۱.گزینه ۱

$$y' = \frac{f'(x)g(x)-g'(x)f(x)}{(g(x))^۲} = ۳ \Rightarrow \frac{f'(۱)g(۱)-g'(۱)f(۱)}{(g(۱))^۲} = ۳$$

$$\Rightarrow \frac{-۴g(۱)-۰}{(g(۱))^۲} = ۳ \Rightarrow ۳g(۱) = -۴ \Rightarrow g(۱) = -\frac{۴}{۳}$$

۲.گزینه ۲

می‌دانیم که $f'_{-}(۲) = \lim\limits_{\Delta x \to ۰^-} \frac{f(۲+\Delta x)-f(۲)}{\Delta x}$ است.

دقت کنید وقتی $x \to ۲^-$ داخل قدر مطلق منفی است پس داریم:

$$f(x) = -x+۲+\sqrt{۲x} \Rightarrow f'(x) = -۱+\frac{۱(۲)}{۲\sqrt{۲x}} \Rightarrow f'_{-}(۲) = -۱+\frac{۱}{۲} = \frac{-۱}{۲}$$

۳.گزینه ۱ همانگونه که می‌دانیم آهنگ آنی تغییر تابع f در نقطه‌ی $t=۴$ برابر با مشتق تابع در این نقطه است. پس داریم:

$$f'(t) = -\frac{۲۴۰}{t^۲} \Rightarrow f'(۴) = \frac{-۲۴۰}{۱۶} = -۱۵$$

$$\text{آهنگ متوسط} = \frac{f(۵)-f(۳)}{۵-۳} = \frac{\frac{۲۴۰}{۵}-\frac{۲۴۰}{۳}}{۲} = \frac{۴۸-۸۰}{۲} = -۱۶$$

پس آهنگ آنی یک واحد از آهنگ متوسط بیشتر است.

۴.گزینه ۳ با توجه به این که آهنگ لحظه‌ای تغییر f در $x=۲$ برابر $-\frac{۳}{۲}$ است، در نتیجه $f'(۲) = -\frac{۳}{۲}$ می‌باشد.

$$\text{پس}: \lim_{h\to ۰} \frac{f(۲+h)-f(۲)}{h} = -\frac{۳}{۲} \Rightarrow \lim_{h\to ۰}\frac{f(۲)-f(۲+h)}{h}$$

$$= -\lim_{h\to ۰}\frac{f(۲+h)-f(۲)}{h} = -f'(۲) = -(-\frac{۳}{۲}) = \frac{۳}{۲}$$

۵.گزینه ۱

می دانیم: $\boxed{y=f(u)\to y'=u'f'(u)}$

$$y = f\left(\sqrt[۳]{۶x+۲}\right) \Rightarrow y' = \frac{۶}{۳\sqrt[۳]{(۶x+۲)^۲}} f'(\sqrt[۳]{۶x+۲}) \xrightarrow{x=۱} y' = \frac{۶}{۱۲}f'(۲) = -۲ \Rightarrow f'(۲) = -۴$$

۶.گزینه ۲

شرط مشتق پذیری تابع f در $x=a$ آن است که تابع f در $x=a$ پیوسته باشد و مشتق‌های راست و چپ آن در $x=a$ باهم برابر باشند.

$$\text{شرط پیوستگی}: \begin{cases} \lim\limits_{x\to ۱^+} f(x) = \lim\limits_{x\to ۱^+} ۲\sqrt{۴x-۳} = ۲ \\ \lim\limits_{x\to ۱^-} f(x) = \lim\limits_{x\to ۱^-}(ax^۳+bx) = a+b \Rightarrow a+b=۲ \quad (I) \\ f(۱)=۲ \end{cases}$$

$$\text{تساوی مشتق‌های راست وچپ}: f'_{+}(۱) = f'_{-}(۱) \to ۲\times\frac{۴}{۲\sqrt{۴x-۳}} = ۳ax^۲+b \to ۴ = ۳a+b \quad (II)$$

از I و II جواب $a=۱$ و $b=۱$ بدست می‌آید.

