

پاسخنامه تشریحی

۱ - گزینه ۲ چون کلمه $RANGIN$ دارای ۲ حرف تکراری N است، پس برای ساختن رمزهای ۳ حرفی حالت های زیر را در نظر می گیریم:
الف) شامل حرف N نباشد: بنابراین ۳ حرف را از بین حروف $\{R, A, G, I\}$ انتخاب کرده و جایگشت می دهیم:

$$\binom{4}{3} \times 3! = 4 \times 6 = 24$$

ب) شامل یک حرف N باشد: بنابراین ۲ حرف دیگر را از بین حروف $\{R, A, G, I\}$ انتخاب و جایگشت می دهیم:

$$\binom{4}{2} \times 3! = \frac{4 \times 3}{2} \times 6 = 36$$

ج) شامل دو حرف N باشد: بنابراین حرف سوم را از بین حروف $\{R, A, G, I\}$ انتخاب و با دو حرف تکراری N جایگشت می دهیم:

$$\binom{4}{1} \times \frac{3!}{2!} = 4 \times 3 = 12$$

$$\text{در نهایت طبق اصل جمع داریم: } 24 + 36 + 12 = 72$$

در نهایت طبق اصل جمع داریم:

۲ - گزینه ۴ وجود ۲ حرف A قطعی است. پس برای کلمه ۴ حرفی ۲ حرف دیگر لازم داریم که آن ها را از بین بقیه ی حروف، به جز A یعنی T و M و L و S انتخاب می کنیم:

$$C(4, 2) = \binom{4}{2} = \frac{4!}{(4-2)!2!} = \frac{4 \times 3 \times 2!}{2! \times 2!} = \frac{4 \times 3}{2} = 6$$

حالا ۴ حرف داریم که دو تای آن ها (A دو تا) تکراری است. که جایگشت ۴ حرف دارای ۲ حرف تکراری به صورت زیر محاسبه می شود:

$$\frac{4!}{2!} = \frac{4 \times 3 \times 2}{2} = 12$$

پس کل جایگشت ها طبق اصل ضرب برابر است با:

$$6 \times 12 = 72$$

۳ - گزینه ۳ از پیشامد مکمل استفاده می کنیم. اگر A' پیشامدی باشد که در آن هیچ یک از تاس ها ۵ یا ۶ ظاهر نشوند، آن گاه در هر یک از تاس ها یکی از اعداد ۱، ۲، ۳، ۴ ظاهر می شود (حالت)، پس داریم:

$$n(A') = 4 \times 4 = 16 \Rightarrow P(A') = \frac{16}{36} = \frac{4}{9}$$

بنابراین احتمال پیشامد مطلوب برابر است با:

$$P(A) = 1 - P(A') = 1 - \frac{4}{9} = \frac{5}{9}$$

۴ - گزینه ۱

$$\begin{aligned} (A \cup (A \cap B))' \cap ((B \cap A) \cup (B - A)) &= (A' \cap (A \cap B)') \cap (B \cap (A \cup A')) \\ &= (A' \cap (A' \cup B')) \cap \underbrace{(B \cap M)}_{B \cap A'} = A' \cap (A' \cup B') \cap B \\ &= A' \cap ((A' \cup B') \cap B) = A' \cap ((A' \cap B) \cup \underbrace{(B' \cap B)}_{\emptyset}) \\ &= A' \cap (A' \cap B) = \underbrace{(A' \cap A')}_{A'} \cap B = A' \cap B = A' - B' \end{aligned}$$

۵ - گزینه ۴ در بین حروف کلمه $DELAVAR$ دو حرف تکراری A داریم بنابراین مسأله را در سه حالت مختلف زیر حل می کنیم:

حالت اول: ابتدا سه حرف از بین تمام حروف (A بجز) را انتخاب کرده و جایگشت های آن ها را حساب می کنیم:

جایگشت ۳ حرف متمایز

$$D, E, L, V, R \rightarrow \text{جایگشت سه حرف متمایز} \rightarrow \binom{5}{3} \times 3! = 10 \times 6 = 60$$

حالت دوم: در این مرحله یکی از حروف A و دو حرف دیگر از حروف غیر A را انتخاب و باز جایگشت آن ها را محاسبه می کنیم:

جایگشت ۳ حرف متمایز

$$\text{جایگشت سه حرف متمایز} \rightarrow \binom{5}{2} \times 3! = 10 \times 6 = 60$$

حالت سوم: در این مرحله دو حرف A و یک حرف از حروف غیر A را انتخاب می کنیم و باز هم جایگشت آن ها (که این بار حرف تکراری هم دارد) حساب می کنیم:

کنیم:

جایگشت ۳ حرف با ۲ حرف تکراری یکسان

$$\binom{5}{1} = 5 \times \frac{3!}{2!} = 5 \times 3 = 15$$

انتخاب ۱ حرف از ۵ حرف و جایگشت ۳ حرف با ۲ حرف تکراری یکسان

بنابراین مجموع حالات برابر است با:

$$60 + 60 + 15 = 135$$

۶ - گزینه ۲ در هر بار انتخاب کارت ها ۱۰ حالت داریم، پس فضای نمونه ای شامل $10 \times 10 = 100$ عضو است. برای آن که عدد حاصل، دو رقمی و مضرب ۵ باشد، باید کارت اول مخالف صفر و کارت دوم صفر یا ۵ باشد:

$$\text{تعداد حالات مطلوب} = \boxed{9} \times \boxed{2} = 18 \Rightarrow P(A) = \frac{18}{100} = 0,18$$

کارت اول (مخالف صفر) کارت دوم (صفر یا ۵)

۷ - گزینه ۱

$$\begin{aligned} (A - B)' \cap (A \cup B) \cap A' &= (A \cap B')' \cap (A \cup B) \cap A' \\ &= (A' \cup B) \cap (A \cup B) \cap A' = \underbrace{(B \cup \emptyset)}_B \cap A' = B \cap A' = B - A \end{aligned}$$

۸ - گزینه ۱

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 + (n - 1)d = 5 + (n - 1) \times 3 = 5 + 3n - 3 = 3n + 2 \\ a'_n &= a'_1 + (n - 1)d' = 4 + (n - 1) \times 3 = 4 + 3n - 3 = 3n + 1 \\ a'_n, a_n \text{ اختلاف} &= (3n + 2) - (3n + 1) = 1 \end{aligned}$$

۹ - گزینه ۲

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{n}{2}(2a_1 + (n - 1)d) \xrightarrow{S_5=105} 105 = \frac{5}{2}(2a_1 + 4d) \Rightarrow 105 = 5a_1 + 10d \xrightarrow{\text{تقسیم بر 5}} \boxed{a_1 + 2d = 21} \\ a_3 + a_4 + a_5 &= 6(a_1 + a_3) \Rightarrow a_1 + 2d + a_1 + 3d + a_1 + 4d = 6(a_1 + a_1 + d) \\ \Rightarrow 3a_1 + 9d &= 12a_1 + 6d \Rightarrow 12a_1 + 6d - 3a_1 - 9d = 0 \Rightarrow \boxed{9a_1 - 3d = 0} \\ \begin{cases} a_1 + 2d = 21 \\ 9a_1 - 3d = 0 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} -9a_1 - 18d = -189 \\ 9a_1 - 3d = 0 \end{cases} \\ -21d &= -189 \Rightarrow d = \frac{189}{21} = 9 \Rightarrow a_1 + 2(9) = 21 \Rightarrow a_1 = 21 - 18 = 3 \\ \Rightarrow a_5 &= a_1 + 4d \Rightarrow a_5 = 3 + 4(9) = 39 \end{aligned}$$

۱۰ - گزینه ۴ به کمک روابط $a_n = a_1 + (n - 1)d$ و $S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n - 1)d)$ می توان نوشت:

$$\begin{aligned} \begin{cases} a_1 + a_3 + \dots + a_5 = 60 \\ a_3 + a_5 = 3(a_1 + a_3 + a_5) \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} \frac{5}{2}(2a_1 + 4d) = 60 \\ a_1 + 3d + a_1 + 4d = 3(a_1 + 3d) \end{cases} \\ \begin{cases} 5a_1 + 10d = 60 \\ 2a_1 + 7d - 9a_1 - 9d = 0 \end{cases} &\xrightarrow{\times 5} \begin{cases} 5a_1 + 10d = 60 \\ -7a_1 - 2d = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5a_1 + 10d = 60 \\ -35a_1 - 10d = 0 \end{cases} \\ -30a_1 &= 60 \Rightarrow 5a_1 = \frac{60}{-30} = -2 \\ -7a_1 - 2d &= 0 \xrightarrow{a_1=-2} -7(-2) - 2d = 0 \Rightarrow 14 = 2d \Rightarrow d = \frac{14}{2} = 7 \end{aligned}$$

۱۱ - گزینه ۳ تعداد جایگشت های ۵ حرفی از حروف BUSINESS را می خواهیم که شامل ۳ حرف S باشند، پس ابتدا باید دو حرف دیگر از حروف E, N, I, U, B را انتخاب کرده و سپس این دو حرف را با سه حرف S جایگشت دهیم، بنابراین تعداد جایگشت های متمایز مطلوب برابر است با:

جایگشت ۵ حرف حاصل

$$\binom{5}{2} \times \frac{5!}{3!} = 10 \times 20 = 200$$

انتخاب دو حرف غیر از S جایگشت ۳ حرف S تکراری

۱۲ - گزینه ۴

$$\frac{N}{1}$$

حرف N را در وسط قرار می دهیم. ۶ حرف EAREST باقی می ماند که جایگشت آن ها را حساب می کنیم:
 (توجه کنید که حرف E ۲ بار تکرار شده است):

$$\frac{6!}{2!} = \frac{6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2!}{2!} = 360$$

۱۳ - گزینه ۳ ابتدا جایگشت شش حرف کلمه ی داده شده را که دارای دو حرف تکراری است را بدست می آوریم:

$$\frac{6!}{2!} = \frac{6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2!}{2!} = 360$$

اکنون تعداد جایگشت هایی را که دو حرف A کنار هم هستند را بدست می آوریم.

$$\boxed{AA} FRHD \rightarrow \text{تعداد جایگشت} = 5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$$

(جابجایی دو حرف A چون عین هم هستند اهمیت ندارد).

اکنون اگر تعداد حالاتی را که دو حرف A کنار هم هستند را از تعداد کل حالات کم کنیم، تعداد حالاتی که دو حرف A کنار هم نیستند بدست می آید.

$$360 - 120 = 240$$

۱۴ - گزینه ۱

ابتدا حرف S را حذف کرده تعداد دسته های سه حرفی بدون S که ترتیب مهم نباشد را می نویسیم.

پس از ۵ حرف باقی مانده سه حرف انتخاب می کنیم (ترتیب مهم نیست)

$$\binom{5}{3} = \binom{5}{2} = \frac{5 \times 4}{2} = 10$$

پس به ۱۰ طریق سه حرف غیر S انتخاب می کنیم حال با ۴ حرف می شوند و ۴! ترتیب جابه جایی آنها است. پس:

$$10 \times 4! = 10 \times 24 = 240$$

جابه جایی ۴ عضو انتخاب های دسته های سه تایی بدون S

۱۵ - گزینه ۴ برای آن که به بچه ها تعداد مساوی اسباب بازی برسد باید به هر بچه ۲ عدد اسباب بازی بدهیم. برای بچه ی اول کافیست ۲ اسباب بازی از ۶ اسباب بازی انتخاب کنیم $C(6, 2)$ و بدهیم.

برای بچه ی دوم ۲ اسباب بازی از ۴ اسباب بازی باقی مانده انتخاب می کنیم $C(4, 2)$ و در نهایت ۲ اسباب بازی باقی مانده را برای بچه ی سوم انتخاب می کنیم.

$$C(6, 2) = \frac{6!}{2!4!} = \frac{6 \times 5 \times 4!}{2 \times 4!} = 15$$

$$C(4, 2) = \frac{4!}{2!2!} = \frac{4 \times 3 \times 2!}{2 \times 2!} = 6$$

$$C(2, 2) = \frac{2!}{2!0!} = 1$$

بنا بر اصل ضرب داریم:

$$C(6, 2) \times C(4, 2) \times C(2, 2) = 15 \times 6 \times 1 = 90$$

۱۶ - گزینه ۱

$$n(S) = \begin{matrix} \text{تاس اول} \\ \downarrow \\ 6 \end{matrix} \times \begin{matrix} \text{تاس دوم} \\ \downarrow \\ 6 \end{matrix} = 36$$

مجموع دو تاس ۷ شود $A = \{(1, 6), (2, 5), (3, 4), (4, 3), (5, 2), (6, 1)\}$

$$n(A) = 6$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} \Rightarrow P(A) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

۱۷ - گزینه ۱ در واقع با اعداد ۱ و ۲ و ۳ و ۴ داریم اعداد دو رقمی می نویسیم که تکرار هم مجاز است زیرا پس از دیدن هر مهره ی آن را به جعبه برمی گردانیم.

$$n(S) = 4 \times 4 = 16$$

اکنون باید در بین این ۱۶ عدد اعدادی را که بر ۳ بخش پذیر هستند را مشخص کنیم.

$$A = \{12, 21, 24, 42, 33\} \rightarrow n(A) = 5$$

$$\text{پس } P(A) = \frac{5}{16}$$

۱۸ - گزینه ۲ ابتدا تعداد اعضای فضای نمونه ای را مشخص می کنیم که برابر با تعداد کل لامپ هاست:

$$n(S) = 20 + 22 + 14 + 34 = 90$$

حالت مطلوب آن است که لامپ انتخابی ۱۰۰ وات باشد که تعداد لامپ های ۱۰۰ واتی برابر ۴۸ + ۳۴ = ۸۲ است. بنابراین:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{48}{90} = \frac{8}{15}$$

۱۹ - گزینه ۱ وقتی ۲ کارت با شماره های زوج را بیرون بکشیم، ۸ کارت زوج و ۱۰ کارت فرد داریم. فضای نمونه ای انتخاب یک کارت از این ۱۸ کارت باقی مانده است:

$$n(S) = \binom{18}{1} = 18$$

و پیشامد مطلوب، انتخاب یک کارت از بین ۸ کارت زوج است:

$$n(A) = \binom{8}{1} = 8$$

بنابراین:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{8}{18} = \frac{4}{9}$$

۲۰ - گزینه ۴ فضای نمونه ای پرتاب سه سکه دارای ۸ حالت است:

$$n(S) = 2 \times 2 \times 2 = 2^3 = 8$$

اگر A احتمال آن باشد که حداقل یک «رو» ظاهر شده باشد، پیشامد متمم (A') شامل حالاتی است که هیچ «رو»ی ظاهر نشود، یعنی همه ی سکه ها «پشت» باشند:

$$A' = \{\text{پ, پ, پ}\} \Rightarrow P(A) = 1 - P(A') = 1 - \frac{n(A')}{n(S)} = 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$$

۲۱ - گزینه ۳ با انجام این آزمایش در واقع، به کمک ارقام ۱، ۲، ۳، ۴، ۵ اعداد سه رقمی (با تکرار ارقام) می سازیم. پس تعداد اعضای فضای نمونه ای برابر است با:

$$n(S) : \boxed{5} \times \boxed{5} \times \boxed{5} = 5^3$$

پیشامد مطلوب A پیشامدی است که حداقل دو رقم مساوی داشته باشد. برای محاسبه ی احتمال پیشامد A می توان از پیشامد مکمل استفاده کرد:

$$A' = \{\text{تک رقمی}\} \Rightarrow n(A') : \boxed{5} \times \boxed{4} \times \boxed{3} = 5 \times 4 \times 3$$

$$\Rightarrow P(A') = \frac{n(A')}{n(S)} = \frac{60}{125} = \frac{12}{25} \Rightarrow P(A) = 1 - P(A') = 1 - \frac{12}{25} = \frac{13}{25} \Rightarrow P(A) = 0,52$$

۲۲ - گزینه ۴ برای حل این سؤال از پیشامد مکمل استفاده می کنیم عبارت لااقل یکی از شماره ها ۲ باشد به معنای آن است که یا یکی از شماره ها یا هر دوی آن ها عدد ۲ باشد و پیشامد مکمل (نامطلوب) آن است که هیچ یک از شماره ها ۲ نباشند.

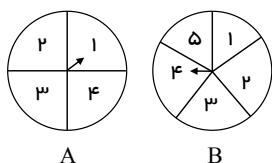
لااقل یکی از ارقام ۲ باشد: A

هیچ یک از ارقام ۲ نباشد: A'

گوی دوم عددی غیر از ۲ باشد ، گوی اول عددی غیر از ۲ باشد
می تواند ۱، ۳، ۴، ۵ باشد می تواند ۱، ۳، ۴ باشد

$$\Rightarrow P(A') = \frac{4}{5} \times \frac{3}{4} = \frac{3}{5}$$

$$P(A) = 1 - P(A') = 1 - \frac{3}{5} = \frac{2}{5} = 0,4$$



۲۳ - گزینه ۳ از پیشامد مکمل استفاده می کنیم:

پیشامد آنکه لااقل یکی از عقربه ها روی عدد فرد بایستد A

هر دو عقربه روی ناحیه ی عدد زوج بایستد = پیشامد

آنکه هیچ کدام از عقربه ها روی عدد فرد نایستد A'

$$\left. \begin{aligned} \text{احتمال قرار گرفتن عقربه‌ی } A \text{ روی عدد زوج} &= \frac{2}{4} \\ \text{احتمال قرار گرفتن عقربه‌ی } B \text{ روی عدد زوج} &= \frac{2}{5} \end{aligned} \right\} \Rightarrow P(A') = \frac{2}{4} \times \frac{2}{5} = \frac{4}{20} = \frac{1}{5}$$

$$P(A) = 1 - P(A') \Rightarrow P(A) = 1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5} = 0.8$$

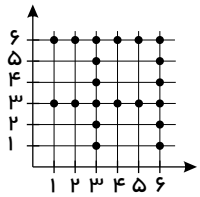
۲۴ - گزینه ۲ روش اول: می‌دانیم در تاس اعداد ۳ و ۶ مضرب ۳ هستند و اعداد ۱ و ۲ و ۴ و ۵ و مضرب ۳ نیستند. برای حل این سوال از پیشامد مکمل استفاده می‌کنیم.

$$P(\text{هیچ کدام از اعداد دو تاس مضرب ۳ نباشند}) = 1 - P(\text{لااقل یکی از دو عدد تاس مضرب ۳ باشد})$$

$$= 1 - P(\text{تاس اول مضرب ۳ نباشد}) \times P(\text{تاس دوم مضرب ۳ نباشد}) = 1 - \frac{4}{6} \times \frac{4}{6} = 1 - \frac{16}{36} = \frac{20}{36} = \frac{5}{9}$$

روش دوم: پرتاب ۲ تاس ۳۶ حالت دارد:

حالاتی که لااقل یکی از اعداد مضرب ۳ باشد، یعنی آن که در پرتاب دو تاس یکی از اعداد ۳ یا ۶ یا هر دوی آن‌ها مشاهده شود، یعنی ۲۰ حالت مشخص شده:



$$\rightarrow P(A) = \frac{20}{36} = \frac{5}{9}$$

۲۵ - گزینه ۲

$$S = \{1, 2, \dots, 9\} \Rightarrow n(S) = 9$$

$$A = \{2, 3, 4, 6, 8, 9\} \Rightarrow n(A) = 6$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} \Rightarrow P(A) = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$$

abadgaranedu.ir