۱- در تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\sqrt{x}$ ، آهنگ متوسط تغییر تابع نسبت به تغییر متغیر x، در نقطه‌ی $x=۱$ با نموّ متغیر ، ۰/۲۱ از آهنگ لحظه‌ای تابع در این نقطه، چقدر کم‌تر است؟

۱) $\frac{۱}{۴۲}$ ۲) $\frac{۱}{۲۱}$ ۳) $\frac{۳}{۴۲}$ ۴) $\frac{۲}{۲۱}$

گزینه‌ی ۱ پاسخ صحیح است.

$$f(x)=\sqrt{x} \quad \text{و} \quad \begin{cases} x=۱ \\ \Delta x=۰/۲۱ \end{cases}$$

$$\text{آهنگ متوسط}=\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{x+\Delta x-x}=\frac{f(۱+۰/۲۱)-f(۱)}{۱+۰/۲۱-۱}=\frac{f(۱/۲۱)-f(۱)}{۰/۲۱}$$

$$=\frac{\sqrt{۱/۲۱}-\sqrt{۱}}{۰/۲۱}=\frac{۱/۱-۱}{۰/۲۱}=\frac{۰/۱}{۰/۲۱}=\frac{۱}{۲/۱}$$

$$x=۱ \text{ آهنگ لحظه‌ای در } : f'(x)=\frac{۱}{۲\sqrt{x}}$$

$$f'(x=۱)=\frac{۱}{۲\sqrt{۱}}=\frac{۱}{۲} \Rightarrow \text{آهنگ لحظه‌ای - آهنگ متوسط}=\frac{۱}{۲}-\frac{۱}{۲/۱}=\frac{۲/۱-۲}{۲(۲/۱)}=\frac{۰/۱}{۴/۲}=\frac{۱}{۴۲}$$

۲- آهنگ متوسط تغییرات تابع $f(x)=x-\sqrt{x}$ به تغییرات تابع $g(x)=۲x-۱$ وقتی x از ۴ به ۴/۴۱ تغییر کند چقدر است؟

۱) $\frac{۱۷}{۴۲}$ ۲) $\frac{۱۶}{۴۱}$ ۳) $\frac{۳۱}{۸۲}$ ۴) $\frac{۳۲}{۸۲}$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$\Delta f=f(۴/۴۱)-f(۴)=۴/۴۱-۲/۱-(۴-۲)=۰/۳۱$$

$$\Delta g=g(۴/۴۱)-g(۴)=۲\times ۴/۴۱-۱-(۲\times ۴-۱)=۰/۸۲ \Rightarrow \frac{\Delta f}{\Delta g}=\frac{۳۱}{۸۲}$$

۳- آهنگ متوسط تغییر تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\sqrt{x^۲+۱۴۴}$ نسبت به متغییر x روی بازه‌ای از $x=۵$ و $x=۹$ کدام است؟

۱) ۰/۴ ۲) ۰/۵ ۳) ۰/۶ ۴) ۰/۷

گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است.

$$\frac{f(۹)-f(۵)}{۹-۵}=\frac{\sqrt{۸۱+۱۴۴}-\sqrt{۲۵+۱۴۴}}{۴}=\frac{۱۵-۱۳}{۴}=\frac{۱}{۲}=۰/۵$$

۴- مشتق چپ تابع $f(x) = |۲x + ۱| - |x - ۱| \quad \forall\, x \in R$ در نقطهٔ $x = -\frac{۱}{۲}$ کدام است؟

۱) -۱		۲) ۱		۳) $\frac{-۱}{۲}$		۴) $\frac{۱}{۲}$

روش اول : تابع $f(x)$ را می‌توان بصورت یک تابع سه ضابطه‌ای نوشت که فقط ضابطهٔ آن به ازای $x \leqslant \frac{-۱}{۲}$ مورد احتیاج است، پس :

$$x \leqslant \frac{-۱}{۲} \Rightarrow ۲x + ۱ \leqslant ۰ \Rightarrow x - ۱ < ۰ \Rightarrow f(x) = -(۲x + ۱) + (x - ۱) = -x - ۲$$

پس $f'(x) = -۱$ بوده و گزینه ۱ جواب صحیح می‌باشد.

روش دوم: با استفاده از تعریف مشتق چپ:

$$f'\left(-\frac{۱}{۲}\right)^{-} = \lim_{x \to -\frac{۱}{۲}^{-}} \frac{|۲x + ۱| - |x - ۱| - \frac{۳}{۲}}{x + \frac{۱}{۲}} = \lim_{x \to -\frac{۱}{۲}^{-}} \frac{|۲x + ۱| - ۰}{x + \frac{۱}{۲}} - \lim_{x \to -\frac{۱}{۲}^{-}} \frac{|x - ۱| - \frac{۳}{۲}}{x + \frac{۱}{۲}}$$

$$\Rightarrow f'\left(-\frac{۱}{۲}\right)^{-} = \lim_{x \to -\frac{۱}{۲}^{-}} \frac{۲\left|x + \frac{۱}{۲}\right| - ۰}{x + \frac{۱}{۲}} - \lim_{x \to -\frac{۱}{۲}^{-}} \frac{-x - \frac{۱}{۲}}{x + \frac{۱}{۲}} = -۲ - (-۱) = -۱$$

بنابراین گزینه ۱ صحیح است.

۵- تابع $f(x) = \begin{cases} \dfrac{|x+1|}{x-2} & x<1 \\ \dfrac{|x-1|}{x+2} & x \geq 1 \end{cases}$ در چند نقطه مشتق‌پذیر **نیست**؟

۱) دو نقطه ۲) یک نقطه ۳) چهار نقطه ۴) سه نقطه

برای بررسی کردن مشتق‌پذیری یک تابع چند ضابطه‌ای، ابتدا باید تک‌تک ضابطه‌ها را در فاصلهٔ داده شده، بررسی کنیم سپس مشتق‌پذیری تابع را در نقاط پرش، بررسی نماییم.

پس در مورد تابع $f(x) = \begin{cases} \dfrac{|x+1|}{x-2} & x<1 \\ \dfrac{|x+1|}{x+2} & x \geq 1 \end{cases}$ به ترتیب زیر عمل می‌کنیم:

$x \in (-\infty, 1)$ $y_1 = \dfrac{|x+1|}{x-2}$: تابع در ریشهٔ مخرج پیوسته نمی‌باشد پس مشتق‌پذیر هم نخواهد بود ولی چون ریشهٔ مخرج $(x=2)$ در فاصلهٔ داده شده $(-\infty, 1)$ قرار ندارد پس مشکلی ایجاد نمی‌کند. ولی می‌دانیم تابع در ریشهٔ سادهٔ تابع داخل قدر مطلق نیز مشتق‌پذیر نمی‌باشد. پس $f(x)$ در نقطهٔ $(x+1=0 \Rightarrow x=-1)$ که در فاصلهٔ $(-\infty, 1)$ هم قرار دارد، مشتق‌پذیر نمی‌باشد.

$$y_2 = \frac{|x-1|}{x+2},\ x \in [1, +\infty) \Rightarrow y_2 = \frac{x-1}{x+2},\ x \in [1, +\infty)$$

y_2 در فاصلهٔ داده شده مشتق‌پذیر می‌باشد چون در این فاصله نه ریشهٔ مخرج وجود دارد و نه ریشهٔ قدر مطلق. حال به نقطهٔ پرش یعنی $x=1$ می‌پردازیم. ابتدا پیوستگی آن را بررسی می‌کنیم:

$$\left.\begin{array}{l} f(1) = \dfrac{|1-1|}{1+2} = 0 \\ \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{|x-1|}{x+2} = 0 \\ \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{|x+1|}{x-2} = \dfrac{2}{1-2} = -2 \end{array}\right\} \Rightarrow$$ $f(x)$ در $x=1$ پیوسته نمی باشد

$\Rightarrow$ $f(x)$ در $x=1$ مشتق‌پذیر نمی‌باشد

پس در مجموع، تابع در $x=1$ و $x=-1$ مشتق‌پذیر نمی‌باشد. بنابراین گزینهٔ ۱ پاسخ صحیح سوال می‌باشد.

۶- تابع با ضابطه‌ی $f(x) = (x-1)[x]$ در کدام نقطه پیوسته است ولی مشتق‌پذیر **نیست**؟

۱) 0 ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) 1 ۴) $\sqrt{2}$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$x-1=0 \Rightarrow x=1 \Rightarrow \begin{cases} f(1)=0 \\ \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = 0 \Rightarrow \end{cases}$$

f در $x=1$ پیوسته است. ولی مشتق چپ و راست در این نقطه با هم یکی نیست.

۷- مشتق راست تابع $y = \sqrt{۱ - \sqrt{۱ - x^۲}}$ در $x = ۰$ چقدر از مشتق چپ آن در $x = ۰$ بیشتر است؟

۱) $\sqrt{۲}$　　۲) $-\sqrt{۲}$　　۳) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$　　۴) $-\frac{\sqrt{۲}}{۲}$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$f'(۰) = \lim_{x \to ۰}\frac{f(x) - f(۰)}{x - ۰} = \lim_{x \to ۰}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to ۰}\frac{\sqrt{۱ - \sqrt{۱ - x^۲}}}{x} = \lim_{x \to ۰}\frac{\sqrt{x^۲}}{x \cdot \left(\sqrt{۱ + \sqrt{۱ - x^۲}}\right)}$$

$$= \lim_{x \to ۰}\frac{|x|}{x\sqrt{۱ + \sqrt{۱ - x^۲}}} \Rightarrow \begin{cases} f'_+(۰) = \frac{\sqrt{۲}}{۲} \\ f'_-(۰) = -\frac{\sqrt{۲}}{۲} \end{cases} \Rightarrow f'_+(۰) - f'_-(۰) = \sqrt{۲}$$

۸- با فرض $f(x) = \begin{cases} ۳x^۲ - x & x > ۲ \\ ۲x + ۶ & x \le ۲ \end{cases}$ حاصل $\lim_{x \to ۰^-}\frac{f(۲ + ۳h) - f(۲ - ۲h)}{h}$ کدام است؟

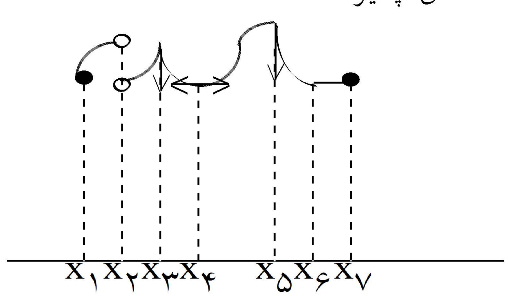
۱) ۲۸　　۲) ۱۰　　۳) ۱۶-　　۴) ۱۷

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. تابع f در $x = ۲$ پیوسته است. لذا با توجه به تعریف مشتق داریم:

$$\lim_{h \to ۰^-}\frac{f(۲ + ۳h) - f(۲) - (f(۲ - ۲h) - f(۲))}{h} = ۳f'_-(۲) + ۲f'_+(۲)$$

$$= ۳ \times ۲ + ۲(۱۲ - ۱) = ۶ + ۲۲ = ۲۸$$

۹- اگر f بر بازه $[x_۱ , x_۷]$ مطابق شکل باشد f بر این بازه دارای چند نقطه مشتق‌ناپذیر است؟



۱) ۷
۲) ۵
۳) ۳
۴) بی‌شمار

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. اولاً بدیهی است تابع در $x_۱ , x_۷$ مشتق‌پذیر نیست. در $x_۲$ به دلیل ناپیوستگی مشتق‌پذیر نیست. در $x_۳$　$f'_+(x_۳) = -\infty$　$f'_-(x_۳) = +\infty$ پس در این نقطه مشتق‌پذیر نمی‌باشد. $f'(x_۴) = ۰$ در $x_۵$ داریم $f'_-(x_۵) = ۰ , f'_+(x_۵) = -\infty$ پس $x_۵$ نیز جزء نقاط مشتق‌پذیر برای f است پس در کل این تابع بر بازه $[x_۱ , x_۷]$ دارای ۵ نقطه مشتق‌پذیر است. تابع در $x_۶$ مشتق‌پذیر است.

۱۰- هرگاه تابع $y = ۲x|x - ۲| + a|x^{۲} - ۴|$ در $x = ۲$ مشتق‌پذیر باشد مقدار a کدام است؟

۱) ۲-　　　۲) ۱-　　　۳) ۱　　　۴) ۲

گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$y = |x - ۲|(۲x + a|x + ۲|)$

باید $۲x + a|x + ۲|$ به ازای $x = ۲$ صفر باشد،

پس:

$۴ + ۴a = ۰ \Rightarrow a = -۱$