

۱- در تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \sqrt{x}$ ، آهنگ متوسط تغییر تابع نسبت به تغییر متغیر x ، در نقطه‌ی $x = 1$ با نمو متغیر، $0/21$ از آهنگ لحظه‌ای تابع در این نقطه، چقدر کم‌تر است؟

$$\frac{1}{42} \quad (1) \qquad \frac{1}{21} \quad (2) \qquad \frac{3}{42} \quad (3) \qquad \frac{2}{21} \quad (4)$$

گزینه‌ی ۱ پاسخ صحیح است.

$$f(x) = \sqrt{x} \quad \text{و} \quad \begin{cases} x = 1 \\ \Delta x = 0/21 \end{cases}$$

$$\text{آهنگ متوسط} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{x + \Delta x - x} = \frac{f(1 + 0/21) - f(1)}{1 + 0/21 - 1} = \frac{f(1/21) - f(1)}{0/21}$$

$$= \frac{\sqrt{1/21} - \sqrt{1}}{0/21} = \frac{1/1 - 1}{0/21} = \frac{0/1}{0/21} = \frac{1}{21}$$

$$x = 1 \quad \text{در} \quad \text{آهنگ لحظه‌ای} \quad f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$f'(x = 1) = \frac{1}{2\sqrt{1}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \text{آهنگ متوسط} - \text{آهنگ لحظه‌ای} = \frac{1}{2} - \frac{1}{21} = \frac{2/1 - 2}{2(2/1)} = \frac{0/1}{4/2} = \frac{1}{42}$$

۲- آهنگ متوسط تغییرات تابع $f(x) = x - \sqrt{x}$ به تغییرات تابع $g(x) = 2x - 1$ وقتی x از ۴ به $4/41$ تغییر کند چقدر است؟

$$\frac{17}{42} \quad (1) \qquad \frac{16}{41} \quad (2) \qquad \frac{31}{82} \quad (3) \qquad \frac{32}{82} \quad (4)$$

گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است.

$$\Delta f = f(4/41) - f(4) = 4/41 - 2/1 - (4 - 2) = 0/31$$

$$\Delta g = g(4/41) - g(4) = 2 \times 4/41 - 1 - (2 \times 4 - 1) = 0/82 \Rightarrow \frac{\Delta f}{\Delta g} = \frac{31}{82}$$

۳- آهنگ متوسط تغییر تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \sqrt{x^2 + 144}$ نسبت به متغیر x روی بازه‌ای از $x = 5$ و $x = 9$ کدام است؟

$$0/4 \quad (1) \qquad 0/5 \quad (2) \qquad 0/6 \quad (3) \qquad 0/7 \quad (4)$$

گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است.

$$\frac{f(9) - f(5)}{9 - 5} = \frac{\sqrt{81 + 144} - \sqrt{25 + 144}}{4} = \frac{15 - 13}{4} = \frac{1}{2} = 0/5$$

۴- مشتق چپ تابع $f(x) = |2x + 1| - |x - 1| \quad \forall x \in \mathbb{R}$ در نقطه $x = -\frac{1}{2}$ کدام است؟

- (۱) -۱ (۲) ۱ (۳) $-\frac{1}{2}$ (۴) $\frac{1}{2}$

روش اول: تابع $f(x)$ را می‌توان بصورت یک تابع سه ضابطه‌ای نوشت که فقط ضابطه آن به ازای $x \leq -\frac{1}{2}$ مورد احتیاج است، پس:

$$x \leq -\frac{1}{2} \Rightarrow 2x + 1 \leq 0 \Rightarrow x - 1 < 0 \Rightarrow f(x) = -(2x + 1) + (x - 1) = -x - 2$$

پس $f'(x) = -1$ بوده و گزینه ۱ جواب صحیح می‌باشد.

روش دوم: با استفاده از تعریف مشتق چپ:

$$f'\left(-\frac{1}{2}\right) = \lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}^-} \frac{|2x + 1| - |x - 1| - \frac{3}{2}}{x + \frac{1}{2}} = \lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}^-} \frac{|2x + 1| - 0}{x + \frac{1}{2}} - \lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}^-} \frac{|x - 1| - \frac{3}{2}}{x + \frac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow f'\left(-\frac{1}{2}\right) = \lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}^-} \frac{2|x + \frac{1}{2}| - 0}{x + \frac{1}{2}} - \lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}^-} \frac{-x - \frac{1}{2}}{x + \frac{1}{2}} = -2 - (-1) = -1$$

بنابراین گزینه ۱ صحیح است.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{|x+1|}{x-2} & x < 1 \\ \frac{|x-1|}{x+2} & x \geq 1 \end{cases} \quad \text{تابع ۵-}$$

در چند نقطه مشتق پذیر نیست؟

(۱) دو نقطه (۲) یک نقطه (۳) چهار نقطه (۴) سه نقطه

برای بررسی کردن مشتق پذیری یک تابع چند ضابطه‌ای، ابتدا باید تک‌تک ضابطه‌ها را در فاصله داده شده، بررسی کنیم سپس مشتق پذیری تابع را در نقاط پرش، بررسی نماییم.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{|x+1|}{x-2} & x < 1 \\ \frac{|x-1|}{x+2} & x \geq 1 \end{cases} \quad \text{پس در مورد تابع به ترتیب زیر عمل می‌کنیم:}$$

