

پاسخنامه تشریحی

۱ - گزینه ۳ مجموعه های M, A و B' را با اعضایشان می نویسیم:

$$M = \{1, 2, 3, \dots, 50\}$$

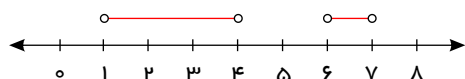
$$A = \{1, 2, 3, \dots, 15\} \Rightarrow A' = \{16, 17, 18, \dots, 50\}$$

$$B' = \{1, 2, 3, \dots, 24\} \Rightarrow B = \{25, 26, \dots, 50\}$$

$$\Rightarrow A' - B = \{16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24\}$$

و اینها اعدادی هستند که جذر آنها از ۴ بیشتر یا مساوی و از ۵ کمتر است. یعنی: $4 \leq \sqrt{x} < 5$

$$\Rightarrow A' - B = \{x | x \in M, 4 \leq \sqrt{x} < 5\}$$



۲ - گزینه ۱

مجموعه ی S عبارتست از:

این مجموعه فقط شامل اعداد صحیح $\{2, 3\}$ است. گزینه ها را بررسی می کنیم:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{x^2 + 4}{x^2} = \frac{x^2}{x^2} + \frac{4}{x^2} = 1 + \frac{4}{x^2} \\ 1) \quad x \in Z \\ \frac{x^2 + 4}{x^2} \in N \end{array} \right\} \Rightarrow A = \{-2, -1, 1, 2\} \Rightarrow A \cup \{2, 3\} = \{-2, -1, 1, 2, 3\}$$

$$2) B = \{1, 2, 3, 4\} \Rightarrow B \cup \{2, 3\} = \{1, 2, 3, 4\}$$

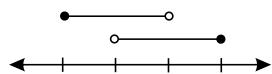
$$3) C: \left[\begin{array}{c} \text{Number line from 0 to 7. Open circles at 1, 2, 3, 4, 6, 7. Red line segments connect 1-4 and 6-7.} \\ \Rightarrow C = \{1, 2, 6\} \Rightarrow C \cup \{2, 3\} = \{1, 2, 3, 6\} \end{array} \right.$$

$$4) D = \{2, 3, 5, 7\} \Rightarrow D \cup \{2, 3\} = \{2, 3, 5, 7\}$$

تعداد اعضاء در گزینه ی ۱ از همه بیشتر است.

۳ - گزینه ۴ برای آنکه اشتراک بازه های $[-2, a]$ و $(b, 4]$ برابر با $(-\frac{2}{3}, 1)$ باشد، باید روی محور چنین وضعیتی داشته باشند:

بنابراین اشتراک آنها (b, a) است:



$$(b, a) = \left(-\frac{2}{3}, 1\right) \Rightarrow \begin{cases} b = -\frac{2}{3} \\ a = 1 \end{cases}$$

$$(-2a - 1, b) = (-2 \times 1 - 1, -\frac{2}{3}) = (-3, -\frac{2}{3})$$

$$(b - a) = \left(-\frac{2}{3}, 1\right)$$

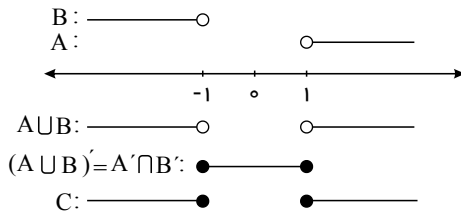
$$(-2a - 1, b) \cup (b, a) = (-3, -\frac{2}{3}) \cup \left(-\frac{2}{3}, 1\right)$$

$$= (-3, 1) - \left\{-\frac{2}{3}\right\}$$

پس:

۴ - گزینه ۳ می‌دانیم: $A' \cap B' = (A \cup B)'$

با رسم مجموعه‌ها روی محور اعداد داریم:



$$(A' \cap B') \cap C = \{-1, 1\} \rightarrow \text{عضو صحیح } ۲$$

۵ - گزینه ۲ می‌دانیم: $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$

با توجه به صوت سؤال داریم:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) \Rightarrow ۳۰ = ۱۵ + n(B) - ۳ \Rightarrow n(B) = ۱۸$$

$$n(B - A) = n(B) - n(A \cap B) = ۱۸ - ۳ = ۱۵$$

۶ - گزینه ۴

$$A_1 = (-n, n) \Rightarrow \begin{cases} A_1 = (-1, 1) \\ A_2 = (-2, 2) \\ A_3 = (-3, 3) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A_1 \cup A_2 \cup A_3 = A_3 = (-3, 3) \\ A_1 \cap A_2 = A_1 = (-1, 1) \end{cases}$$

$$(A_1 \cup A_2 \cup A_3) - (A_1 \cap A_2) = (-3, 3) - (-1, 1) = (-3, -1] \cup [1, 3)$$

۷ - گزینه ۳

$$A_1 = (0, 2)$$

$$A_2 = \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$$

$$A_3 = \left(\frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right) \Rightarrow A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{10} = \left(\frac{9}{10}, \frac{11}{10}\right)$$