۷.گزینه ۳ می‌دانیم: $\boxed{y=f(u)\to y'=u'f'(u)}$

ابتدا حد عبارت داده شده را محاسبه کرده و اطلاعات مورد نظر را بدست می‌آوریم.

$$\lim_{x\to ۴}\frac{f(x)+۷}{x-۴} = \frac{f(۴)+۷}{۰} \xrightarrow[\text{کسر}\frac{۰}{۰}\text{بوده که پس از رفع ابهام جوابش عدد شده است}]{\text{چون جواب حد، عدد شده است پس این}} f(۴)+۷ = ۰ \to f(۴) = -۷$$

پس : $\lim\limits_{x\to ۴}\frac{f(x)+۷}{x-۴}=\frac{۰}{۰}\xrightarrow{HOP}\lim\limits_{x\to ۴}\frac{f'(x)}{۱}=f'(۴)=-\frac{۳}{۲}$

اکنون مشتق $y=\frac{f(۲x)}{x}$ را حساب می‌کنیم.

$$y=\frac{f(۲x)}{x}\to y'=\frac{۲f'(۲x)\cdot x-۱f(۲x)}{x^۲}$$

$$\to y'(۲)=\frac{۴f'(۴)-f(۴)}{۴}=\frac{۴(-\frac{۳}{۲})-(-۷)}{۴}=\frac{-۶+۷}{۴}=\frac{۱}{۴}$$

۸.گزینه ۱

مشخص است که $f'(۲)=\lim\limits_{x\to ۲}\frac{f(x)-f(۲)}{x-۲}$ می‌باشد. بنابراین، کافی است از تابع مشتق گرفته و به جای x آن عدد ۲ را قرار دهیم.

$$f(x)=\left(\sqrt{\frac{x+۲}{۲x-۳}}\right)^۳\to f'(x)=۳\left(\sqrt{\frac{x+۲}{۲x-۳}}\right)^۲\left(\frac{\frac{۱(۲x-۳)-۲(x+۲)}{(۲x-۳)^۲}}{۲\sqrt{\frac{x+۲}{۲x-۳}}}\right)$$

$$=\frac{۳}{۲}\left(\sqrt{\frac{x+۲}{۲x-۳}}\right)\left(\frac{-۷}{(۲x-۳)^۲}\right)\to f'(۲)=\frac{۳}{۲}(۲)(-۷)=-۲۱$$

۹.گزینه ۳ وقتی $x\to ۱^+$ داخل قدر مطلق، مثبت است و وقتی $x\to ۱^-$ داخل قدر مطلق، منفی است.

$$x\to ۱^+ : f(x)=x\sqrt{x}+x-۱=x^{\frac{۳}{۲}}+x-۱\to f'(x)=\frac{۳}{۲}x^{\frac{۱}{۲}}+۱\to f'_+(۱)=\frac{۳}{۲}+۱=\frac{۵}{۲}$$

$$x\to ۱^- : f(x)=x\sqrt{x}-x+۱=x^{\frac{۳}{۲}}-x+۱\to f'(x)=\frac{۳}{۲}x^{\frac{۱}{۲}}-۱\to f'_-(۱)=\frac{۳}{۲}-۱=\frac{۱}{۲}$$

پس : $f'_+(۱)+۳f'_-(۱)=\frac{۵}{۲}+۳(\frac{۱}{۲})=\frac{۸}{۲}=۴$

۱۰.گزینه ۲ در ابتدا قدر مطلق‌های توابع f و g را از بین می‌بریم.

$$f(x)=\frac{۴}{۵}x-\frac{۱}{۵}|x|\to f(x)=\begin{cases}\frac{۴}{۵}x-\frac{۱}{۵}x & x\geq ۰\\ \frac{۴}{۵}x+\frac{۱}{۵}x & x<۰\end{cases}\to f(x)=\begin{cases}\frac{۳}{۵}x & x\geq ۰\\ x & x<۰\end{cases}$$

$$g(x)=۴x+|x|\to g(x)=\begin{cases}۴x+x & x\geq ۰\\ ۴x-x & x<۰\end{cases}\to g(x)=\begin{cases}۵x & x\geq ۰\\ ۳x & x<۰\end{cases}$$

$$x\geq ۰ \ : \ fog(x)=f(g(x))=\frac{۳}{۵}(۵x)=۳x$$

$$x<۰ \ : \ fog(x)=f(g(x))=۳x$$

یعنی $fog(x)=۳x$ است پس مشتق آن برابر ۳ می‌باشد.