پاسخنامه تشریحی

۱ - گزینه ۴ وجود ۲ حرف A قطعی است. پس برای کلمه‌ی ۴ حرفی ۲ حرف دیگر لازم داریم که آن‌ها را از بین بقیه‌ی حروف، به جز A یعنی T و M و L و S انتخاب می‌کنیم:

$$C(۴,۲)=\binom{۴}{۲}=\frac{۴!}{(۴-۲)!\,۲!}=\frac{۴\times ۳\times ۲!}{۲!\times ۲!}=\frac{۴\times ۳}{۲}=۶$$

حالا ۴ حرف داریم که دو تای آن‌ها (دو تا A) تکراری است. که جایگشت ۴ حرف دارای ۲ حرف تکراری به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\frac{۴!}{۲!}=\frac{۴\times ۳\times ۲}{۲}=۱۲$$

پس کل جایگشت‌ها طبق اصل ضرب برابر است با:

$$۶\times ۱۲=۷۲$$

۲ - گزینه ۲ چون کلمه‌ی $RANGIN$ دارای ۲ حرف تکراری N است، پس برای ساختن رمزهای ۳ حرفی حالت‌های زیر را در نظر می‌گیریم:

الف) شامل حرف N نباشد: بنابراین ۳ حرف را از بین حروف $\{R,A,G,I\}$ انتخاب کرده و جایگشت می‌دهیم:

$$\binom{۴}{۳}\times ۳!=۴\times ۶=۲۴$$

ب) شامل یک حرف N باشد: بنابراین ۲ حرف دیگر را از بین حروف $\{R,A,G,I\}$ انتخاب و جایگشت می‌دهیم:

$$\binom{۴}{۲}\times ۳!=\frac{۴\times ۳}{۲}\times ۶=۳۶$$

ج) شامل دو حرف N باشد: بنابراین حرف سوم را از بین حروف $\{R,A,G,I\}$ انتخاب و با دو حرف تکراری N جایگشت می‌دهیم:

$$\binom{۴}{۱}\times\frac{۳!}{۲!}=۴\times ۳=۱۲$$

در نهایت طبق اصل جمع داریم: $\text{تعداد کل رمزها}=۲۴+۳۶+۱۲=۷۲$

۳ - گزینه ۱

$$(A\cup(A\cap B))'\cap((B\cap A)\cup\underbrace{(B-A)}_{B\cap A'})=(A'\cap(A\cap B)')\cap(B\cap\underbrace{(A\cup A')}_{M}$$
$$=(A'\cap(A'\cup B'))\cap\underbrace{(B\cap M)}_{B}=A'\cap(A'\cup B')\cap B$$
$$=A'\cap((A'\cup B')\cap B)=A'\cap((A'\cap B)\cup\underbrace{(B'\cap B)}_{\varnothing})$$
$$=A'\cap(A'\cap B)=\underbrace{(A'\cap A')}_{A'}\cap B=A'\cap B=A'-B'$$

۴ - گزینه ۳ از پیشامد مکمل استفاده می‌کنیم. اگر A' پیشامدی باشد که در آن هیچ یک از تاس‌ها ۵ یا ۶ ظاهر نشوند، آن‌گاه در هر یک از تاس‌ها یکی از اعداد ۴ ,۳ ,۲ ,۱ ظاهر می‌شود (۴ حالت)، پس داریم:

$$n(A')=۴\times ۴=۱۶\Rightarrow P(A')=\frac{۱۶}{۳۶}=\frac{۴}{۹}$$

بنابراین احتمال پیشامد مطلوب برابر است با:

$$P(A)=۱-P(A')=۱-\frac{۴}{۹}=\frac{۵}{۹}$$

۵ - گزینه ۴ در بین حروف کلمه‌ی $DELAVAR$ دو حرف تکراری A داریم بنابراین مسأله را در سه حالت مختلف زیر حل می‌کنیم:

حالت اول: ابتدا سه حرف از بین تمام حروف (بجز A) را انتخاب کرده و جایگشت‌های آن‌ها را حساب می‌کنیم:

$D,\ E,\ L,\ V,\ R\ \rightarrow$ انتخاب ۳ حرف از بین ۵ حرف و جایگشت سه حرف متمایز $\binom{۵}{۳}\times\overbrace{۳!}^{\text{جایگشت ۳ حرف متمایز}}=۱۰\times ۶=۶۰$