⋮

$$A_{10} = \left(\frac{9}{10}, \frac{11}{10}\right)$$

۸ - گزینه ۲ می‌دانیم: $A' = U - A$

$$\begin{cases} U = \mathbb{Z} \\ A = \{n \in \mathbb{N} \mid 1 - n \leq 1\} \Rightarrow A = \{n \in \mathbb{N} \mid n \geq 0\} \Rightarrow A = \mathbb{N} \\ 1 - n \leq 1 \Rightarrow -1 \leq n \Rightarrow n \geq 0 \\ B = \{2, 3\} \end{cases}$$

$$\begin{cases} A' = U - A = \mathbb{Z} - \mathbb{N} = \{\dots, -2, -1, 0\} \\ B = \{2, 3\} \end{cases} \Rightarrow B - A' = \{2, 3\} \Rightarrow n(B - A') = 2$$

۹ - گزینه ۳

می‌دانیم: در مجموعه مرجع U متمم A را با A' نشان می‌دهیم و داریم: $A' = U - A$

بررسی گزینه‌ها:

$$۱) W' - Z' = (\mathbb{R} - W) - (\mathbb{R} - Z) = \mathbb{R} - W - \mathbb{R} + Z = Z - W = \{-k \mid k \in \mathbb{N}\}$$

$$۲) N' - W' = (\mathbb{R} - N) - (\mathbb{R} - W) = \mathbb{R} - N - \mathbb{R} + W = W - N = \{0\}$$

$$۳) Q' \cup N \subseteq W \Rightarrow Q' \cup N \subseteq N \cup \{0\} \Rightarrow Q' \subseteq \{0\} \text{ نادرست}$$

$$۴) Q - W \subseteq N' \Rightarrow Q - W \subseteq \mathbb{R} - N \Rightarrow Q - N - \{0\} \subseteq \mathbb{R} - N \Rightarrow Q - \{0\} \subseteq \mathbb{R}$$

۱۰ - گزینه ۱ می‌دانیم: $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$

$$n(A - B) = n(A) - n(A \cap B)$$

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) + n(A \cap B) = n(B) + \underbrace{n(A) - n(A \cap B)}_{n(A-B)} \Rightarrow n(A \cup B) = n(B) + n(A - B)$$

$$\Rightarrow ۳۲ = n(B) + ۹ \Rightarrow n(B) = ۲۳$$

۱۱ - گزینه ۴ حاصل هر گزینه را بدست می آوریم و با بررسی گزینه‌ها داریم:

$$\begin{aligned}
 1) \quad & [-2, 5] \cap (2, 5] = (2, 5] \xrightarrow{\text{اعداد طبیعی موجود در این بازه}} \{3, 4\} \\
 2) \quad & [0, 3] \cup (1, 5] = [0, 5] \xrightarrow{\text{اعداد طبیعی موجود در این بازه}} \{1, 2, 3, 4\} \\
 3) \quad & [1, 2] \cup (3, 6] = [1, 6] - [2, 3] \xrightarrow{\text{اعداد طبیعی موجود در این بازه}} \{1, 4, 5, 6\} \\
 4) \quad & (0, 6] \cap [1, 7] = [1, 6] \xrightarrow{\text{اعداد طبیعی موجود در این بازه}} \{1, 2, 3, 4, 5\}
 \end{aligned}$$

۱۲ - گزینه ۳ A_1 مجموعه همه اعداد طبیعی است که مربع آنها از ۲۰ بیشتر است؛ یعنی: $\{6, 7, 8, \dots\}$ پس نامتناهی است.

۲ A_2 مجموعه اعداد اول بیشتر از ۱۰۰۰ است. پس مجموعه‌ای بی انتها است و نامتناهی است.

۳ A_3 مجموعه اعداد طبیعی بیش از ۹ و کمتر از ۱۰۰ است. یعنی: $\{10, 11, \dots, 99\}$ پس متناهی است. (اعضای آن قابل شمارش هستند)

۴ A_4 مجموعه اعداد حقیقی کوچکتر از ۱۰۰ هستند؛ پس تعداد آن بی شمار است. (به تعداد نقاط روی محور اعداد و قبل از ۱۰۰ فکر کنید)

۱۳ - گزینه ۴ π عددی گنگ است. پس $\frac{\pi}{3}$ نیز گنگ است.

۲ $\sqrt{50}$ عددی گنگ است. پس $-\sqrt{50}$ نیز گنگ است.

۳ π گنگ است؛ جذر آن هم گنگ است.

۴ $1/817817000$ را می توان بصورت $1/\sqrt{817}$ نوشت و اعداد اعشاری متناوب گنگ نیستند.

