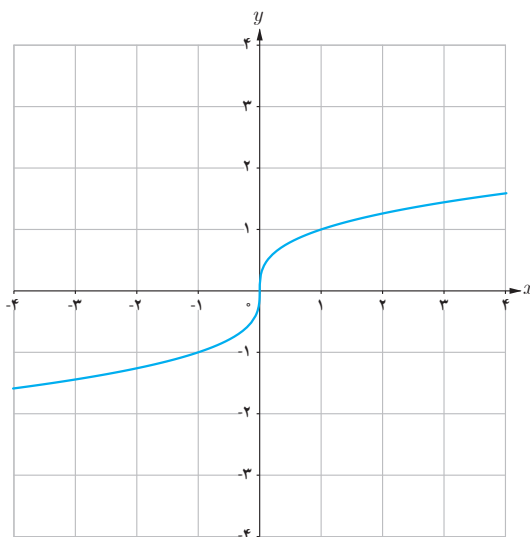
از آنجا که مقدار $\sqrt[3]{x^5}$ به ازای x های مثبت، مثبت و به ازای x های منفی، منفی است. داریم:

اگر $x > 0$ ، آنگاه $f''(x) < 0$ و بنابراین جهت تقعر منحنی به سمت پایین است.

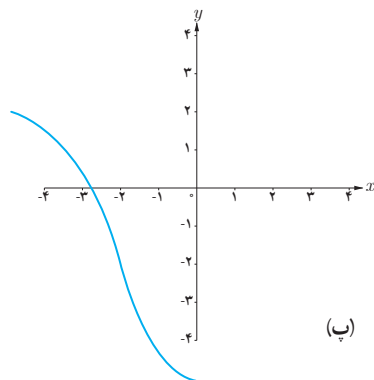
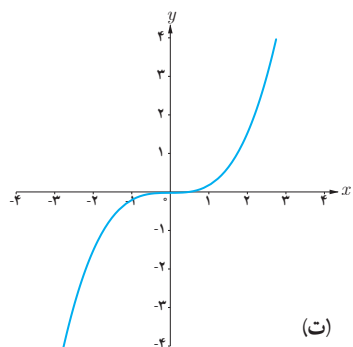
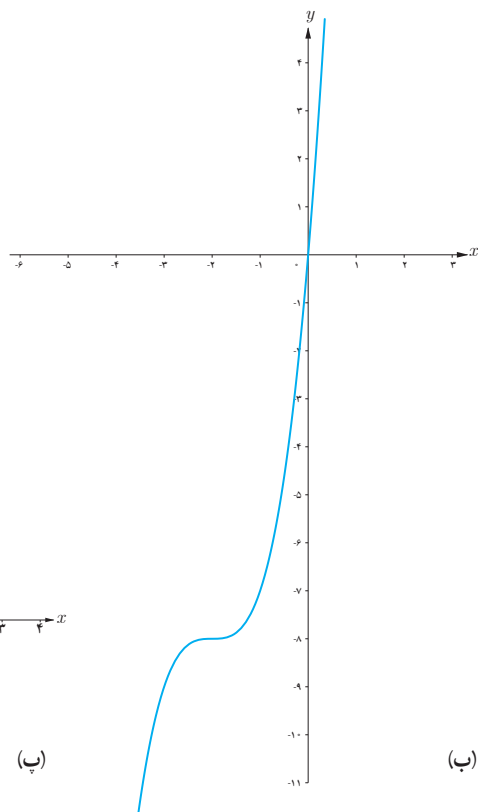
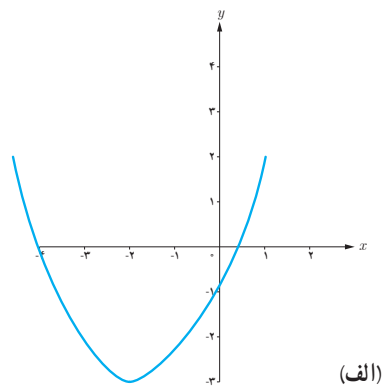
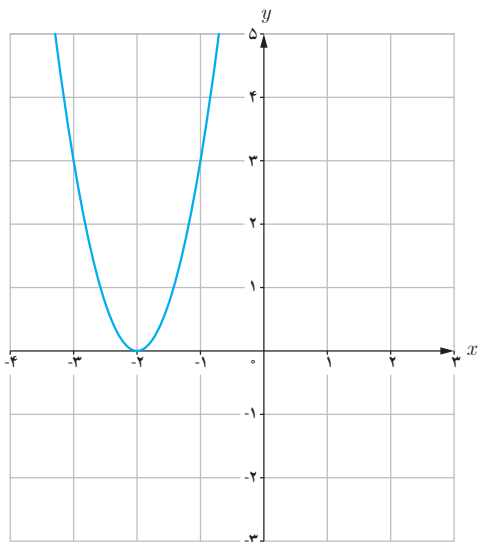
اگر $x < 0$ ، آنگاه $f''(x) > 0$ و بنابراین جهت تقعر منحنی به سمت بالاست.

لذا جهت تقعر این تابع در $x = 0$ عوض می‌شود. از طرفی در فصل مشتق دیدیم که این تابع در نقطه $x = 0$ دارای مماس (مماس قائم) است.

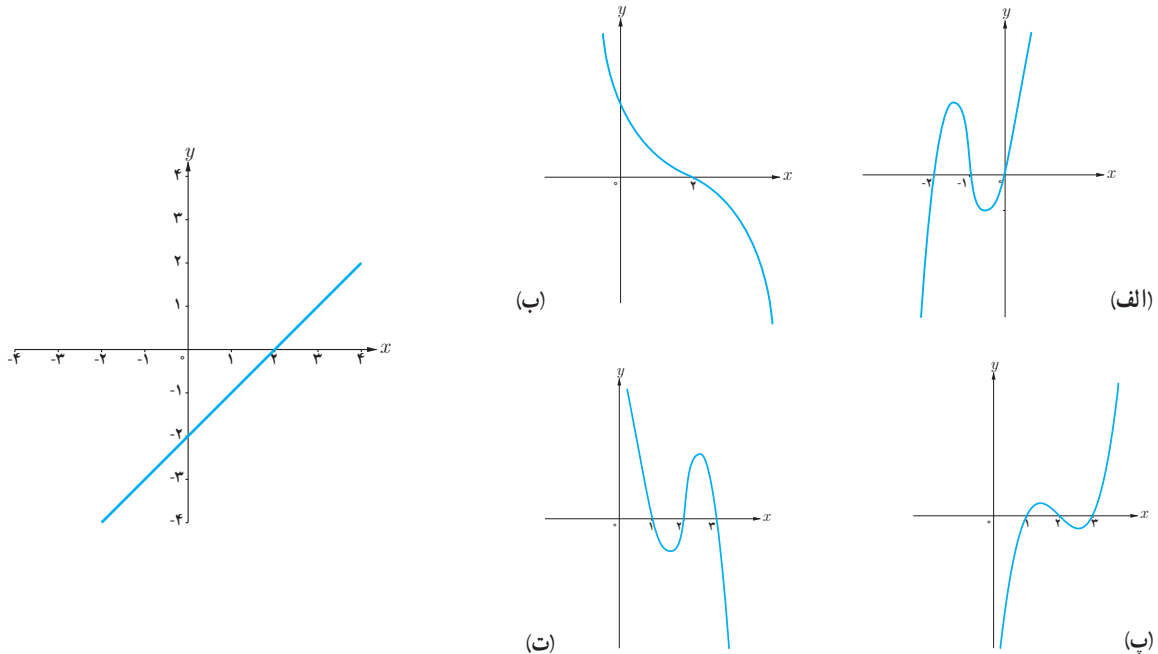
بنابراین $x = 0$ نقطه عطف این تابع است.



۱ اگر شکل کشیده شده در صفحه شطرنجی مربوط به نمودار تابع f' باشد کدام نمودار می‌تواند نمودار تابع f باشد؟



۲ اگر شکل زیر مربوط به نمودار تابع f'' باشد کدام نمودار می‌تواند نمودار تابع f باشد؟



تمرین

۱ نمودار تابع f را به گونه‌ای رسم کنید که در نقطه‌ای مانند a جهت تغير عوض شود ولی این نقطه، نقطه عطف نباشد.

۲ جهت تغير توابع زیر را در دامنه آنها بررسی کرده و نقطه عطف آنها را در صورت وجود به دست آورید.

الف) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + 4$

ب) $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$

پ) $f(x) = \sqrt[3]{x+1}$

۳ برای هر مورد یک تابع درجه ۳ مثال بزنید که نقطه داده شده نقطه عطف آن باشد.

الف) نقطه $(0, 0)$

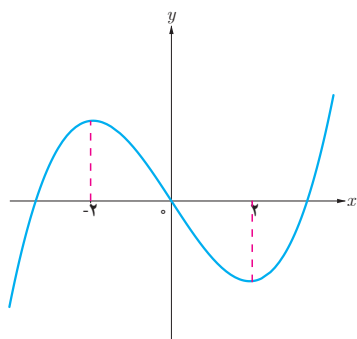
ب) نقطه $(1, 0)$

پ) نقطه $(0, 1)$

ت) نقطه $(2, 2)$

۴ مقادیر a ، b و c را در تابع $f(x) = ax^3 + bx^2 + c$ طوری به دست آورید که در شرایط زیر صدق کند.

$f(0) = 1$ و $f(1) = 2$ و $x = \frac{1}{3}$ طول نقطه عطف نمودار تابع f باشد.



۵ اگر نقطه عطف تابع درجه سوم $y = x^3 + ax^2 + bx + c$ با ضابطه $(0, 0)$ باشد

باشد که نمودار آن در شکل زیر رسم شده است، a ، b و c را پیدا کنید.

