

۱- اگر $f(x) = \frac{1 - x\sqrt{x}}{\sqrt{x} - 1}$ مقدار $f'(4)$ کدام است؟

گزینه ۱) $-\frac{3}{4}$ گزینه ۲) $-\frac{5}{4}$ گزینه ۳) $\frac{3}{4}$ گزینه ۴) $\frac{5}{4}$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

نکته: $a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \pm ab + b^2)$

اگر f را ساده کنیم، داریم:

$$f(x) = \frac{1 - (\sqrt{x})^3}{\sqrt{x} - 1} = \frac{(1 - \sqrt{x})(1 + \sqrt{x} + x)}{-(1 - \sqrt{x})} = -(1 + \sqrt{x} + x)$$

$$f'(x) = -\frac{1}{2\sqrt{x}} - 1 \Rightarrow f'(4) = -\frac{1}{4} - 1 = -\frac{5}{4}$$

دبیرستان - آزمونهای گزینه ۲ - ریاضی - سال تحصیلی ۹۶ - ۹۵ - مرحله ۱

۲- مقدار مشتق تابع $f(x) = 3\sqrt{x-a} + 2$ به ازای $x = 4$ ، برابر $\frac{1}{3}$ است. a کدام است؟

گزینه ۱) $\frac{65}{4}$ گزینه ۲) $-\frac{65}{4}$ گزینه ۳) $\frac{33}{2}$ گزینه ۴) $-\frac{33}{2}$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$f(x) = 3\sqrt{x-a} + 2 \Rightarrow f'(x) = \frac{3}{2\sqrt{x-a}} \xrightarrow{x=4} f'(4) = \frac{3}{2\sqrt{4-a}} \xrightarrow{\text{طبق فرض}} \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow \sqrt{4-a} = \frac{9}{2} \xrightarrow{\text{توان ۲}} 4-a = \frac{81}{4} \Rightarrow a = \frac{16-81}{4} = -\frac{65}{4}$$

دبیرستان - آزمونهای گزینه ۲ - تجربی - سال تحصیلی ۹۶ - ۹۵ - مرحله ۱۱

۳- اگر $f(x) = (x^2 - x - 2)\sqrt[3]{x^2 - 7x}$ حاصل $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-1+h) - f(-1)}{h}$ کدام است؟

گزینه ۱) -6 گزینه ۲) -3 گزینه ۳) $-\frac{3}{2}$ گزینه ۴) $-\frac{3}{4}$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. مشتق در نقطه‌ی $x = -1$ را می‌خواهد، که ریشه پرانتز قبل رادیکال است. پس کافیت فقط از پرانتز مشتق بگیریم و در رادیکال ضرب کنیم.

$$f'(x) = (2x - 1)\sqrt[3]{x^2 - 7x} \xrightarrow{x=-1} f'(-1) = (-2 - 1)\sqrt[3]{8} = -6$$

دبیرستان - سراسری - ریاضی - ۹۲ (سراسری - آزاد)

۴- تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \begin{cases} ax^3 + bx & ; x < 1 \\ 2\sqrt{4x-3} & ; x \geq 1 \end{cases}$ ، بر روی مجموعه اعداد حقیقی مشتق پذیر است. b کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{2}$ (۲) ۱ (۳) $\frac{3}{2}$ (۴) ۲

گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است.

شرط پیوستگی: $\lim_{x \rightarrow 1^-} ax^3 + bx = \lim_{x \rightarrow 1^-} 2\sqrt{4x-3} = f(1) \Rightarrow a + b = 2$

$$\Rightarrow \text{مشتق چپ} = \text{مشتق راست} \Rightarrow 2 \times \frac{4}{2\sqrt{4x-3}} \Big|_{x=1} = 3ax^2 + b \Big|_{x=1} \Rightarrow 3a + b = 4$$

از حل دستگاه به وجود آمده به $a = 1$ و $b = 1$ می‌رسیم.

دبیرستان - سراسری - ریاضی - ۹۲ (سراسری - آزاد)

۵- مشتق راست تابع با ضابطه‌ی $f(x) = ([x] - |x|) \sqrt[3]{9x}$ ، در نقطه‌ی $x = -3$ ، کدام است؟

- (۱) $-\frac{16}{3}$ (۲) -۵ (۳) -۴ (۴) $\frac{7}{3}$

گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است. $x \rightarrow (-3)^+$: $f(x) = (-3 - (-x)) \sqrt[3]{9x} = (x - 3) \sqrt[3]{9x}$

$$\rightarrow f'(x) = \sqrt[3]{9x} + \frac{9(x-3)}{3(\sqrt[3]{9x})^2} \rightarrow f'_+(-3) = -3 + \frac{-54}{+27} = -3 - 2 = -5$$

دبیرستان - سراسری - ریاضی - ۹۳ (سراسری - آزاد)

۶- تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \begin{cases} \sin^2 x - \cos 2x & \text{و } 0 < x \leq \frac{\pi}{4} \\ a \tan x + b \sin 2x & \text{و } \frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{2} \end{cases}$ ، در نقطه‌ی $x = \frac{\pi}{4}$ مشتق پذیر است، b کدام است؟

- (۱) -۱ (۲) $-\frac{1}{2}$ (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) ۱

گزینه‌ی ۱ پاسخ صحیح است.

