پاسخنامه تشریحی

۱ - گزینه ۲

می‌دانیم: $\boxed{\log_b^N = x \to b^x = N \ \ , \ \ \log_k^{a^n} = n\log_k^a}$

$$\log_{\sqrt{3}}^{a} = \frac{4}{3} \Rightarrow a = (\sqrt{3})^{\frac{4}{3}} \Rightarrow a = (3^{\frac{1}{2}})^{\frac{4}{3}} = 3^{\frac{4}{6}} = 3^{\frac{2}{3}}$$

$$\log_8^{(a^3+7)} = \log_8^{(3^{\frac{2}{3}})^3+7} = \log_8^{3^2+7} = \log_8^{16} = \log_{2^3}^{2^4} = \frac{4}{3}$$

۲ - گزینه ۳

می‌دانیم: $\boxed{\log_k^a + \log_k^b = \log_k^{ab} \ \ , \ \ \log_k^{a^n} = n\log_k^a}$

$$\log 3 + \log \sqrt[4]{3} = \log(81)^k \to \log 3 + \log 3^{\frac{1}{4}} = \log 3^{4k} \to \log 3 \times 3^{\frac{1}{4}} = \log 3^{4k}$$

$$\to \log 3^{\frac{5}{4}} = \log 3^{4k} \to 4k = \frac{5}{4} \to k = \frac{5}{16}$$

$$\log_2^{\frac{5}{k}} \xlongequal{k=\frac{5}{16}} \log_2^{16} = \log_2^{2^4} = 4$$

۳ - گزینه ۴

می‌دانیم: $\boxed{\log_k^a + \log_k^b = \log_k^{ab}}$

$$\left.\begin{array}{l} 2^x \times 8^y = 4 \Rightarrow 2^x \times 2^{3y} = 2^2 \Rightarrow 2^{x+3y} = 2^2 \Rightarrow x + 3y = 2 \\ \log x = \log 2 + \log y \Rightarrow \log x = \log 2y \Rightarrow x = 2y \end{array}\right\} \Rightarrow x = \frac{4}{5}\ ,\ y = \frac{2}{5}$$

۴ - گزینه ۴

می‌دانیم: $\boxed{\log_k^{ab} = \log_k^a + \log_k^b \ \ , \ \ \log_{k^m}^{a^n} = \frac{n}{m}\log_k^a}$

$$\log_{\sqrt{b}}^{ab^2} = \log_{\sqrt{b}}^{a} + \log_{\sqrt{b}}^{b^2} = \log_{b^{\frac{1}{2}}}^{a} + \log_{b^{\frac{1}{2}}}^{b^2} = 2\log_b^a + 4 = 2(\frac{3}{2}) + 4 = 7$$

۵ - گزینه ۲

می‌دانیم: $\boxed{\log_k^a + \log_k^b = \log_k^{ab} \ \ , \ \ \log_k^a - \log_k^b = \log_k^{\frac{a}{b}} \ \ , \ \ \log_{k^m}^{a^n} = \frac{n}{m}\log_k^a}$

$$\log(2x-1) + \log(x+3) = \log 30 - \log 2 \to \log(2x-1)(x+3) = \log 15$$

$$\Rightarrow 2x^2 + 5x - 3 = 15 \Rightarrow 2x^2 + 5x - 18 = 0 \Rightarrow x = \frac{-5 \pm \sqrt{25+144}}{4}$$

$$x = \frac{-5 \pm 13}{4} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 & \text{ق ق} \\ x = -\frac{18}{4} & \text{(جلوی لگاریتم را منفی می‌کند)} \quad \text{غ ق ق} \end{cases}$$

$$\log_8 x = \log_{2^3}^{2} = \frac{1}{3}$$

۶ - گزینه ۴

می‌دانیم: $\boxed{\log_k^a - \log_k^b = \log_k^{\frac{a}{b}} \ \ , \ \ \log_{k^m}^{a^n} = \frac{n}{m}\log_k^a \ \ , \ \ \log_b^N = x \to N = b^x}$

$$\log_3^{2x^2+1} - \log_3^{x+2} = 1 \to \log_3^{\frac{2x^2+1}{x+2}} = 1 \xrightarrow{\text{تعریف}} \frac{2x^2+1}{x+2} = 3^1$$

$$\to 2x^2 + 1 = 3x + 6 \to 2x^2 - 3x - 5 = 0 \xrightarrow{a+c=b} \begin{cases} x = -1 \\ x = -\frac{c}{a} = \frac{5}{2} \end{cases}$$

هر دو جواب بدست آمده، قابل قبول هستند ولی برای محاسبه‌ی $\log_۸^{۲x-۱}$ فقط به جای x، می‌توانیم مقدار $x=\frac{۵}{۲}$ را جایگزین کنیم، زیرا $x=-۱$ جلوی لگاریتم را منفی می‌کند.

$$\log_۸^{۲x-۱} \xlongequal{x=\frac{۵}{۲}} \log_۸^{۲(\frac{۵}{۲})-۱} = \log_۸^۴ = \log_{۲^۳}^{۲^۲} = \frac{۲}{۳}$$

