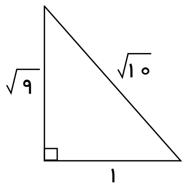
پاسخنامه تشریحی

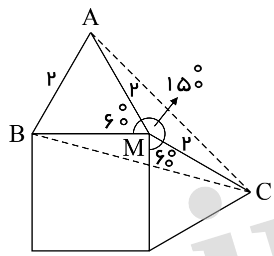
۱ ـ گزینه ۴ اندازهٔ وترهای مثلث‌های قائم‌الزاویه طبق قضیهٔ فیثاغورس برابر $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{4}, \sqrt{5}, \sqrt{6}, \dots$ است.

بنابراین وتر مثلث نهم برابر $\sqrt{10}$ است و شکل آن بدین صورت است.



$$\to S_{\text{نهمین مثلث}} = \frac{\sqrt{9}\times 1}{2} = \frac{3}{2}$$

۲ ـ گزینه ۳



$$S_{\overset{\triangle}{AMC}} = S_{\overset{\triangle}{BMC}} = \frac{1}{2}\times 2\times 2\times \sin 150 = 1$$

$$S_{\overset{\triangle}{ABM}} = \frac{\sqrt{3}}{4}\times 4 = \sqrt{3}$$

$$S_{\overset{\triangle}{ABC}} = S_{\overset{\triangle}{ABM}} + 2S_{\overset{\triangle}{AMC}} = \sqrt{3}+2$$

۳ ـ گزینه ۴

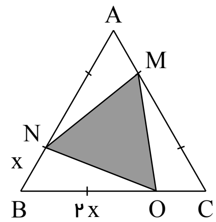
روش اول: مساحت مثلث‌های سفید برابر است با:

$$S = 3\times\frac{h\times 2x}{2} = 3hx$$

مساحت مثلث هاشورخورده برابر است با:

$$S(MNO) = S(ABC) - 3S(MCO) = \frac{3h\times 3x}{2} - 3hx = \frac{3hx}{2}$$

$$S(ABC) = \frac{3h\times 3x}{2} = \frac{9hx}{2} \to \frac{S(MNO)}{S(ABC)} = \frac{\frac{3hx}{2}}{\frac{9hx}{2}} = \frac{1}{3}$$



روش دوم: مساحت هر یک از مثلث‌های سفید برابر است با:

$$S_1 = \frac{1}{2}(x)(2x)\sin 60^\circ$$

مساحت کل مثلث $\overset{\triangle}{ABC}$ برابر است با:

$$S = \frac{1}{2}(3x)(3x)\sin 60^\circ$$

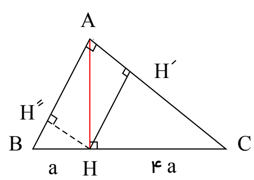
بنابراین مساحت هر مثلث سفید $\frac{2}{9}$ مساحت کل مثلث است.

$$\text{مساحت سایه زده} = (\text{مساحت کل}) - (\text{مساحت مثلث‌های سفید}) = S - (\frac{2}{9}S + \frac{2}{9}S + \frac{2}{9}S) = \frac{1}{3}S$$

۴ ـ گزینه ۴ از فرض تست نتیجه می‌گیریم مساحت مثلث ABH مساوی $\frac{1}{4}$ مساحت مثلث AHC است، پس $CH = 4BH$ داریم:

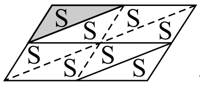
$$AH^2 = a\times 4a = 4a^2 \Rightarrow AH = 2a$$

$$\overset{\triangle}{AHB} \sim \overset{\triangle}{AHC} \Rightarrow \text{نسبت تشابه} = \frac{AH}{HC} = \frac{2a}{4a} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{HH''}{HH'} = \frac{1}{2}$$



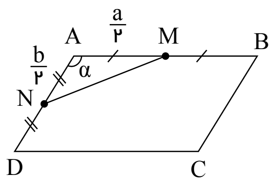
۵ ـ گزینه ۳

روش اول: با توجه به شکل اگر وسط ها را به هم وصل کنیم ۸ مثلث هم مساحت به دست می‌آید.



$$\rightarrow \frac{\text{مساحت قسمت بزرگ‌تر}}{\text{مساحت قسمت کوچک‌تر}} = ۷$$

روش دوم :