$$\frac{1}{4} - 0 = a(1) + b(1) \Rightarrow a + b = \frac{1}{4}$$

$$f'_+ \left(\frac{\pi}{4} \right) = f'_- \left(\frac{\pi}{4} \right) \Rightarrow a(1 + \tan^2 x) + 2b \cos 2x = \sin 2x + 2 \sin 2x$$

$$x = \frac{\pi}{4} \rightarrow 2a + 0 = 3 \Rightarrow a = \frac{3}{2} \Rightarrow b = -1$$

دبیرستان - سراسری - تجربی - ۹۳ (سراسری - آزاد)

۷- در تابع با ضابطه $f(x) = x\sqrt{x} + |x-1|$ مقدار $f'_+(1) + 3f'_-(1)$ کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵

گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است.

$$f(x) = \begin{cases} x\sqrt{x} + x - 1 & x \geq 1 \\ x\sqrt{x} - x + 1 & x < 1 \end{cases} \Rightarrow f'(x) = \begin{cases} \frac{3}{2}\sqrt{x} + 1 & x > 1 \\ \frac{3}{2}\sqrt{x} - 1 & x < 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} f'_+(1) = \frac{5}{2} \\ f'_-(1) = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow f'_+(1) + 3f'_-(1) = \frac{5}{2} + \frac{3}{2} = 4$$

دبیرستان - سراسری - تجربی - ۹۰

۸- تابع $f(x) = \begin{cases} ax^2 - a & x < 1 \\ x^3 - x & x \geq 1 \end{cases}$ در $x = 1$ مشتق پذیر است. مقدار a کدام است؟

- (۱) $a = 1$ (۲) $a = \pm 1$ (۳) a یافت نمی‌شود. (۴) $a \in \mathbb{R}$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. اولاً باید داشته باشیم:

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = f(1) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^+} (x^3 - x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (ax^2 - a) = 1 - 1$$

$$\Rightarrow 0 = 0 = 0 \Rightarrow a \in \mathbb{R} \quad (*)$$

ثانیاً باید داشته باشیم:

$$f'_+(1) = f'_-(1) \Rightarrow (3x^2 - 1)_{x=1} = (2ax)_{x=1} \Rightarrow 2 = 2a \Rightarrow a = 1 \quad (**)$$

از اشتراک (*) و (**): داریم: $a = 1$

دبیرستان - آزمونهای گزینه ۲ - ریاضی - سال تحصیلی ۹۶ - ۹۵ - مرحله ۱۱

۹- اگر $f(x) = \frac{x^2 + ax + b}{[x]}$ و $f'_-(2) + f'_+(2) = 3$ ، مقدار b کدام است؟

- (۱) -۲ (۲) ۴ (۳) -۱ (۴) صفر

گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

f در $x = 2$ پیوسته است $\Rightarrow f'_-(2) + f'_+(2) = 3$ در $x = 2$ از راست پیوسته است $\Rightarrow f'_+(2)$ موجود است
 f در $x = 2$ پیوسته است $\Rightarrow f'_-(2) + f'_+(2) = 3$ در $x = 2$ از چپ پیوسته است $\Rightarrow f'_-(2)$ موجود است

بنابراین داریم:

$$f(2^+) = f(2^-) \Rightarrow \frac{4 + 2a + b}{2} = \frac{4 + 2a + b}{1} \Rightarrow 4 + 2a + b = 0 \quad (*)$$

$$f(x) = \frac{x^2 + ax + b}{[x]} : \begin{cases} \frac{x^2 + ax + b}{2} & 2 \leq x < 3 \\ x^2 + ax + b & 1 \leq x < 2 \end{cases} \Rightarrow f'(x) = \begin{cases} \frac{2x + a}{2} & 2 \leq x < 3 \\ 2x + a & 1 \leq x < 2 \end{cases}$$

طبق فرض داریم:

$$f'_-(2) + f'_+(2) = 3 \Rightarrow (4 + a) + \left(\frac{4 + a}{2}\right) = 3 \Rightarrow 4 + a = 2 \Rightarrow a = -2$$

با جای گذاری در (*) داریم:

$$4 - 4 + b = 0 \Rightarrow b = 0$$

دبیرستان - آزمونهای گزینه ۲ - ریاضی - سال تحصیلی ۹۶ - ۹۵ - مرحله ۱۱

۱۰- اگر تابع $f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx & x > 1 \\ x^3 - 2x & x < 1 \end{cases}$ در نقطه $x = 1$ مشتق پذیر باشد، حاصل $a^2 + b^2$ کدام است؟

(۱) ۱۳ (۲) ۵ (۳) ۲۶ (۴) ۳۴

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ابتدا باید تابع f در $x = 1$ پیوسته باشد:

$$f(1) = \lim_{x \rightarrow 1} f(x) \Rightarrow a + b = 1 - 2 \Rightarrow a + b = -1$$

همچنین باید مقادیر مشتق راست و مشتق چپ تابع در $x = 1$ برابر باشد:

$$f'_+(1) = f'_-(1) \Rightarrow (2ax + b)_{x=1} = (3x^2 - 2)_{x=1} \Rightarrow 2a + b = 1$$

$$a^2 + b^2 = 13 \quad \text{حال از دستگاه} \begin{cases} a + b = -1 \\ 2a + b = 1 \end{cases} \text{ نتیجه می شود } a = 2 \text{ و } b = -3 \text{، پس:}$$

دبیرستان - آزمونهای گزینه ۲ - تجربی - سال تحصیلی ۹۶ - ۹۵ - مرحله ۹