رسم نمودار توابع

می‌دانیم که هر تابع مانند f به ازای هر $x \in D_f$ دقیقاً یک مقدار y به دست می‌دهد به طوری که $y = f(x)$ و زوج مرتب (x, y) یک نقطه در دستگاه مختصات مشخص می‌کند. نمودار یک تابع، شکلی است که از همه این نقاط (x, y) به ازای تمام $x \in D_f$ ها تشکیل شده است. از آنجا که هر بازه زیرمجموعه \mathbb{R} تعداد بی‌شماری عضو دارد؛ لذا هیچ‌گاه نمی‌توان با قلم و کاغذ نمودار یک تابع را به طور کاملاً دقیق رسم کرد. در سال‌های گذشته با رسم نمودار توابع خطی و درجه ۲ به کمک نقطه‌یابی آشنا شده‌اید. در این درس با به کارگیری مطالبی که قبلاً گفته شد نقاط مهمی از نمودار تابع را به دست آورده و به برخی ویژگی‌های آن تابع پی می‌بریم و با استفاده از آنها شکل تقریبی تابع را رسم می‌کنیم.

❖ **مثال:** اگر بدانید تابع $y = f(x)$ به گونه‌ای است که برای آن داریم:

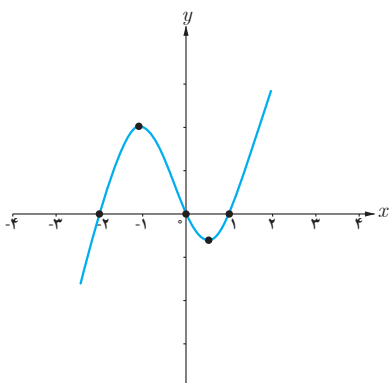
۱ ریشه‌های تابع f به صورت $x = 1$ و $x = 0$ و $x = -2$ است و f در همه نقاط مشتق‌پذیر باشد.

۲ ریشه‌های تابع f' به صورت $x = \frac{1}{3}$ و $x = -\frac{6}{5}$ است و علامت f' بین دو ریشه منفی و سایر جاها مثبت است و $f(\frac{1}{3}) = -0/6$ و $f(-\frac{6}{5}) = 2$.

۳ تابع f'' تنها یک ریشه در $x = -\frac{1}{3}$ دارد و علامت f'' در سمت چپ $-\frac{1}{3}$ منفی و در سمت راست آن مثبت است و $f(-\frac{1}{3}) = 0/7$.
در این صورت نمودار تابع f را رسم کنید.

❖ **حل:** از (۲) نتیجه می‌شود که تابع f بین نقاط $x = \frac{1}{3}$ و $x = -\frac{6}{5}$ نزولی و سایر جاها صعودی است و $x = -\frac{6}{5}$ و $x = \frac{1}{3}$ به ترتیب طول نقاط ماکزیمم نسبی و مینیمم نسبی تابع اند و از (۳) نتیجه می‌شود که تفرع تابع f قبل از $x = -\frac{1}{3}$ رو به پایین و در سمت راست $x = -\frac{1}{3}$ رو به بالاست و چون f' در $x = -\frac{1}{3}$ وجود دارد لذا مماس در این نقطه وجود دارد، بنابراین $x = -\frac{1}{3}$ نقطه عطف این تابع است. قبل از رسم شکل می‌توان همه اطلاعات فوق را در یک جدول خلاصه کرد.

x	$-\infty$	$-\frac{6}{5}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$	
f'	+	o	-	-	o	+
f''	(-)		(-) o (+)		(+)	
f	↗		↘	↘	↗	
		ماکزیم	نقطه عطف	مینیم		



با توجه به این اطلاعات و اینکه ریشه‌های تابع محل برخورد نمودار با محور x ها هستند نمودار تابع به صورت روبه‌رو است.

همان‌طور که در این مثال مشاهده کردیم ریشه‌ها و علامت توابع f' و f'' کمک زیادی به رسم نمودار تابع می‌نماید. همچنین حد تابع در بی‌نهایت گویای رفتار و چگونگی تابع در نقاط انتهایی نموداری که رسم می‌کنیم است. به‌طور کلی برای رسم نمودار یک تابع، همه یا برخی از مراحل زیر را انجام می‌دهیم و با توجه به اطلاعات به‌دست آمده جدول رفتار تابع را تشکیل می‌دهیم و به کمک آن نمودار تابع را رسم می‌کنیم.

- ۱ دامنه تابع را مشخص می‌کنیم.
- ۲ محل تلاقی نمودار با محورهای مختصات را مشخص می‌کنیم (در صورت وجود).
- ۳ f' را به‌دست می‌آوریم و با تعیین علامت آن بازه‌هایی که f بر آنها صعودی یا نزولی است را مشخص می‌کنیم.
- ۴ نقاط بحرانی و اکسترم‌های نسبی تابع را به‌دست می‌آوریم (در صورت وجود).
- ۵ f'' را به‌دست می‌آوریم و با تعیین علامت آن جهت تقعر تابع در بازه‌های مختلف را مشخص می‌کنیم.
- ۶ نقطه عطف تابع را مشخص می‌کنیم (در صورت وجود).
- ۷ رفتار تابع را برای مقادیر بسیار بزرگ x و بسیار کوچک x مشخص می‌کنیم (در صورت وجود).
- ۸ معادله مجانب‌های تابع را به‌دست می‌آوریم (در صورت وجود).
- ۹ تنظیم یک جدول که با خلاصه کردن اطلاعات توابع f و f' و f'' در آن تشخیص چگونگی شکل نمودار آسان‌تر شود.
- ۱۰ رسم نمودار تابع با استفاده از اطلاعات قسمت‌های قبل.
- ۱۱ در صورت نیاز از نقاط کمکی هم استفاده می‌کنیم.

❖ **مثال:** نمودار تابع $f(x) = x^3$ را رسم کنید.

❖ **حل:** دامنه این تابع تمام اعداد حقیقی است و این تابع در تمام دامنه اش پیوسته و مشتق پذیر است. حال با به دست آوردن f' و f'' و ریشه های آنها و تعیین علامت آنها جدول رفتار تابع را تشکیل می دهیم.

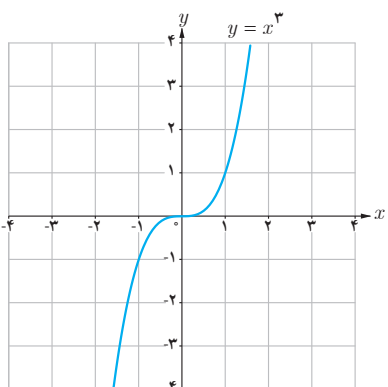
$$f(x) = x^3 = 0 \rightarrow x = 0 \rightarrow \text{محل برخورد نمودار با محورهای مختصات } (0, 0)$$

$$f'(x) = 3x^2 = 0 \rightarrow x = 0$$

$$f''(x) = 6x = 0 \rightarrow x = 0$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f'	+	+	+
f''	⌒	⌒	⌒
f	↗	○	↗

نقطه عطف



این تابع همواره صعودی است و اکسترم نسبی ندارد. از طرفی $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ لذا دو شاخه انتهایی نمودار در ربع های اول و سوم قرار دارند.

می توان برای دقیق تر شدن شکل، نقاط بیشتری از منحنی را به دست آورد؛ مثلاً در اینجا نقاط $(1, 1)$ و $(-1, -1)$ نیز بر نمودار تابع واقع اند. با توجه به آنچه گفته شد می توان نمودار تابع $y = x^3$ را به صورت مقابل رسم کرد.

❖ **مثال:** جدول رفتار و نمودار تابع $f(x) = (x-1)^2(x+3)$ را رسم کنید.

❖ **حل:**

دامنه این تابع \mathbb{R} است و این تابع همواره پیوسته و مشتق پذیر است.

$$f(x) = 0 \Rightarrow x = 1 \text{ یا } x = -3$$

بنابراین نقاط $(1, 0)$ و $(-3, 0)$ محل های برخورد با محور x ها است

$$x = 0 \Rightarrow y = 3$$

بنابراین نقطه $(0, 3)$ محل برخورد با محور y هاست

$$f'(x) = 2(x-1)(x+3) + (x-1)^2 = (x-1)(3x+5)$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x = 1 \text{ یا } x = -\frac{5}{3}$$

لذا نقاط $(۱, ۰)$ و $(-\frac{۵}{۳}, \frac{۲۵۶}{۲۷})$ نقاط بحرانی اند

$$f''(x) = (3x + 5) + 3(x - 1) = 6x + 2$$

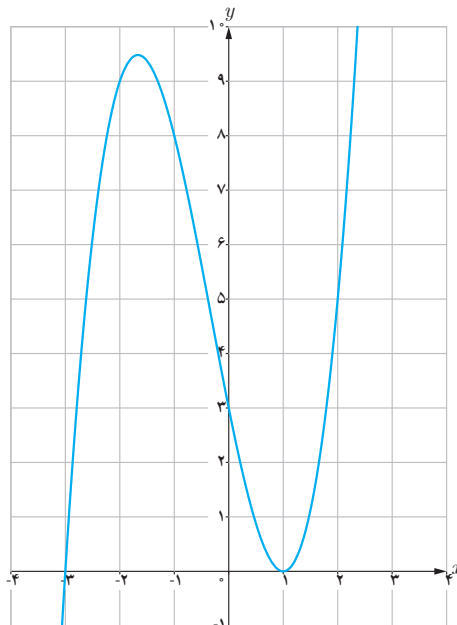
$$f''(x) = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{3}$$

از آنجا که مماس بر منحنی در نقطه $x = -\frac{1}{3}$ وجود دارد و f'' در دو طرف نقطه $x = -\frac{1}{3}$ تغییر علامت می‌دهد، نقطه

نقطه عطف تابع است، از طرفی $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

x	$-\infty$	$-\frac{5}{3}$	$-\frac{1}{3}$	1	$+\infty$
f'		+	۰	-	+
f''		⌒	⌒	⌒	⌒
f	$-\infty$	$\frac{256}{27}$	$\frac{128}{27}$	۰	$+\infty$
		ماکزیمم	عطف	مینیمم	

حال با توجه به آنچه گفته شد نمودار تابع فوق به شکل زیر است.



تابع $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ را که در آن $c \neq 0$ است تابع هموگرافیک می‌نامیم.

اگر $c = 0$ و $d \neq 0$ باشد معادله این تابع به صورت $y = \frac{a}{d}x + \frac{b}{d}$ تبدیل می‌شود که معادله یک خط راست است و اگر $c \neq 0$ و $d \neq 0$ باشد این تابع به یک تابع ثابت تبدیل می‌شود. $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$

در رسم نمودار تابع هموگرافیک توجه داریم که:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{ax+b}{cx+d} = \frac{a}{c}$$

بنابراین $y = \frac{a}{c}$ مجانب افقی این تابع است.

$$\lim_{x \rightarrow -\frac{d}{c}} \frac{ax+b}{cx+d} = +\infty \text{ یا } -\infty$$

بنابراین $x = -\frac{d}{c}$ مجانب قائم این تابع است

❖ **مثال:** جدول تغییرات و نمودار تابع $f(x) = \frac{x+2}{x-1}$ را رسم کنید.

❖ **حل:** دامنه این تابع $D_f = \mathbb{R} - \{1\}$ است. داریم $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 1$ ، لذا خط $y = 1$ مجانب افقی است و از طرفی $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty$ و $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty$ ، لذا $x = 1$ مجانب قائم نمودار این تابع است.

همچنین نمودار تابع محورهای مختصات را در نقاط $(0, -2)$ و $(-2, 0)$ قطع می‌کند. اکنون با گرفتن مشتق از تابع خواهیم داشت:

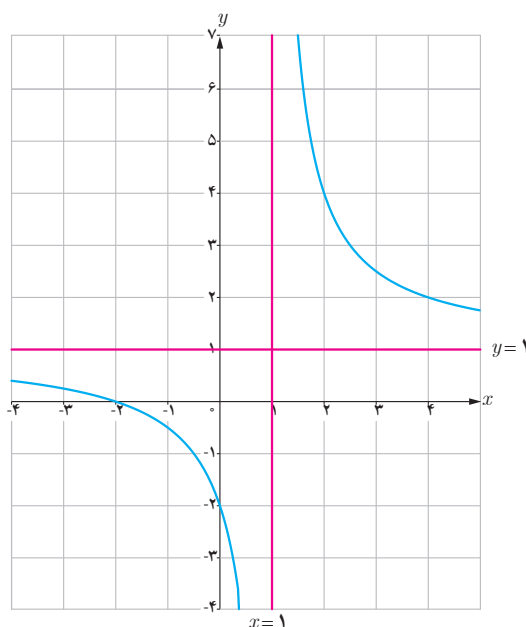
$$f'(x) = \frac{-3}{(x-1)^2}, \quad x \neq 1$$

و بنابراین مشتق به ازای هر x در بازه‌های $(-\infty, 1)$ و $(1, +\infty)$ همواره منفی است و لذا تابع f در هر کدام از این بازه‌ها نزولی است. حال با گرفتن مشتق دوم خواهیم داشت:

$$f''(x) = \frac{6(x-1)}{(x-1)^4} = \frac{6}{(x-1)^3}, \quad x \neq 1$$

بنابراین برای هر x در بازه $(-\infty, 1)$ داریم $f''(x) < 0$ ، لذا تقعر منحنی به سمت پایین و برای هر x در بازه $(1, +\infty)$ داریم $f''(x) > 0$ و لذا تقعر منحنی به سمت بالاست. جدول رفتار تابع به صورت زیر است:

x	$-\infty$	-2	0	1	$+\infty$
y'	-	-	-	-	-
y''	(-)	(-)	(-)	(+)	(+)
y	\nearrow	0	-2	$-\infty + \infty$	\searrow



با توجه به اطلاعات این جدول می توان نمودار این تابع را به صورت روبه رو رسم کرد.

❖ **مثال:** جدول تغییرات و نمودار تابع $f(x) = \frac{3x+4}{-2x+1}$ را رسم کنید.

❖ **حل:** دامنه این تابع $D = \mathbb{R} - \left\{ \frac{1}{2} \right\}$ است. داریم $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = -\frac{3}{2}$ ، لذا $y = -\frac{3}{2}$ مجانب افقی این تابع است و از طرفی

محورهای مختصات را قطع می کند. $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^-} f(x) = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^+} f(x) = -\infty$ ، لذا $x = \frac{1}{2}$ مجانب قائم این تابع است. همچنین نمودار در نقاط $(0, 4)$ و $(-\frac{4}{3}, 0)$

$$f'(x) = \frac{11}{(-2x+1)^2} \quad \text{و} \quad x \neq \frac{1}{2}$$

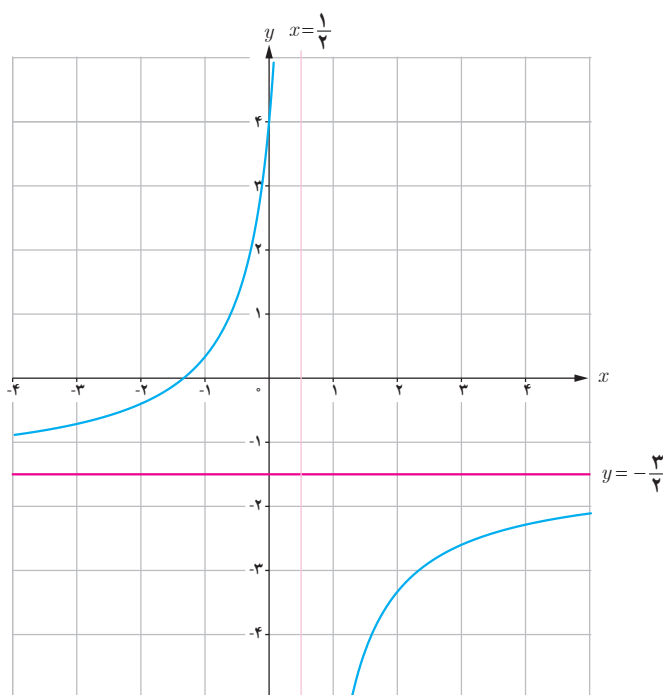
بنابراین مشتق به ازای هر x در بازه‌های $(-\infty, \frac{1}{4})$ و $(\frac{1}{4}, +\infty)$ همواره مثبت و در نتیجه تابع f در هر کدام از این بازه‌ها صعودی است. حال با گرفتن مشتق دوم خواهیم داشت:

$$f''(x) = \frac{44}{(-2x+1)^3} \quad \text{و} \quad x \neq \frac{1}{2}$$

بنابراین برای هر x در بازه $(-\infty, \frac{1}{4})$ داریم $f''' > 0$ ، لذا تقعر منحنی به سمت بالاست و برای هر x در بازه $(\frac{1}{4}, +\infty)$ داریم $f''' < 0$ ، لذا تقعر منحنی به سمت پایین است. جدول رفتار تابع به صورت زیر است:

x	$-\infty$	$-\frac{4}{3}$	0	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
y'	+	+	+	+	+
y''	(+)	(+)	(+)	(-)	(-)
y	$-\frac{3}{2}$ \nearrow	0 \nearrow	4 \nearrow	$-\infty + \infty$	$-\frac{3}{2}$ \nearrow

با توجه به اطلاعات این جدول و به کمک چند نقطه کمکی می‌توان نمودار این تابع را به صورت زیر رسم کرد.



۱ جدول رفتار و نمودار توابع زیر را رسم کنید.

الف) $f(x) = 2x^3 - 4x + 1$

ب) $f(x) = x^3 - 5x + 5$

پ) $f(x) = -x(x+2)^2$

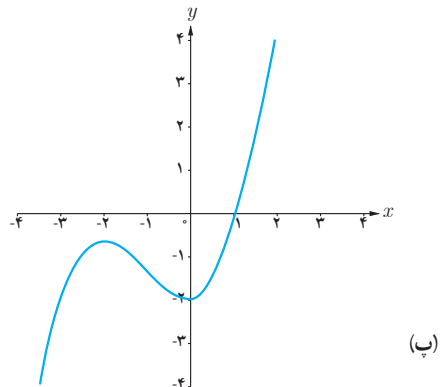
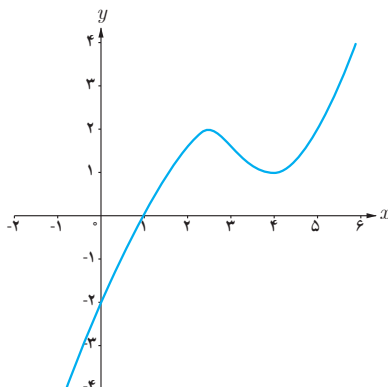
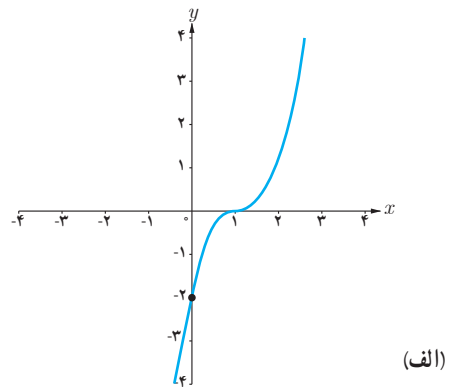
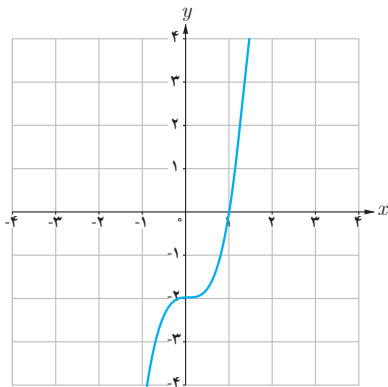
ت) $f(x) = \frac{2x-1}{x-2}$

ث) $f(x) = \frac{-x}{x+3}$

ج) $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x + 1$

۲ فرض کنید $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$. محل تقاطع مجانب‌های آن نقطه $(2, 1)$ است. اگر این تابع از نقطه $(-1, 0)$ بگذرد، ضابطه تابع را به دست آورید.

۳ کدام یک از نمودارهای زیر مربوط به تابع $f(x) = x^3 + x - 2$ است.



- ۱ استوارت، جیمز. (۲۰۱۲) حساب دیفرانسیل و انتگرال. ترجمه حمیدی، ارشک. جلد اول. تهران: انتشارات فاطمی (۱۳۹۵).
- ۲ اسدی، محمدباقر. رنجبری، علی. ریحانی، ابراهیم. طاهری تنجانی، محمدتقی. قربانی آرانی، مجتبی. مین‌باشیان، هادی. (۱۳۹۶). حسابان (۱) - پایه یازدهم دوره دوم متوسطه، سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی. وزارت آموزش و پرورش. تهران: شرکت چاپ و نشر کتاب‌های درسی ایران.
- ۳ اصلاح‌پذیر، بهمن. بروجردیان، ناصر. ریحانی، ابراهیم. طاهری تنجانی، محمدتقی و عالمیان، وحید. (۱۳۹۵). حسابان سال سوم متوسطه. سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی. وزارت آموزش و پرورش. تهران: شرکت چاپ و نشر کتاب‌های درسی ایران.
- ۴ امیری، حمیدرضا. بیژن‌زاده، محمدحسین. بهرامی سامانی، احسان. حیدری قزلبچه، رضا. داورزنی، محمود. ریحانی، ابراهیم. سیدصالحی، محمدرضا. قربانی آرانی، مجتبی. (۱۳۹۵). ریاضی (۱) - پایه دهم دوره دوم متوسطه، سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی. وزارت آموزش و پرورش. تهران: شرکت چاپ و نشر کتاب‌های درسی ایران.
- ۵ ایرانمنش، علی. جمالی، محسن. ربیعی، حمیدرضا. ریحانی، ابراهیم. شاهورانی، احمد و عالمیان، وحید. (۱۳۹۲) ریاضیات ۲ سال دوم آموزش متوسطه. سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی. وزارت آموزش و پرورش. تهران: شرکت چاپ و نشر کتاب‌های درسی ایران.
- ۶ بیژن‌زاده محمدحسین. پاشا، عین‌الله. یوحناپی، که‌کو. (۱۳۹۰). ریاضی عمومی. دوره پیش‌دانشگاهی، رشته تجربی. سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی. وزارت آموزش و پرورش. تهران: شرکت چاپ و نشر کتاب‌های درسی ایران.
- ۷ بیژن‌زاده محمدحسین. عالمیان، وحید و فرشادی، غلامعلی. (۱۳۹۶) حساب دیفرانسیل و انتگرال، دوره پیش‌دانشگاهی - رشته علوم ریاضی، سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی. وزارت آموزش و پرورش. تهران: شرکت چاپ و نشر کتاب‌های درسی ایران.
- ۸ تلگینی، محمود. خردپژوه، فروزان. رجالی، (۱۳۷۸). حساب دیفرانسیل و انتگرال ۱ و ۲. سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی. وزارت آموزش و پرورش. تهران: شرکت چاپ و نشر کتاب‌های درسی ایران.
- ۹ حیدری قزلبچه، رضا. خداکریم، سهیلا. ریحانی، ابراهیم. سیدصالحی، محمدرضا. عراقی، محمدعلی. قصاب، علی و کمیجانی، آناهیتا. (۱۳۹۶). ریاضی (۲) - پایه یازدهم دوره دوم متوسطه، سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی. وزارت آموزش و پرورش. تهران: شرکت چاپ و نشر کتاب‌های درسی ایران.
- ۱۰ رستمی، محمدهاشم. عطوفی، عبدالحمید. گودرزی، محمد. امیری، حمیدرضا. (۱۳۹۵). ریاضیات ۳. سال سوم علوم تجربی. سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی. وزارت آموزش و پرورش. تهران: شرکت چاپ و نشر کتاب‌های درسی ایران.
- ۱۱ ریحانی، ابراهیم. رحیمی، زهرا. کلاهدوز، فهیمه. نوروزی، شپیده. یافتیان، نرگس. شریف‌پور، شقایق. عابدی، ربابه. کتابدار، زهره. سیدصالحی، محمدرضا، امیری، محمدرضا. ایزدی، مهدی. زمانی، ایرج. بهرامی سامانی، احسان. پرنگ، حسن. مین‌باشیان، هادی و نیرو، محمد. (۱۳۹۵). تحلیل خط‌مشی‌ها، اسناد مصوب، پژوهش‌ها و منابع معتبر با حوزه یادگیری ریاضی، واحد تحقیق، توسعه و آموزش ریاضی، سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی.

- ۱۲ Berchie Holliday (۲۰۰۸). **California Algebra ۲. Concepts, Skills, and Problem Solving**. Glencoe/McGraw-Hill.
- ۱۳ Bittinger, M. L., Ellenbogen, D., & Surgent, S. A. (۲۰۰۰). **Calculus and its application**. Reading, MA, Harlow: Addison-Wesley.
- ۱۴ Briggs. W. L., Cochran, L., & Gillett, B. (۲۰۱۴) **Calculus for scientists and engineers: Early transcendentals**. Pearson Education.
- ۱۵ Cohen D., Lee T. & Sklar D. (۲۰۱۰). **Precalculus: A Problems-Oriented Approach**. Sixth Edition. Brooks/Cole.
- ۱۶ Hughes-Hallett. D., Gleason. A. M., Flath. D., Lock, P. F., Gordon, S. P., Lemen, D. O., ... & Pacquale, A. (۱۹۹۸). **Calculus: Single Variable**. Wiley.
- ۱۷ Larson. Ron. & Hodgkins. Amme V. (۲۰۱۳). **college algebra and caculus an applied approach**. The Pennsylvania State University, The Behrend College, second edition.
- ۱۸ Lial, M. L., Greenwell. R. N., & Ritchey, N. P. (۲۰۰۸). **caculus with applications**. Pearson/Addison Wesley.
- ۱۹ Lial, M. L., Greenwell. R., & Ritchey, N. P. (۲۰۱۷). **caculus with applications**. Person Education.
- ۲۰ Rogawski, J., & Adams, C. (۲۰۱۵). **Culculus: Early Transcendenetals**. Palgrave Macmillan.
- ۲۱ Sullivan, M. (۲۰۰۸). **Algebra and Trigonometry**. Eighth edition, Pearson Prentice Hall.
- ۲۲ Sullivan, M. (۲۰۱۵). **Precalculus: Concepts Through Function A Unit Circle Approach To Trigonometry**. Third edition, Pearson Education.