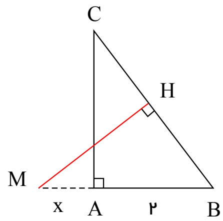


$$\rightarrow \begin{cases} S_{ABCD} = ab\sin\alpha \\ S_{AMN} = (\frac{۱}{۲})(\frac{a}{۲})(\frac{b}{۲})\sin\alpha = \frac{۱}{۸}ab\sin\alpha \end{cases}$$

$$S_{MBCDN} = S_{ABCD} - S_{AMN} = \frac{۷}{۸}ab\sin\alpha \rightarrow S_{MBCDN} = ۷S_{AMN}$$

توجه کنید مساحت مثلث از رابطه‌ی نصف حاصل‌ضرب دو ضلع در سینوس زاویه‌ی بینشان بدست می‌آید.

۶ ـ گزینه ۲

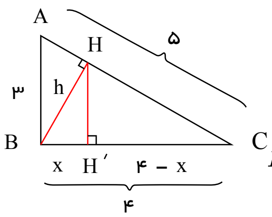


$$BC^۲ = ۳۶ + ۴ \Rightarrow BC = ۲\sqrt{۱۰} \Rightarrow BH = CH = \sqrt{۱۰}$$

$$\left.\begin{array}{l} \angle B = \angle B \\ \angle H = \angle A = ۹۰^\circ \end{array}\right\} \Rightarrow \overset{\Delta}{BMH} \sim \overset{\Delta}{ABC} \Rightarrow \frac{BH}{AB} = \frac{BM}{BC} \Rightarrow \frac{\sqrt{۱۰}}{۲} = \frac{X+۲}{۲\sqrt{۱۰}} \Rightarrow X = ۸$$

۷ ـ گزینه ۴

وتر AC در مثلث قائم الزاویه‌ی ABC به کمک رابطه ی فیثاغورس بدست می آید.



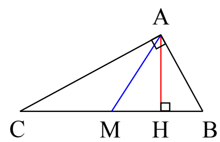
$$AC = \sqrt{۳^۲ + ۴^۲} = ۵$$

از طرفی داریم:

$$BH \times AC = AB \times BC \Rightarrow ۵h = ۳ \times ۴ \Rightarrow h = \frac{۱۲}{۵}$$

$$\overset{\Delta}{BHC} : BH^۲ = BH' \times BC \Rightarrow (\frac{۱۲}{۵})^۲ = ۴x \Rightarrow x = \frac{۳۶}{۲۵} = ۱٫۴۴$$

۸ ـ گزینه ۴ با فرض $AC = ۲$ و $AB = \sqrt{۳}$ داریم:



$$AB^۲ + AC^۲ = BC^۲ \Rightarrow ۴ + ۳ = BC^۲ \Rightarrow BC = \sqrt{۷}$$

از طرفی: $AH \cdot BC = AB \cdot AC \rightarrow \sqrt{۷}AH = ۲\sqrt{۳} \rightarrow AH = \frac{۲\sqrt{۳}}{\sqrt{۷}}$

در مثلث قائم الزاویه، میانه‌ی وارد بر وتر نصف وتر است. بنابراین:

$$AM = BM = MC = \frac{\sqrt{۷}}{۲}$$

$$\overset{\Delta}{AHM} : AH^۲ + HM^۲ = \frac{۷}{۴} \Rightarrow \frac{۱۲}{۷} + HM^۲ = \frac{۷}{۴} \rightarrow HM^۲ = \frac{۷}{۴} - \frac{۱۲}{۷} = \frac{۱}{۲۸}$$

$$\rightarrow HM = \frac{۱}{\sqrt{۲۸}} = \frac{۱}{۲\sqrt{۷}}$$

$$\Rightarrow \frac{S_{\overset{\Delta}{ABC}}}{S_{\overset{\Delta}{AHM}}} = \frac{\frac{۱}{۲}AH \times BC}{\frac{۱}{۲}AH \times MH} = \frac{BC}{MH} = \frac{\sqrt{۷}}{\frac{۱}{۲\sqrt{۷}}} \Rightarrow \frac{S_{\overset{\Delta}{ABC}}}{S_{\overset{\Delta}{AHM}}} = ۱۴$$

۹ ـ گزینه ۱ اگر c واسطه ی هندسی a و b باشد داریم:

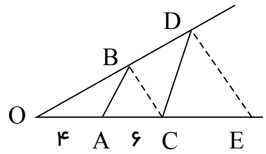
$$c = \sqrt{ab} = \sqrt{\sqrt{۳} \times \frac{\sqrt{۳}}{۴}} = \sqrt{\frac{۳}{۴}} = \frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

هندسه

۱۰ ـ گزینه ۳

$$BC' \parallel BC \Rightarrow \frac{AB'}{BB'} = \frac{AC'}{CC'} \Rightarrow \frac{۳}{۷} = \frac{AC'}{CC'} \Rightarrow AC' = \frac{۳}{۷}CC'$$

۱۱ ـ گزینه ۲

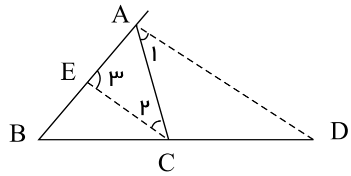


$$\left.\begin{array}{l} AB \parallel CD \Rightarrow \frac{OA}{OC} = \frac{OB}{OD} \\ BC \parallel DE \Rightarrow \frac{OB}{OD} = \frac{OC}{OE} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{OA}{OC} = \frac{OC}{OE} \Rightarrow \frac{۴}{۱۰} = \frac{۱۰}{OE} \Rightarrow OE = ۲۵$$

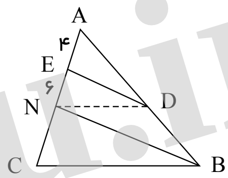
$$CE = ۲۵ - OC = ۲۵ - ۱۰ = ۱۵$$

۱۲ ـ گزینه ۲ زوایای ۲, ۳ مساویند پس مثلث ACE متساوی الساقین است در نتیجه $AE = AC$ داریم:

$$\angle ۱ = \angle ۲ \Rightarrow CE \parallel AD \Rightarrow \frac{BC}{CD} = \frac{BA}{EA} \Rightarrow \frac{BC}{CD} = \frac{۱۵}{۶} = \frac{۵}{۲}$$



۱۳ ـ گزینه ۴



$$ED \parallel NB \Rightarrow \frac{AE}{AN} = \frac{AD}{AB} (۱)$$

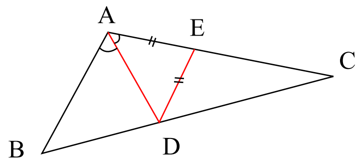
$$ND \parallel BC \Rightarrow \frac{AD}{AB} = \frac{AN}{AC} (۲)$$

از روابط (۱) و (۲) نتیجه می گیریم $\frac{AE}{AN} = \frac{AN}{AC}$ پس:

$$\frac{۴}{۱۰} = \frac{۱۰}{AC} \Rightarrow AC = ۲۵$$

۱۴ ـ گزینه ۲ بنابر قضیه ی خطوط موازی و مورب نتیجه می گیریم $\hat{D}_۱ = \hat{A}_۱$ چون AD نیمساز است پس $\hat{D}_۲ = \hat{A}_۲$ بنابراین $DE = AE$ داریم:

$$۵AB = ۳AC = ۶۰ \Rightarrow \begin{cases} AC = ۲۰ \\ AB = ۱۲ \end{cases}$$



$$DE \| AB \xrightarrow{\text{قضیه‌ی تالس}} \frac{DE}{AB} = \frac{EC}{AC}$$

$$\frac{DE}{۱۲} = \frac{EC}{۲۰} \overset{DE=AE}{\Longrightarrow} \frac{AE}{۱۲} = \frac{EC}{۲۰}$$

$$\Rightarrow \frac{AE}{EC} = \frac{۱۲}{۲۰} \xrightarrow{\text{ترکیب در صورت}} \frac{AC}{EC} = \frac{۳۲}{۲۰} \Rightarrow \frac{۲۰}{EC} = \frac{۳۲}{۲۰} \Rightarrow EC = ۱۲/۵$$

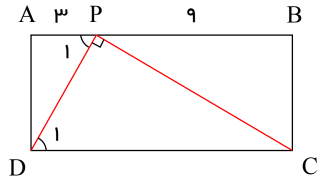
۱۵ ـ گزینه ۳ CD و AB هر دو بر AC عمودند و می دانیم دو خط عمود بر یک خط موازیند. پس:

$$AB \parallel CD \xrightarrow{\text{مورب}AD} \hat{A} = \hat{D} \overset{\text{زز}}{\longrightarrow} \Delta EDC \sim \Delta EAB$$

متقابل به رأس $\hat{E}_۱ = \hat{E}_۱$

۱۶ ـ گزینه ۴ دو زاویه‌ی $P_۱, D_۱$ بنابر قضیه‌ی خطوط موازی و مورب مساویند پس دو مثلث قائم الزاویه‌ی ADP , PDC متشابهند.