$y_1 = \frac{|x+1|}{x-2}$ $x \in (-\infty, 1)$ تابع در ریشه مخرج پیوسته نمی‌باشد پس مشتق پذیر هم نخواهد بود ولی چون ریشه مخرج ($x=2$) در فاصله داده شده ($-\infty, 1$) قرار ندارد پس مشکلی ایجاد نمی‌کند. ولی می‌دانیم تابع در ریشه ساده تابع داخل قدر مطلق نیز مشتق پذیر نمی‌باشد. پس $f(x)$ در نقطه ($x+1=0 \Rightarrow x=-1$) که در فاصله ($-\infty, 1$) هم قرار دارد، مشتق پذیر نمی‌باشد.

$$y_2 = \frac{|x-1|}{x+2}, x \in [1, +\infty) \Rightarrow y_2 = \frac{x-1}{x+2}, x \in [1, +\infty)$$

y_2 در فاصله داده شده مشتق پذیر می‌باشد چون در این فاصله نه ریشه مخرج وجود دارد و نه ریشه قدر مطلق. حال به نقطه پرش یعنی $x=1$ می‌پردازیم. ابتدا پیوستگی آن را بررسی می‌کنیم:

$$f(1) = \frac{|1-1|}{1+2} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{|x-1|}{x+2} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{|x+1|}{x-2} = \frac{2}{1-2} = -2$$

$\Rightarrow f(x)$ در $x=1$ مشتق پذیر نمی‌باشد

$\Rightarrow f(x)$ در $x=1$ پیوسته نمی‌باشد

پس در مجموع، تابع در $x=1$ و $x=-1$ مشتق پذیر نمی‌باشد. بنابراین گزینه ۱ پاسخ صحیح سوال می‌باشد.

۶- تابع با ضابطه‌ی $f(x) = (x-1)[x]$ در کدام نقطه پیوسته است ولی مشتق پذیر نیست؟

(۱) ۰ (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) ۱ (۴) $\sqrt{2}$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$x-1=0 \Rightarrow x=1 \Rightarrow \begin{cases} f(1) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

f در $x=1$ پیوسته است. ولی مشتق چپ و راست در این نقطه با هم یکی نیست.

۷- مشتق راست تابع $y = \sqrt{1 - \sqrt{1 - x^2}}$ در $x = 0$ چقدر از مشتق چپ آن در $x = 0$ بیشتر است؟

- (۱) $\sqrt{2}$ (۲) $-\sqrt{2}$ (۳) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (۴) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 - \sqrt{1 - x^2}}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2}}{x \cdot (\sqrt{1 + \sqrt{1 - x^2}})}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x \sqrt{1 + \sqrt{1 - x^2}}} \Rightarrow \begin{cases} f'_+(0) = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ f'_-(0) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Rightarrow f'_+(0) - f'_-(0) = \sqrt{2}$$

۸- با فرض $f(x) = \begin{cases} 3x^2 - x & x > 2 \\ 2x + 6 & x \leq 2 \end{cases}$ حاصل $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{f(2 + 3h) - f(2 - 2h)}{h}$ کدام است؟

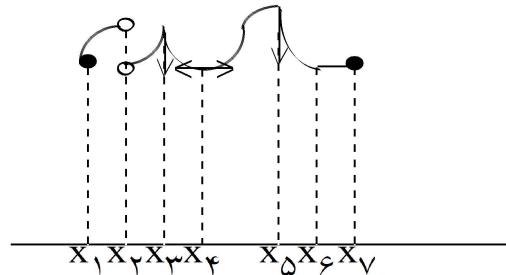
(۱) ۲۸ (۲) ۱۰ (۳) -۱۶ (۴) ۱۷

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. تابع f در $x = 2$ پیوسته است. لذا با توجه به تعریف مشتق داریم:

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(2 + 3h) - f(2) - (f(2 - 2h) - f(2))}{h} = 3f'_-(2) + 2f'_+(2)$$

$$= 3 \times 2 + 2(12 - 1) = 6 + 22 = 28$$

۹- اگر f بر بازه $[X_1, X_7]$ مطابق شکل باشد f بر این بازه دارای چند نقطه مشتق ناپذیر است؟



- (۱) ۷
(۲) ۵
(۳) ۳
(۴) بی شمار

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. اولاً بدیهی است تابع در X_1 و X_7 مشتق پذیر نیست. در X_2 به دلیل ناپیوستگی مشتق پذیر نیست. در X_3 $f'_+(X_3) = -\infty$ و $f'_-(X_3) = +\infty$ پس در این نقطه مشتق پذیر نمی باشد. $f'(X_4) = 0$ در X_5 داریم $f'_-(X_5) = 0$ و $f'_+(X_5) = -\infty$ پس X_5 نیز جزء نقاط مشتق پذیر برای f است پس در کل این تابع بر بازه $[X_1, X_7]$ دارای ۵ نقطه مشتق پذیر است. تابع در X_6 مشتق پذیر است.

۱۰- هرگاه تابع $y = 2x|x - 2| + a|x^2 - 2|$ در $x = 2$ مشتق پذیر باشد مقدار a کدام است؟

(۱) -۲ (۲) -۱ (۳) ۱ (۴) ۲

$$y = |x - 2|(2x + a|x + 2|)$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

باید $|2x + a|x + 2||$ به ازای $x = 2$ صفر باشد،

$$4 + 4a = 0 \Rightarrow a = -1$$

پس: