

پاسخنامه تشریحی

۱ - گزینه AD^4 برابر زاویه \hat{C} است زیرا:

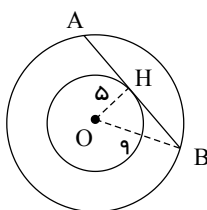
$$\begin{cases} \hat{O}_1 + \hat{O}_r = 180^\circ \\ \hat{O} + \hat{C} = 180^\circ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \hat{O}_1 = 180^\circ - \hat{O}_r \\ \hat{O} + \hat{C} = 180^\circ \Rightarrow \hat{C} = 180^\circ - \hat{O} \end{cases} \Rightarrow \hat{O}_1 = \hat{C}$$

و نیز دو زاویه محاطی و برابرند زیرا مقابل به یک کمان از دایره هستند. در نتیجه .

۲ - گزینه ۲

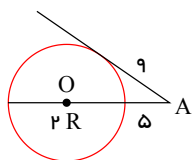
باتوجه به شکل است:

در نتیجه



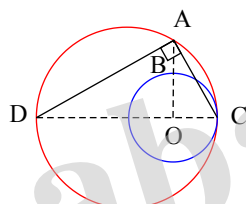
۳ - گزینه ۲

بنا بر رابطه طولی در دایره خواهیم داشت.



پس .

۴ - گزینه ۱ در مثلث قائم‌الزاویه داریم شعاع دایره کوچک را می‌نامیم پس از طرفی پس پس در نتیجه شعاع دایره بزرگتر است.



۵ - گزینه ۳ در گزینه عضو a در مجموعه نیست در گزینه مجموعه به خودش تعلق ندارد. در گزینه عضو a دو بار تکرار شده درست است. در گزینه عضو مجموعه زیر مجموعه آن نیست. در واقع

۶ - گزینه ۳ فضای نمونه‌ای است. پس می‌دانیم احتمال شرطی به صورت است.

۷ - گزینه ۳ بنا بر تعریف احتمال مشروط داریم پس می‌توان نوشت:

۸ - گزینه ۳ احتمال مطلوب با احتمال بیرون آوردن مهره با هم یکسان است.

تذکر: برداشتن مهره متوالیاً و بدون جایگذاری مانند بیرون آوردن مهره با هم می‌باشد.

۹ - گزینه ۲ مجموع درصد فراوانی‌های نسبی در داده‌های دسته بندی شده برابر می‌باشد.
۱۰ - گزینه ۳

۱۱ - گزینه ۳ می‌دانیم:

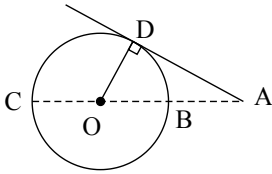
ابتدا عبارت را خلاصه می‌کنیم.

توجه کنید که است.

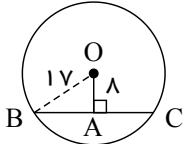
۱۲ - گزینه ۳

۱۳ - گزینه ۴ در مثلث قائم الزاویه داریم:

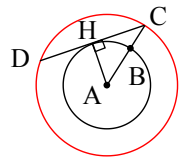
پس



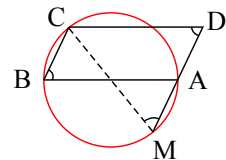
۱۴ - گزینه ۲ کوچکترین وتر عمود بر است. پس و بزرگترین وتر قطر دایره است که برابر می باشد و تفاضل آن دو



۱۵ - گزینه ۳ به فرض پس شعاع دایره کوچکتر واحد است در مثلث داریم پس در نتیجه



۱۶ - گزینه ۱ دو زاویه محاطی روبه روبه یک کمان با هم برابرند پس و همچنین در متوازی الاضلاع دو زاویه مقابل برابرند پس در نتیجه و مثلث متساوی الساقین است.



۱۷ - گزینه ۳ روش اول: در دنباله حسابی با تعداد جملات جمله اول و جمله سی و نهم می باشد. جمله وسط به صورت است.
روش دوم:

جمله ی وسط

۱۸ - گزینه ۲ دنباله ۵, ۹, ۱۳, ... حسابی است با جمله اول $a = 5$ و قدر نسبت $d = 4$ و مجموع جملات از دستور $S = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]$ محاسبه می شود.

$$\frac{n}{2}[10 + (n-1)4] > 900 \Rightarrow n(3 + 2n) > 900 \Rightarrow 2n^2 + 3n - 900 > 0$$

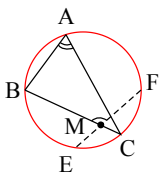
پس از تعیین علامت، چون n عدد مثبت است الزاماً خواهیم داشت:

$$n > \frac{-3 + \sqrt{7209}}{4} \Rightarrow n \geq \frac{-3 + 85}{4} \Rightarrow n \geq 21$$

پس حداقل $n = 21$

۱۹ - گزینه ۲

زاویه محاطی $\hat{A} = \frac{1}{2}\widehat{BEC}$ و زاویه داخلی $\hat{M} = \frac{1}{2}(\widehat{CE} + \widehat{BF})$ چون $\widehat{CE} = \widehat{CF}$ خواهیم داشت:



$$\hat{A} + \hat{M} = \frac{1}{2}(\widehat{BE} + \widehat{EC} + \widehat{AB} + \widehat{AF} + \widehat{CF}) = \frac{1}{2}(360^\circ) = 180^\circ$$

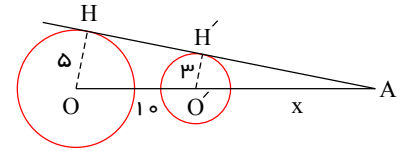
۲۰ - گزینه ۲ شرط دنباله هندسی:

$$(-3 + \sqrt{5})(3 + \sqrt{5}) = x^2 \quad x^2 = 5 - 9 = -4 \quad \text{نشدنی است.}$$

۲۱ - گزینه ۳ عمود PH را رسم می کنیم دو چهارضلعی محاطی ANPH و BMPH بدست می آید اگر دایره ای محیطی آنها را رسم کنیم، باتوجه به رابطه طولی در دایره داریم:

$$\left. \begin{aligned} BP \times BN &= BH \times BA \\ AP \times AM &= AH \times AB \end{aligned} \right\} \rightarrow AP \times AM + BP \times BN = AB^2 = 6^2 = 36$$

$$\frac{x}{10+x} = \frac{3}{5} \Rightarrow x = 15$$



نکته: مماس مشترک های خارجی دو دایره و خط المکزین آنها، همسند.

۲۳ - گزینه ۱ معادله درجه دوم را بر حسب x مرتب می کنیم:

$$mx^2 + m + x^2 + 4x + 4 = 5 - x^2 \Rightarrow (m+2)x^2 + 4x + m - 1 = 0$$

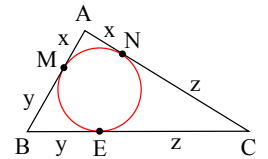
$$\Delta > 0 \Rightarrow 16 - 4(m+2)(m-1) > 0 \Rightarrow 4 - (m+2)(m-1) > 0$$

$$m^2 + m - 6 < 0 \Rightarrow -3 < m < 2$$

۲۴ - گزینه ۴ می دانیم طول دو قطعه مماس رسم شده از بیرون دایره، با هم برابر است، لذا خواهیم داشت:

$$\begin{cases} AM = AN = x \\ BM = BE = y \\ CN = CE = z \end{cases} \Rightarrow 2(x+y+z) = 2P = 20 \Rightarrow x+y+z = 10$$

$$\Rightarrow x = 10 - (y+z) = 10 - (BC) = 10 - 8 = 2$$



۲۵ - گزینه ۲ می دانیم: $\log_b^N = x \rightarrow N = b^x$, $\log_k^a = \frac{1}{\log_a^k}$

$$x^{1+\log x} = 10^6 \rightarrow 1 + \log x = \log_x^{10^6} \rightarrow 6 \log_x^{10} = 1 + \frac{1}{\log_x^{10}}$$

$$\xrightarrow{\log_x^{10} = A} 6A = 1 + \frac{1}{A} \rightarrow 6A^2 = A + 1 \rightarrow 6A^2 - A - 1 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 1 + 24 = 25, A_{1,2} = \frac{1 \pm 5}{12} = \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}$$

$$A = \frac{1}{2} \rightarrow \log_x^{10} = \frac{1}{2} \rightarrow x^{\frac{1}{2}} = 10 \rightarrow \sqrt{x} = 10 \rightarrow x = 100$$

$$A = -\frac{1}{3} \rightarrow \log_x^{10} = -\frac{1}{3} \rightarrow x^{-\frac{1}{3}} = 10 \xrightarrow{\text{به توان } (-3)} (x^{-\frac{1}{3}})^{-3} = 10^{-3} \Rightarrow x = \frac{1}{1000}$$

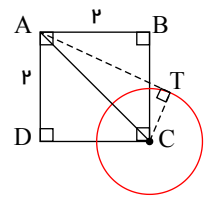
$$\text{حاصل ضرب ریشه ها} = (100) \left(\frac{1}{1000} \right) = 0,1$$

۲۶ - گزینه ۳

$$\text{طول مماس: } AT = \sqrt{AC^2 - TC^2}$$

$$AC = 2\sqrt{2} \text{ و } TC = \frac{BC}{2} = 1 \text{ شعاع دایره}$$

$$AT = \sqrt{8 - 1} = \sqrt{7}$$



۲۷ - گزینه ۲

$$\text{نکته (قوانین دمورگان): } \sim (p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q, \sim (p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$$

$$\sim (x \geq 5 \vee y \in Q) \equiv \sim ((x \geq 5) \wedge \sim (y \in Q)) \equiv (x < 5) \wedge (y \in Q')$$

مطابق نکته ابتدا نقیض را به دست می آوریم:

پس x عددی کوچکتر از ۵ و y عددی گنگ است. باتوجه به گزینه ها، گزینه ی ۲ پاسخ است.

۲۸ - گزینه ۲ نقطه $S(-\frac{b}{2a}, \frac{-\Delta}{4a})$ مختصات رأس سهمی $y = ax^2 + bx + c$ است.

$$f(x) = ax^2 + bx + c, \quad a > 0, \quad -\frac{b}{2a} > 0 \Rightarrow b < 0$$

$$f(0) = -3 \Rightarrow c = -3$$

$$f(3) = 0 \Rightarrow 9a + 3b - 3 = 0 \Rightarrow 3a + b - 1 = 0 \Rightarrow b = -3a + 1$$

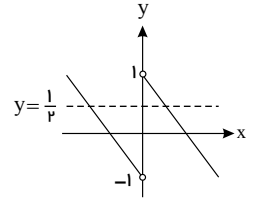
$$-\frac{\Delta}{4a} = -4 \Rightarrow \Delta = 16a \Rightarrow b^2 - 4ac = 16a \Rightarrow b^2 + 12a = 16a \Rightarrow b^2 = 4a$$

$$\rightarrow (-3a + 1)^2 = 4a \rightarrow 9a^2 - 6a + 1 = 4a \rightarrow 9a^2 - 10a + 1 = 0 \xrightarrow{\text{مجموع ضرایب صفر}} \begin{cases} a = 1 \rightarrow b = -2 \text{ قی ۱} \\ a = \frac{1}{9} \rightarrow b = \frac{2}{3} \text{ غ قی ۲} \end{cases}$$

$$\Rightarrow b = -2 \Rightarrow f(x) = x^2 - 2x - 3 \rightarrow f(-2) = 4 + 4 - 3 = 5$$

۲۹ - گزینه ۱ ابتدا نمودار تابع $f(x) = \frac{x}{|x|} - x$ را رسم می‌نماییم:

$$\begin{cases} x > 0 : f(x) = 1 - x \\ x < 0 : f(x) = -1 - x \end{cases}$$



مطابق شکل و گزینه‌ها، تنها خط $y = \frac{1}{2}$ این تابع را در دو نقطه قطع می‌کند.

۳۰ - گزینه ۳

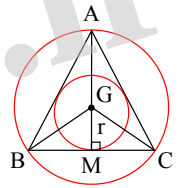
نکته: اگر G محل تلاقی سه میانه‌ی AM و BN و CP از مثلث ABC باشد آن‌گاه:

نکته: در مثلث متساوی‌الاضلاع، میانه، نیمساز و ارتفاع نظیر هر رأس برهم منطبق‌اند.

$$\text{شعاع دایره محیطی} : R = 6 \Rightarrow AG = BG = CG = 6$$

$$AG = \frac{2}{3}AM = 6 \Rightarrow AM = \frac{18}{2} = 9$$

$$\text{شعاع دایره‌ی محاطی} : r = GM = \frac{1}{3}AM = \frac{9}{3} = 3$$



$$\frac{GA}{GM} = \frac{GB}{GN} = \frac{GC}{GP} = 2$$

abadgar@medu.ir