هندسه



$$\overset{\triangle}{APD} \sim \overset{\triangle}{DPC} \Rightarrow \frac{DP}{DC} = \frac{AP}{DP} \Rightarrow DP^{۲} = AP \cdot DC = ۱۲ \times ۳ = ۳۶ \Rightarrow PD = ۶$$

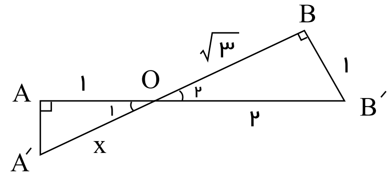
۱۷ ـ گزینه ۱

در دو مثلث متشابه اضلاع متناسبند.

$$\frac{۹}{x-۲} = \frac{۱۲}{x} \Rightarrow ۹x = ۱۲x - ۲۴ \Rightarrow x = ۸$$

$$\text{نسبت تشابه} = k = \frac{۶}{۹} = \frac{۲}{۳} \Rightarrow \text{نسبت مساحت} = k^{۲} = (\frac{۲}{۳})^{۲} = \frac{۴}{۹}$$

۱۸ ـ گزینه ۲ ابتدا با رابطه‌ی فیثاغورس اندازه‌ی OB را بدست می‌آوریم.

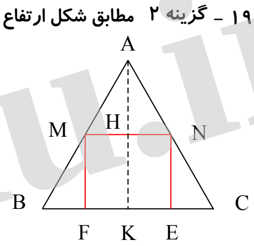


$$OB = \sqrt{۴-۱} = \sqrt{۳}$$

$$\left.\begin{array}{l}\hat{O}_{۱} = \hat{O}_{۲}\\ \hat{A} = \hat{B}\end{array}\right\} \Rightarrow \overset{\triangle}{AOA'} \sim \overset{\triangle}{OBB'} \Rightarrow \overset{\triangle}{OBB'}$$

$$\Rightarrow \frac{AA'}{BB'} = \frac{A'O}{OB'} = \frac{AO}{OB} \Rightarrow \frac{x}{۲} = \frac{۱}{\sqrt{۳}} \Rightarrow x = \frac{۲\sqrt{۳}}{۳}$$

۱۹ ـ گزینه ۲ مطابق شکل ارتفاع AK را رسم کرده، داریم:



$$MN \parallel BC \Rightarrow \overset{\triangle}{AMN} \sim \overset{\triangle}{ABC} \Rightarrow \frac{MN}{BC} = \frac{AH}{AK}$$

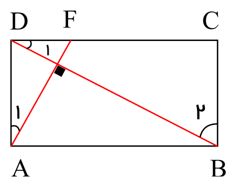
اگر طول ضلع مربع را x فرض کنیم با توجه به اینکه در مثلث متساوی الاضلاع به ضلع a طول ارتفاع $\frac{a\sqrt{۳}}{۲}$ است پس:

$$\frac{MN}{BC} = \frac{AH}{AK} \Rightarrow \frac{x}{۱} = \frac{AK - HK}{AK} \Rightarrow x = \frac{\frac{\sqrt{۳}}{۲} - x}{\frac{\sqrt{۳}}{۲}}$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{۳}}{۲}x = \frac{\sqrt{۳}}{۲} - x \Rightarrow x\left(\sqrt{۳} + ۲\right) = \sqrt{۳}$$

$$x = \frac{\sqrt{۳}}{۲+\sqrt{۳}} \times \frac{۲-\sqrt{۳}}{۲-\sqrt{۳}} = ۲\sqrt{۳} - ۳$$

۲۰ ـ گزینه ۲ $\Delta ADF \sim \Delta DBC$ زیرا دو زاویه‌ی مساوی دارند.



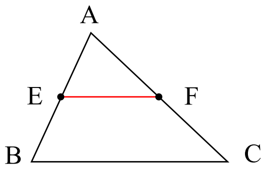
$$\left\{\begin{array}{l}\angle D = \angle C = ۹۰^{\circ}\\ \angle D_{۱} = \angle A_{۱}\end{array}\right. \Rightarrow \overset{\triangle}{ABD} \sim \overset{\triangle}{ADC}$$

$$\Rightarrow \frac{AD}{DC} = \frac{DF}{BC} = \frac{AF}{DB} \Rightarrow \frac{AD}{۳AD} = \frac{DF}{\frac{۱}{۳}AB}$$

پس $DF = \frac{۱}{۹}AB$ و $AB = ۹DF$ بنابراین $DC = ۹DF$

نکته: اگر طول مستطیل K برابر عرض مستطیل بود $DC = K^{۲}DF$ است.

۲۱ ـ گزینه ۴ برای اینکه AEF و ABC متشابه باشند باید تناسب $\frac{AF}{FC} = \frac{AE}{EB}$ برقرار باشد، در گزینه‌ی ۴ تناسب $\frac{۱۲}{۸} = \frac{۶}{۴}$ برقرار است ولی در مورد بقیه این تناسب برقرار نیست.



۲۲ ـ گزینه ۳ اضلاع دو مثلث نظیر به نظیر موازیند پس دو مثلث متشابهند بنابراین:

$$\frac{S}{S'}=\left[\frac{۷}{۱۷/۵}\right]^{۲}\Rightarrow\frac{\frac{۴\times ۷}{۲}}{S'}=\left[\frac{۷}{\frac{۳۵}{۲}}\right]^{۲}\Rightarrow S'=\frac{۱۷۵}{۲}=۸۷/۵$$

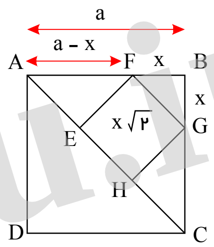
۲۳ ـ گزینه ۲ برای هر زاویه‌ی داخلی، یک زاویه‌ی خارجی وجود دارد که اگر زاویه‌ی داخلی حاده باشد، زاویه‌ی خارجی منفرجه است، حال اگر فرض کنیم ۴ زاویه‌ی حاده‌ی داخلی داشته باشیم، مجموع زوایای خارجی آن ها بزرگ تر از ۳۶۰° می شود (همان طور که می دانید مجموع زوایای خارجی هر n ضلعی ۳۶۰° است). پس حداکثر هر n ضلعی ۳ زاویه‌ی حاده دارد.

۲۴ ـ گزینه ۳

$$\overset{\Delta}{AEF}: EF=\frac{\sqrt{۲}}{۲}AF\Rightarrow EF=\frac{(a-x)\sqrt{۲}}{۲}$$

با توجه به اندازه‌های روی شکل داریم:

$$EF=FG\Rightarrow\frac{(a-x)\sqrt{۲}}{۲}=x\sqrt{۲}\Rightarrow a-x=۲x\Rightarrow x=\frac{a}{۳}$$



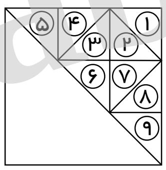
مساحت مربع بزرگ $= a^{۲}$

مساحت کوچکترین مثلث = $\frac{a^{۲}}{۱۸}=\frac{\frac{a}{۳}\times\frac{a}{۳}}{۲}$

بنابراین مساحت مربع ۱۸ برابر مساحت کوچکترین مثلث‌ها است.

روش دوم:

بنابراین مربع ۱۸ برابر مثلث کوچک مساحت دارد.



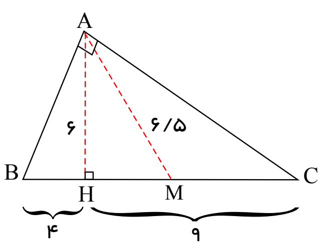
۲۵ ـ گزینه ۴

نکته: در مثلث قائم‌الزاویه مربع ارتفاع وارد بر وتر برابر است با حاصل‌ضرب ۲ قطعه‌ای که روی وتر ایجاد می‌کند.

$$AH^{۲}=BH\times HC$$

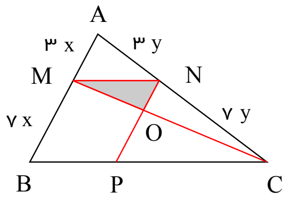
$$AH^{۲}=۴\times ۹=۳۶\Rightarrow AH=۶$$

و میانه وارد بر وتر نصف وتر است پس $AM=\frac{۱۳}{۲}$



$$HM=\sqrt{(\frac{۱۳}{۲})^{۲}-۶^{۲}}=\frac{۵}{۲}=۲/۵\Rightarrow S_{AHM}=\frac{\frac{۵}{۲}\times ۶}{۲}=\frac{۱۵}{۲}=۷/۵$$

۲۶ ـ گزینه ۳ از فرض تست و قضیه‌ی تالس شکل زیر را نتیجه می گیریم.



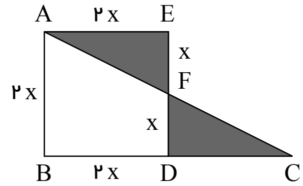
$$ON || AM \Rightarrow \frac{CN}{CA}=\frac{ON}{AM}\Rightarrow \frac{7y}{10y}=\frac{ON}{3x}\Rightarrow ON=\frac{21}{10}x$$

$$\frac{S_{OMN}}{S_{AMN}}=\frac{\frac{1}{2}ON\times MN\sin\hat{N}}{\frac{1}{2}AM\times MN\sin\hat{M}}\xrightarrow{\hat{N}=\hat{M}}\frac{S_{OMN}}{S_{AMN}}=\frac{ON}{AM}=\frac{\frac{21}{10}x}{3x}=\frac{7}{10}=70\%$$

۲۷ ـ گزینه ۳ ضلع مربع را برابر با $2x$ در نظر می‌گیریم. با توجه به همنهشتی دو مثلث AEF و CDF می‌توان گفت:

$$EF=DF=x$$

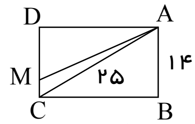
طبق روابط محاسبه ی مساحت ذوزنقه و مربع داریم:



$$\frac{\text{مساحت ذوزنقه}}{\text{مساحت مربع}}=\frac{\frac{1}{2}BD(AB+DF)}{AB^2}=\frac{\frac{1}{2}(2x)(2x+x)}{(2x)^2}=\frac{3x^2}{4x^2}$$

$$\Rightarrow\frac{\text{مساحت ذوزنقه}}{\text{مساحت مربع}}=\frac{3}{4}$$

۲۸ ـ گزینه ۲ ابتدا با استفاده از روابط محاسبه‌ی مساحت مثلث و مستطیل ، طول DM را محاسبه می‌کنیم:



$$\frac{S_{\overset{\triangle}{AMD}}}{S_{ABCM}}=\frac{5}{9}\xrightarrow[\text{در مخرج}]{\text{ترکیب}}\frac{S_{\overset{\triangle}{AMD}}}{S_{ABCD}}=\frac{5}{14}\Rightarrow\frac{\frac{1}{2}\times DM\times AD}{AD\times AB}=\frac{5}{14}=\frac{DM}{14}=\frac{5}{7}$$

$$\Rightarrow DM=10$$

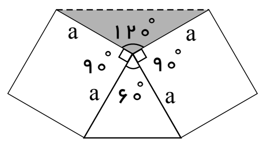
حال با استفاده از قضیه‌ی فیثاغورث ابتدا طول AD و سپس طول AM را به دست می‌آوریم:

$$\overset{\triangle}{ACD}: AC^2=AD^2+CD^2\Rightarrow 25^2=AD^2+14^2\Rightarrow AD^2=625-196=429$$

$$\overset{\triangle}{AMD}: AM^2=AD^2+DM^2\Rightarrow AM^2=429+100=529\Rightarrow AM=23$$

۲۹ ـ گزینه ۳

اگر طول ضلع متساوی الاضلاع را a در نظر بگیریم، آن گاه با توجه به فرض و شکل مقابل داریم:

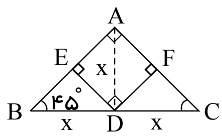


$$S_{\text{هاشور}}=\frac{1}{2}a^2\sin 120^\circ=\frac{1}{2}a^2\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$$

$$S_{\text{مثلث اصلی}}=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

$$S_{\text{سایه زده شده}}=\frac{a^2\frac{\sqrt{3}}{4}}{a^2\frac{\sqrt{3}}{4}}=1$$

۳۰ ـ گزینه ۱ از A به D وصل می‌کنیم. قطر AD نیمساز هم است، پس در مثلث متساوی الساقین ارتفاع و میانه می‌باشد.



$$\frac{S_\triangle}{S_\square}=\frac{\frac{1}{2}AD\times BC}{\frac{1}{2}\times(AD)^2}=\frac{\frac{1}{2}x\times 2x}{\frac{1}{2}\times x^2}=2$$

هندسه