۷ - گزینه ۴

می‌دانیم: $\boxed{\log_{k^m}^{a^n} = \frac{n}{m}\log_k^a \ , \ \log_k^a = \frac{۱}{\log_a^k}}$

$$\log_۲^{\sqrt[۵]{e^۲}} = A \Rightarrow \log_۲^{e^{\frac{۲}{۵}}} = A \Rightarrow \frac{۲}{۵}\log_۲^e = A \to \log_۲^e = \frac{۵A}{۲} \Rightarrow \log_e^۲ = \frac{۲}{۵A}$$

$$\log_{\sqrt{e}}^{۳۲} = \log_{e^{\frac{۱}{۲}}}^{۲^۵} = ۱۰\log_e^۲ = ۱۰(\frac{۲}{۵A}) = \frac{۴}{A}$$

۸ - گزینه ۳ می‌دانیم: $\boxed{\log_k^{a^n} = n\log_k^a \ , \ \log_k^a + \log_k^b = \log_k^{ab}}$

$$۲^{x-۷} \times ۴^{x+y} = ۱ \to ۲^{x-۷} \times (۲^۲)^{x+y} = ۱ \to ۲^{x-۷+۲x+۲y} = ۱ \to ۲^{۳x+۲y-۷} = ۱ \to ۳x+۲y-۷=۰$$

$$\log y = ۲\log ۳ + \log x \to \log y = \log ۹ + \log x \to \log y = \log ۹x \to y = ۹x$$

پس: $\begin{cases} ۳x+۲y=۷ \\ y=۹x \end{cases} \to ۳x+۱۸x=۷ \to ۲۱x=۷ \to x=\frac{۱}{۳} \ , \ y=۹(\frac{۱}{۳})=۳$

۹ - گزینه ۱

$$(۰٫۴)^{۲x-۱} = (\frac{۱۲۵}{۸})^{x^۲} \to (\frac{۴}{۱۰})^{۲x-۱} = (\frac{۵}{۲})^{۳x^۲} \to (\frac{۲}{۵})^{۲x-۱} = (\frac{۲}{۵})^{-۳x^۲}$$

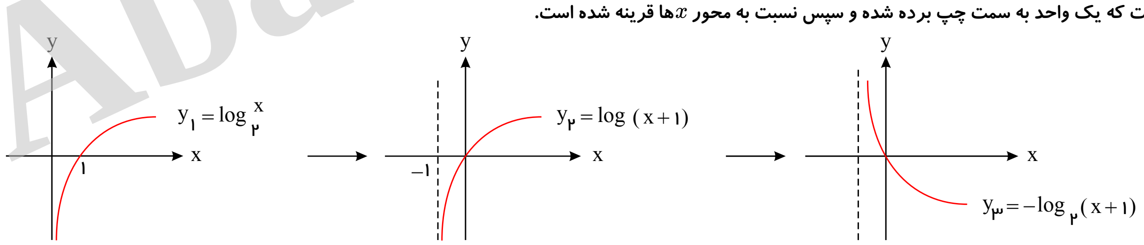
$$\to ۲x-۱ = -۳x^۲ \to ۳x^۲+۲x-۱=۰ \xrightarrow{a+c=b} \begin{cases} x=-۱ \\ x=-\frac{c}{a}=\frac{۱}{۳} \end{cases}$$

در عبارت خواسته شده نمی‌توانیم به‌جای x عدد -۱ را قرار دهیم چون جلوی لگاریتم منفی می‌شود و می‌دانیم که $\log_{k^m}^{a^n} = \frac{n}{m}\log_k^a$ است.

$$\log_۸^{۹x+۱} \xlongequal{x=\frac{۱}{۳}} \log_۸^۴ = \log_{۲^۳}^{۲^۲} = \frac{۲}{۳}$$

۱۰ - گزینه ۲ روش اول:

نمودار تابع داده‌شده $y=\log_۲^x$ است که یک واحد به سمت چپ برده شده و سپس نسبت به محور xها قرینه شده است.



پس : $y = -\log_۲^{(x+۱)} \to y = \log_۲^{(x+۱)^{-۱}} \to U(x) = (x+۱)^{-۱}$

روش دوم:

با توجه به شکل، دامنهٔ تابع داده‌شده $x > -۱$ است بنابراین گزینه‌های سوم و چهارم حذف می‌شوند. با توجه به شکل وقتی $x \to (-۱)^+$ نمودار تابع به سمت $+\infty$ می‌رود.

گزینهٔ اول : $\lim\limits_{x\to(-۱)^+} \log(x+۱) = \log ۰^+ = -\infty$: نادرست

گزینهٔ دوم : $\lim\limits_{x\to(-۱)^+} \log\frac{۱}{x+۱} = \log\frac{۱}{۰^+} = \log(+\infty) = +\infty$: درست

توجه کنید اگر $a > ۱$ باشد $\log_a^{۰^+} = -\infty$ و $\log_a^{+\infty} = +\infty$ است.