

۱- به ازای کدام مقدار a تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} x^2 + ax - 5 & ; x > 2 \\ ax - 1 & ; x \leq 2 \end{cases}$ بر روی مجموعه اعداد حقیقی پیوسته است؟
 (۱) هر مقدار حقیقی a (۲) فقط $a = 2$ (۳) فقط $a = -2$ (۴) هیچ مقدار a

گزینه‌ی ۱ پاسخ صحیح است. باید f در $x = 2$ پیوسته باشد. پس:

$$4 + 2a - 5 = 2a - 1 \Rightarrow -1 = -1 \Rightarrow a \in \mathbb{R}$$

دبيرستان - سراسری - تجربی - ۹۱

۲- به ازای کدام مقدار a تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} 3x - [x] & ; x < 2 \\ a & ; x = 2 \\ x + 2 & ; x > 2 \end{cases}$ در نقطه‌ی $x = 2$ پیوسته است؟
 (۱) ۴ (۲) $\frac{4}{5}$ (۳) ۵ (۴) هیچ مقدار a

گزینه‌ی ۴ پاسخ صحیح است.

$$\text{حد چپ} = \lim_{x \rightarrow 2^-} (3x - [x]) = 6 - 1 = 5 \quad , \quad \text{حد راست} = \lim_{x \rightarrow 2^+} (x + 2) = 4$$

حدود چپ و راست در $x = 2$ برابر نیستند، بنابراین هرگز تابع در این نقطه پیوسته نبوده و مقداری برای a وجود ندارد.

دبيرستان - سراسری - تجربی - ۹۲ (سراسری - آزاد)

۳- تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} \frac{1 - \tan^2 x}{\cos 2x} & \text{و} \quad 0 \leq x < \frac{\pi}{4} \\ a \cos 3x & \text{و} \quad \frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{2} \end{cases}$ ، به ازای کدام مقدار a ، در نقطه‌ی

$$x = \frac{\pi}{4}$$
 پیوسته است؟

$$(1) -2\sqrt{2} \quad (2) -1 \quad (3) \sqrt{2} \quad (4) 2$$

گزینه‌ی ۱ پاسخ صحیح است.

$$\left. \begin{aligned} f\left(\frac{\pi}{4}\right) &= a \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} a \\ \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}^+} f(x) &= a \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} a \\ \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}^-} \frac{1 - \tan^2 x}{\cos 2x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}^-} \frac{\cos^2 x}{\cos 2x} = 2 \end{aligned} \right\} \frac{-\sqrt{2}}{2} a = 2 \Rightarrow a = -2\sqrt{2}$$

$$1 - \tan^2 x = 1 - \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{\cos 2x}{\cos^2 x}$$

دبيرستان - سراسری - تجربی - ۹۳ (سراسری - آزاد)

۴- به ازای کدام مقدار a تابع با ضابطه‌ی

$$f(x) = \begin{cases} \frac{a(1 + \sqrt[3]{1-x})}{x^2 - 2x} & ; x > 2 \\ x - a & ; x \leq 2 \end{cases}$$

همواره پیوسته است؟

(۱) $1/2$ (۲) $1/6$ (۳) $2/4$ (۴) $3/2$

گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است.

$$f(2) = 2 - a$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 2 - a$$

$$x \rightarrow 2^-$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{a(1 + \sqrt[3]{1-x})}{x^2 - 2x} \stackrel{\text{HopLim}}{=} \frac{a \left(1 + \frac{-1}{\sqrt[3]{(1-x)^2}} \right)}{2x - 2} = \frac{-a}{\frac{2}{2}} = -\frac{a}{2}$$

$$2 - a = -\frac{a}{2} \Rightarrow 4 - 2a = -a \Rightarrow 4 = a \Rightarrow a = 4$$

دبیرستان - سراسری - ریاضی - ۹۴

۵- تابع به ضابطه‌ی

$$f(x) = \begin{cases} [x] + [-x] & ; x \notin Z \\ a & ; x \in Z \end{cases}$$

بر روی مجموعه‌ی اعداد حقیقی پیوسته است؟ (نماد $[]$ به مفهوم جزء صحیح است.)

(۱) -1 (۲) 1 (۳) 0 (۴) همواره ناپیوسته

گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$[x] + [-x] = \begin{cases} -1 & x \notin Z \\ 0 & x \in Z \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} [x] + [-x] & ; x \in Z \\ a & ; x \notin Z \end{cases} \Rightarrow f(x) = \begin{cases} -1 & x \notin Z \\ a & x \in Z \end{cases} \Rightarrow a = -1$$

دبیرستان - سراسری - ریاضی - ۹۶

۶- تابع با ضابطه‌ی

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{1 - \sqrt{1-x}} & ; x \neq 0 \\ a & ; x = 0 \end{cases}$$

در نقطه‌ی $x = 0$ پیوسته است؟

(۱) -2 (۲) -1 (۳) 1 (۴) 2

گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) \stackrel{\text{HOP}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{-1}{2\sqrt{1-x}}} = 2$$

$$f(0) = a \Rightarrow a = 2$$

دبیرستان - سراسری - تجربی - ۹۶

۷- به ازای کدام مقدار a تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \begin{cases} \frac{\cos x - \sqrt{\cos x}}{\sin^2 x} & ; x \neq 0 \\ a & ; x = 0 \end{cases}$ در نقطه‌ی $x = 0$ پیوسته است؟

- (۱) $-\frac{1}{4}$ (۲) $-\frac{1}{2}$ (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) هیچ مقدار a

گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{\cos x})^2 - \sqrt{\cos x}}{\sin^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\cos x}(\sqrt{\cos x} - 1)}{\sin^2 x} \times \frac{\sqrt{\cos x} + 1}{\sqrt{\cos x} + 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\cos x}(\sqrt{\cos x} - 1) \times (\sqrt{\cos x} + 1)}{\sin^2 x (\sqrt{\cos x} + 1)} = \frac{\sqrt{\cos x} \times (\cos x - 1)}{\sin^2 x \times (\sqrt{\cos x} + 1)}$$

$$x \rightarrow 0 \Rightarrow \frac{\sqrt{1} \times -2 \times \frac{1}{4}}{1 \times 2} = -\frac{1}{4}$$

دبیرستان - سراسری - تجربی - ۹۵

۸- حاصل $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin(1 + \cos x)}{1 - \cos 2x}$ ، کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{4}$ (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) ۱ (۴) ۲

گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin(1 + \cos x)}{1 - \cos 2x} \stackrel{\text{hop}}{=} \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{-\sin x \times \cos(1 + \cos x)}{2 \sin 2x} = \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{-\sin x \times 1}{4 \sin x \cos x} = \frac{1}{4}$$

راه دوم:

$$\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin(1 + \cos x)}{1 - \cos 2x} = \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{1 + \cos x}{2 \sin^2 x} = \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{1 + \cos x}{2(1 - \cos^2 x)} = \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{1}{2(1 - \cos x)} = \frac{1}{4}$$

دبیرستان - سراسری - ریاضی - ۹۲ (سراسری - آزاد)

۹- حاصل $\lim_{x \rightarrow 0} ([2x] + [-2x]) \frac{1 - \cos^3 x}{1 - \sqrt{1+x^2}}$ ، کدام است؟ (نماد [] جزء صحیح است.)

- (۱) -۳ (۲) ۳ (۳) صفر (۴) حد ندارد.

گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است.

$$[2x] + [-2x] = \begin{cases} 0 & x = \frac{k}{2} \\ -1 & x \neq \frac{k}{2} \quad (k \in \mathbb{Z}) \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} ([2x] + [-2x]) = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} (-1) \frac{(1 - \cos x) \overbrace{(1 + \cos x + \cos^2 x)}^3 + \cancel{\cos^3 x}}{(1 - \sqrt{1-x^2})(1 + \sqrt{1+x^2})} \times \left(1 + \sqrt{1+x^2}\right)$$

$$= -6 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{-x^2} = -6 \times \frac{-1}{2} = 3$$

دبیرستان - سراسری - ریاضی - ۹۴

۱۰- حاصل $\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{6}{x^2 - 2x} - \frac{x+1}{x-2} \right)$ ، کدام است؟

- (۱) $-\frac{5}{2}$ (۲) $-\frac{3}{2}$ (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) $\frac{3}{2}$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{6}{x(x-2)} - \frac{x+1}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{6 - x(x+1)}{x(x-2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-x^2 - x + 6}{x(x-2)}$$

روش اول $\rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-(x+3)(\cancel{x-2})}{x(\cancel{x-2})} = \frac{-5}{2}$

روش دوم
هوپیتال $\rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-2x-1}{2x-2} = \frac{-5}{2}$

دبیرستان - سراسری - تجربی - ۹۶