حالت دوم: در این مرحله یکی از حروف A و دو حرف دیگر از حروف غیر A را انتخاب و باز جایگشت آن‌ها را محاسبه می‌کنیم:

$$\text{انتخاب ۲ حرف از ۵ حرف و جایگشت سه حرف متمایز}\ \binom{۵}{۲} \times \overbrace{۳!}^{\text{جایگشت ۳ حرف متمایز}} = ۱۰ \times ۶ = ۶۰$$

حالت سوم: در این مرحله دو حرف A و یک حرف از حروف غیر A را انتخاب می‌کنیم و باز هم جایگشت آن‌ها (که این بار حرف تکراری هم دارد) حساب می‌کنیم:

$$\text{انتخاب ۱ حرف از ۵ حرف و جایگشت ۳ حرف با ۲ حرف تکراری یکسان}\ \binom{۵}{۱} = ۵ \times \overbrace{\frac{۳!}{۲!}}^{\text{جایگشت ۳ حرف با ۲ حرف تکراری یکسان}} = ۵ \times ۳ = ۱۵$$

بنابراین مجموع حالات برابر است با:

$$۶۰ + ۶۰ + ۱۵ = ۱۳۵$$

۶ ـ گزینه ۲ در هر بار انتخاب کارت‌ها ۱۰ حالت داریم، پس فضای نمونه‌ای شامل $۱۰ \times ۱۰ = ۱۰۰$ عضو است. برای آن که عدد حاصل، دو رقمی و مضرب ۵ باشد، باید کارت اول مخالف صفر و کارت دوم صفر یا ۵ باشد:

$$\text{تعداد حالات مطلوب} = \underset{\substack{\text{کارت اول} \\ \text{(مخالف صفر)}}}{\boxed{۹}} \times \underset{\substack{\text{کارت دوم} \\ \text{(صفر یا ۵)}}}{\boxed{۲}} = ۱۸ \Rightarrow P(A) = \frac{۱۸}{۱۰۰} = ۰/۱۸$$

۷ ـ گزینه ۱

$$(A-B)' \cap (A \cup B) \cap A' = (A \cap B')' \cap (A \cup B) \cap A'$$

$$= (A' \cup B) \cap (A \cup B) \cap A' = \underbrace{(B \cup \varnothing)}_{B} \cap A' = B \cap A' = B - A$$

۸ ـ گزینه ۱

$$a_n = a_۱ + (n-۱)d = ۵ + (n-۱) \times ۳ = ۵ + ۳n - ۳ = ۳n + ۲$$
$$a'_n = a'_۱ + (n-۱)d' = ۴ + (n-۱) \times ۳ = ۴ + ۳n - ۳ = ۳n + ۱$$
$$a'_n, a_n\ \text{اختلاف} = (۳n+۲) - (۳n+۱) = ۱$$

۹ ـ گزینه ۲

$$S_n = \frac{n}{۲}(۲a_۱ + (n-۱)d) \xrightarrow{S_۵ = ۱۰۵} ۱۰۵ = \frac{۵}{۲}(۲a_۱ + ۴d) \Rightarrow ۱۰۵ = ۵a_۱ + ۱۰d \xrightarrow{\text{تقسیم بر ۵}} \boxed{a_۱ + ۲d = ۲۱}$$
$$a_۳ + a_۴ + a_۵ = ۶(a_۱ + a_۲) \Rightarrow a_۱ + ۲d + a_۱ + ۳d + a_۱ + ۴d = ۶(a_۱ + a_۱ + d)$$
$$\Rightarrow ۳a_۱ + ۹d = ۱۲a_۱ + ۶d \Rightarrow ۱۲a_۱ + ۶d - ۳a_۱ - ۹d = ۰ \Rightarrow \boxed{۹a_۱ - ۳d = ۰}$$
$$-۹\begin{cases} a_۱ + ۲d = ۲۱ \\ ۹a_۱ - ۳d = ۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -۹a_۱ - ۱۸d = -۱۸۹ \\ ۹a_۱ - ۳d = ۰ \end{cases}$$
$$-۲۱d = -۱۸۹ \Rightarrow d = \frac{۱۸۹}{۲۱} = ۹ \Rightarrow a_۱ + ۲(۹) = ۲۱ \Rightarrow a_۱ = ۲۱ - ۱۸ = ۳$$
$$\Rightarrow a_۵ = a_۱ + ۴d \Rightarrow a_۵ = ۳ + ۴(۹) = ۳۹$$

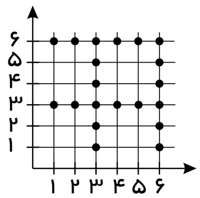
۱۰ ـ گزینه ۲ روش اول:می دانیم در تاس اعداد ۳ و ۶ مضرب ۳ هستند و اعداد ۱ و ۲ و ۴ و ۵ و مضرب ۳ نیستند . برای حل این سوال از پیشامد مکمل استفاده می کنیم.

$$P(\text{لااقل یکی از دو عدد تاس مضرب ۳ باشد}) = ۱ - P(\text{هیچ کدام از اعداد دو تاس مضرب ۳ نباشند})$$

$$= ۱ - P(\text{تاس اول مضرب ۳ نباشد}) \times P(\text{تاس دوم مضرب ۳ نباشد}) = ۱ - \frac{۴}{۶} \times \frac{۴}{۶} = ۱ - \frac{۴}{۹} = \frac{۵}{۹}$$

روش دوم: پرتاب ۲ تاس ۳۶ حالت دارد:

حالاتی که لااقل یکی از اعداد مضرب ۳ باشد، یعنی آن که در پرتاب دو تاس یکی از اعداد ۳ یا ۶ یا هر دوی آن‌ها مشاهده شود. یعنی ۲۰ حالت مشخص شده:



$$\to P(A)=\frac{20}{36}=\frac{5}{9}$$

۱۱ ـ گزینه ۴ برای آن که به بچه‌ها تعداد مساوی اسباب‌بازی برسد باید به هر بچه ۲ عدد اسباب‌بازی بدهیم. برای بچه‌ی اول کافیست ۲ اسباب‌بازی از ۶ اسباب‌بازی انتخاب کنیم $C(6,2)$ و بدهیم.

برای بچه‌ی دوم ۲ اسباب‌بازی از ۴ اسباب‌بازی باقی‌مانده انتخاب می‌کنیم $C(4,2)$ و در نهایت ۲ اسباب‌بازی باقی‌مانده را برای بچه‌ی سوم انتخاب می‌کنیم .

$$C(6,2)=\frac{6!}{2!4!}=\frac{6\times5\times4!}{2\times4!}=15$$

$$C(4,2)=\frac{4!}{2!2!}=\frac{4\times3\times2!}{2\times2!}=6$$

$$C(2,2)=\frac{2!}{2!0!}=1$$

بنا بر اصل ضرب داریم:

$$C(6,2)\times C(4,2)\times C(2,2)=15\times6\times1=90$$

۱۲ ـ گزینه ۴ به کمک روابط $S_n=\frac{n}{2}(2a_1+(n-1)d)$ و $a_n=a_1+(n-1)d$ می‌توان نوشت:

$$\begin{cases}a_1+a_2+\cdots+a_5=60\\ a_4+a_5=3(\underbrace{a_1+a_2+a_3}_{a_1+a_1+d+a_1+2d})\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\frac{5}{2}(2a_1+4d)=60\\ a_1+3d+a_1+4d=3(3a_1+3d)\end{cases}$$

$$\begin{cases}5a_1+10d=60\\ 2a_1+7d-9a_1-9d=0\end{cases}\xrightarrow[\times5]{}\begin{cases}5a_1+10d=60\\ -7a_1-2d=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}5a_1+10d=60\\ -35a_1-10d=0\end{cases}$$

$$-30a_1=60\Rightarrow 5a_1=\frac{60}{-30}=-2$$

$$-7a_1-2d=0\xrightarrow{a_1=-2}-7(-2)-2d=0\Rightarrow14=2d\Rightarrow d=\frac{14}{2}=7$$

۱۳ ـ گزینه ۲ ابتدا تعداد اعضای فضای نمونه‌ای را مشخص می‌کنیم که برابر با تعداد کل لامپ‌هاست:

تعداد اعضای فضای نمونه‌ای $=n(S)=20+22+14+34=90$

حالت مطلوب آن است که لامپ انتخابی ۱۰۰ وات باشد که تعداد لامپ‌های ۱۰۰ واتی برابر $48=34+14$ است. بنابراین:

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{48}{90}=\frac{8}{15}$$

۱۴ ـ گزینه ۱

$$n(S)=\underset{\text{تاس اول}}{\overset{\downarrow}{6}}\times\underset{\text{تاس دوم}}{\overset{\downarrow}{6}}=36$$

مجموع دو تاس ۷ شود $A=\{(1,6),(2,5),(3,4),(4,3),(5,2),(6,1)\}$

$$n(A)=6$$

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}\Rightarrow P(A)=\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$$

۱۵ ـ گزینه ۲

$$S=\{1,2,\cdots,9\}\Rightarrow n(S)=9$$

بر ۲ یا ۳ بخش‌پذیر $A=\{2,3,4,6,8,9\}\quad\Rightarrow n(A)=6$

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)} \Rightarrow P(A)=\frac{۶}{۹}=\frac{۲}{۳}$$

۱۶ ـ گزینه ۱ در واقع با اعداد ۱ و ۲ و ۳ و ۴ داریم اعداد دو رقمی می‌نویسیم که تکرار هم مجاز است زیرا پس از دیدن هر مهره‌ی آن را به جعبه برمی‌گردانیم.

$$n(S)=۴\times۴=۱۶$$

اکنون باید در بین این ۱۶ عدد اعدادی را که بر ۳ بخش‌پذیر هستند را مشخص کنیم.

$$A=\{۱۲,۲۱,۲۴,۴۲,۳۳\} \to n(A)=۵$$

پس $P(A)=\frac{۵}{۱۶}$ است.

۱۷ ـ گزینه ۳ ابتدا جایگشت شش حرف کلمه‌ی داده شده را که دارای دو حرف تکراری است را بدست می‌آوریم:

$$\text{تعداد جایگشت}=\frac{۶!}{۲!}=\frac{۶\times۵\times۴\times۳\times۲!}{۲!}=۳۶۰$$

اکنون تعداد جایگشت‌هایی را که دو حرف A کنار هم هستند را بدست می‌آوریم.

$$\boxed{AA}\ FRHD \to \text{تعداد جایگشت}=۵!=۵\times۴\times۳\times۲\times۱=۱۲۰$$

(جابجایی دو حرف A چون عین هم هستند اهمیت ندارد).

اکنون اگر تعداد حالاتی را که دو حرف A کنار هم هستند را از تعداد کل حالات کم کنیم، تعداد حالاتی که دو حرف A کنار هم نیستند بدست می‌آید.

$$۳۶۰-۱۲۰=۲۴۰$$

۱۸ ـ گزینه ۴ از ۳۰۰۰ مورد، ۱۸ مورد با خطا مواجه بوده است:

$$P(\text{خطا})=\frac{۱۸}{۳۰۰۰}=\frac{۶}{۱۰۰۰}$$

$$P(\text{عدم خطا})=۱-\frac{۶}{۱۰۰۰}=\frac{۹۹۴}{۱۰۰۰}=۰/۹۹۴$$

۱۹ ـ گزینه ۴

$$\_\ \_\ \_\ \underset{۱}{\underline{N}}\ \_\ \_\ \_$$

حرف N را در وسط قرار می‌دهیم. ۶ حرف $EAREST$ باقی می‌ماند که جایگشت آن‌ها را حساب می‌کنیم:

(توجه کنید که حرف E ۲ بار تکرار شده است):

$$\frac{۶!}{۲!}=\frac{۶\times۵\times۴\times۳\times۲!}{۲!}=۳۶۰$$

۲۰ ـ گزینه ۴ فضای نمونه‌ای پرتاب سه سکه دارای ۸ حالت است:

$$n(S)=۲\times۲\times۲=۲^۳=۸$$

اگر A احتمال آن باشد که حداقل یک «رو» ظاهر شده باشد، پیشامد متمم (A') شامل حالاتی است که هیچ «رو»یی ظاهر نشود، یعنی همه‌ی سکه‌ها «پشت» باشند:

$$A'=\{(\text{پ},\text{پ},\text{پ})\} \Rightarrow P(A)=۱-P(A')=۱-\frac{n(A')}{n(S)}=۱-\frac{۱}{۸}=\frac{۷}{۸}$$

۲۱ ـ گزینه ۱ وقتی ۲ کارت با شماره‌های زوج را بیرون بکشیم، ۸ کارت زوج و ۱۰ کارت فرد داریم. فضای نمونه‌ای انتخاب یک کارت از این ۱۸ کارت باقی‌مانده است:

$$n(S)=\binom{۱۸}{۱}=۱۸$$

و پیشامد مطلوب، انتخاب یک کارت از بین ۸ کارت زوج است:

$$n(A)=\binom{۸}{۱}=۸$$

بنابراین:

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۸}{۱۸}=\frac{۴}{۹}$$

۲۲ ـ گزینه ۳ با انجام این آزمایش در واقع، به کمک ارقام ۵ ,۴ ,۳ ,۲ ,۱ اعداد سه رقمی (با تکرار ارقام) می‌سازیم، پس تعداد اعضای فضای نمونه‌ای برابر است با:

$$n(S):\ \boxed{۵}\times\boxed{۵}\times\boxed{۵}=۵^۳$$

پیشامد مطلوب A پیشامدی است که لااقل دو رقم مساوی داشته باشد. برای محاسبه‌ی احتمال پیشامد A می‌توان از پیشامد مکمل استفاده کرد:

$$A'=\text{پیشامدی که ارقام تکراری نباشد} \Rightarrow n(A'):\ \boxed{۵}\times\boxed{۴}\times\boxed{۳}=۵\times۴\times۳$$

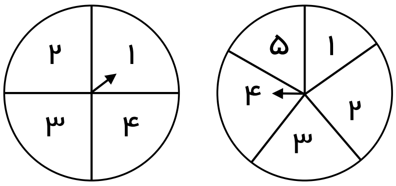
$$\Rightarrow P(A') = \frac{n(A')}{n(S)} = \frac{\cancel{۵} \times ۴ \times ۳}{\cancel{۵} \times ۵ \times ۵} = \frac{۱۲}{۲۵} \Rightarrow P(A) = ۱ - P(A') = ۱ - \frac{۱۲}{۲۵} = \frac{۱۳}{۲۵} \Rightarrow P(A) = ۰/۵۲$$

۲۳ ـ گزینه ۳ از پیشامد مکمل استفاده می‌کنیم:

پیشامد آنکه لااقل یکی از عقربه‌ها روی عدد فرد بایستد $= A$

هر دو عقربه روی ناحیه‌ی عدد زوج بایستد $=$ پیشامد

آنکه هیچ کدام از عقربه‌ها روی عدد فرد نایستد $= A'$



A B

$$\left.\begin{array}{l} \text{احتمال قرار گرفتن عقربه‌ی } A \text{ روی عدد زوج} = \frac{۲}{۴} \\ \text{احتمال قرار گرفتن عقربه‌ی } B \text{ روی عدد زوج} = \frac{۲}{۵} \end{array}\right\} \Rightarrow P(A') = \frac{۲}{۴} \times \frac{۲}{۵} = \frac{۴}{۲۰} = \frac{۲}{۱۰}$$

$$P(A) = ۱ - P(A') \Rightarrow P(A) = ۱ - \frac{۲}{۱۰} = \frac{۸}{۱۰} = ۰/۸$$

۲۴ ـ گزینه ۴ برای حل این سؤال از پیشامد مکمل استفاده می‌کنیم عبارت لااقل یکی از شماره‌ها ۲ باشد به معنای آن است که یا یکی از شماره‌ها یا هر دوی آن‌ها عدد ۲ باشد و پیشامد مکمل (نامطلوب) آن است که هیچ یک از شماره‌ها ۲ نباشند.

A: لااقل یکی از ارقام ۲ باشد.

A': هیچ یک از ارقام ۲ نباشد.

$$A' : \underbrace{\text{گوی اول عددی غیر از ۲ باشد}}_{\text{می‌تواند ۱، ۳، ۴ یا ۵ باشد}} \quad , \quad \underbrace{\text{گوی دوم عددی غیر از ۲ باشد}}_{\text{می‌تواند ۱، ۳ یا ۴ باشد}}$$

$$\Rightarrow P(A') = \frac{۴}{۵} \times \frac{۳}{۴} = \frac{۳}{۵}$$

$$P(A) = ۱ - P(A') = ۱ - \frac{۳}{۵} = \frac{۲}{۵} = ۰/۴$$

۲۵ ـ گزینه ۳ تعداد جایگشت‌های ۵ حرفی از حروف $BUSINESS$ را می‌خواهیم که شامل ۳ حرف S باشند، پس ابتدا باید دو حرف دیگر از حروف B, U, I, N, E را انتخاب کرده و سپس این دو حرف را با سه حرف S جایگشت دهیم، بنابراین تعداد جایگشت‌های متمایز مطلوب برابر است با:

$$\underbrace{\binom{۵}{۲}}_{\text{انتخاب دو حرف غیر از } S} \times \frac{\overbrace{۵!}^{\text{جایگشت ۵ حرف حاصل}}}{\underbrace{۳!}_{\text{جایگشت ۳ حرف } S \text{ تکراری}}} = ۱۰ \times ۲۰ = ۲۰۰$$