اسامی دبیران و هنرآموزان شرکت کننده در اعتبارسنجی کتاب حسابان (۲) - کد ۱۱۲۲۱۴

سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی جهت ایفای نقش خطیر خود در اجرای سند تحول بنیادین در آموزش و پرورش و برنامه درسی ملی جمهوری اسلامی ایران، مشارکت معلمان را به‌عنوان یک سیاست اجرایی مهم دنبال می‌کند. برای تحقق این امر در اقدامی نوآورانه سامانه تعاملی بر خط اعتبارسنجی کتاب‌های درسی راه‌اندازی شد تا با دریافت نظرات معلمان درباره کتاب‌های درسی نونگاشت، کتاب‌های درسی را در اولین سال چاپ، با کمترین اشکال به دانش‌آموزان و معلمان ارجمند تقدیم نماید. در انجام مطلوب این فرایند، همکاران گروه تحلیل محتوای آموزشی و پرورشی استان‌ها، گروه‌های آموزشی و دبیرخانه راهبری دروس و مدیریت محترم پروژه آقای محسن باهو نقش سازنده‌ای را بر عهده داشتند. ضمن ارج نهادن به تلاش تمامی این همکاران، اسامی دبیران و هنرآموزانی که تلاش مضاعفی را در این زمینه داشته و با ارائه نظرات خود سازمان را در بهبود محتوای این کتاب یاری کرده‌اند به شرح زیر اعلام می‌شود.

ردیف	نام و نام خانوادگی	استان محل خدمت	ردیف	نام و نام خانوادگی	استان محل خدمت
۱	سهیلا ستاری	آذربایجان شرقی	۲۸	موسی آور	فارس
۲	مریم عبدالملکی	کردستان	۲۹	مهدی باهنر	خراسان جنوبی
۳	عباس امیدوار	شهر تهران	۳۰	مهران خوشبختیان	مرکزی
۴	فاطمه رحیمی	شهرستانهای تهران	۳۱	علیرضا رافعی بروجنی	چهارمحال و بختیاری
۵	مهری میرفخار	قزوین	۳۲	حسن رستم زاده	فارس
۶	رضا رخ فروز کیسمی	گیلان	۳۳	محمدعلی تیموری ماسوله	گلستان
۷	نرگس ملایی نژاد	سیستان و بلوچستان	۳۴	ایرج پویا	آذربایجان غربی
۸	زهرا عباسی	مازندران	۳۵	مجتبی بیات	همدان
۹	معصومه ایزدی	همدان	۳۶	عبدالصاحب بابائیان چم علیشاهی	خوزستان
۱۰	سید محسن حسینی	کردستان	۳۷	صدیقه باهنر	خراسان جنوبی
۱۱	نادر بلال زاده	آذربایجان شرقی	۳۸	محمود مهاجر وطن	گلستان
۱۲	فیروزه شاهین شالکوهی	گیلان	۳۹	هما ترجمی	سمنان
۱۳	ژاله لطف اللهی	شهر تهران	۴۰	علی ندیری	مرکزی
۱۴	مرجان رستمی	ایلام	۴۱	کبری پور قبادی	لرستان
۱۵	سمیه قلی زاده دوگانه	کرمانشاه	۴۲	وحید سجادیپور	کهگیلویه و بویراحمد
۱۶	الهام پاکمهر	آذربایجان غربی	۴۳	عبدالرضا حیدری	بوشهر
۱۷	علی همتی دهکردی	چهارمحال و بختیاری	۴۴	فرزانه کد خدایی	لرستان
۱۸	حمید قره گزلو	شهرستانهای تهران	۴۵	جمال نوین	یزد
۱۹	ناهدید محمدی	ایلام	۴۶	میکائیل صدقی	اردبیل
۲۰	سمیرا کشاورز	البرز	۴۷	سکینه حبیبی	لرستان
۲۱	رحیمه قربانیان	آذربایجان شرقی	۴۸	عارف درآیش	هرمزگان
۲۲	صفیه باقری هامانه	یزد	۴۹	منصور قاسم زاده باریکی	مازندران
۲۳	پوران نوروزی	خوزستان	۵۰	جواد کاوانلویی	خراسان شمالی
۲۴	اکبر ایروانی	اصفهان	۵۱	فاطمه پاپری مقدم برازجانی	بوشهر
۲۵	محمد طالبی	خراسان رضوی	۵۲	محسن اسلامی نیا	کرمان
۲۶	علی اکبر حسینی	سیستان و بلوچستان	۵۳	نسرین نقوی	کرمان
۲۷	احسان غلامی	کرمانشاه	۵۴	ابوالفضل شعبانی	سمنان