۱۴ - گزینه ۴ به گزینه‌ها توجه کنید:

۱) دو مجموعه‌ی نامتناهی می توانند با هم هیچ اشتراکی نداشته باشند؛ یعنی اشتراک آن‌ها تهی باشد که متناهی است. (نادرست)

۲) دو مجموعه‌ی نامتناهی می توانند با هم برابر باشند و تفاضلشان تهی باشد که متناهی است. (نادرست)

۳) اگر A تهی باشد، A زیرمجموعه‌ی همه‌ی مجموعه‌هاست. یعنی B می تواند متناهی یا نامتناهی باشد.

۴) اگر $A \subseteq B$ ، آنگاه $A \cap B = A$ خواهد بود. طبق متن گزینه‌ی A نامتناهی است و B مجموعه‌ای است که آن را در برگرفته است؛ پس B الزاماً نامتناهی است.

۱۵ - گزینه ۳

$$\underbrace{A}_{\text{متناهی}} \cap (B - C) = \text{متناهی}$$

$$\underbrace{A}_{\text{متناهی}} \cup (B - C) = \text{نامشخص}$$

گزینه‌ی ۱) اشتراک یک مجموعه‌ی متناهی با هر مجموعه‌ای، متناهی است.

گزینه‌ی ۲) اجتماع یک مجموعه‌ی متناهی با هر مجموعه‌ای ممکن است متناهی یا نامتناهی باشد:

گزینه‌ی ۳)

$$\underbrace{B}_{\text{نامتناهی}} - \underbrace{(A \cap B)}_{\text{متناهی}} = \text{نامتناهی}$$

گزینه‌ی ۴)

$$\underbrace{(A \cup C)}_{\text{نامشخص}} \cap \underbrace{(B \cup C)}_{\text{نامتناهی}} = \text{نامشخص}$$

۱۶ - گزینه ۲ می دانیم: $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$

$$\begin{aligned}
 3n(A) = 2n(B) = 5n(A \cap B) &\Rightarrow \begin{cases} n(A) = \frac{5}{3}n(A \cap B) \\ n(B) = \frac{5}{2}n(A \cap B) \end{cases} \\
 \frac{n(A) - n(A \cap B)}{n(A) + n(B) - n(A \cap B)} &= \frac{\frac{5}{3}n(A \cap B) - n(A \cap B)}{\frac{5}{3}n(A \cap B) + \frac{5}{2}n(A \cap B) - n(A \cap B)} \\
 &= \frac{\frac{2}{3}n(A \cap B)}{\frac{19}{6}n(A \cap B)} = \frac{4}{19}
 \end{aligned}$$

۱۷ - گزینه ۲ بررسی گزینه‌ها:

الف) مجموعه پرنده‌های موجود در کره زمین: متناهی

ب) $\mathbb{Z} - \mathbb{N}$: نامتناهی

پ) مجموعه خطوطی که محور x ها را در طول 2 قطع کرده‌اند؛ بی نهایت خط می‌تواند محور x ها را در 2 قطع کند: نامتناهی

ت) مجموعه اعداد حقیقی موجود در بازه $[-1, 1]$: نامتناهی

$$\begin{cases} 3^{-x} > \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{1}{3^x} > \frac{1}{3} \Rightarrow x < 1 \Rightarrow A = \emptyset \\ x \in \mathbb{N} \end{cases}$$

۱۸ - گزینه ۳

(a) دقت کنید که شکل مستطیل است $2 \times 5 + 2 \times 1,5x = 10 + 3x$ محیط شکل

(b) محیط شکل $= 1,5x + (x + 2) + (x + 2) + 1,5x + x = 6x + 4$

مسئله (a) محیط شکل $>$ محیط شکل $(b) \Rightarrow 10 + 3x > 6x + 4 \Rightarrow 10 - 4 > 6x - 3x$

$$\Rightarrow 3x < 6 \xrightarrow{\div 3} x < 2$$

اما: x ها باید مثبت باشند که طول ضلع منفی تولید نکنند. پس: $0 < x < 2$

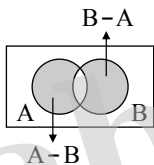
۱۹ - گزینه ۱

$$\begin{aligned} (A \cup (A \cap B))' \cap ((B \cap A) \cup (B - A)) &= (A' \cap (A \cap B)') \cap (B \cap (A \cup A')) \\ &= (A' \cap (A' \cup B')) \cap (B \cap M) = A' \cap (A' \cup B') \cap B \\ &= A' \cap ((A' \cup B') \cap B) = A' \cap ((A' \cap B) \cup (B' \cap B)) \\ &= A' \cap (A' \cap B) = \underbrace{(A' \cap A')}_{A'} \cap B = A' \cap B = A' - B' \end{aligned}$$

۲۰ - گزینه ۱

$$\begin{aligned} (A - B)' \cap (A \cup B) \cap A' &= (A \cap B')' \cap (A \cup B) \cap A' \\ &= (A' \cup B) \cap (A \cup B) \cap A' = \underbrace{(B \cup \emptyset)}_B \cap A' = B \cap A' = B - A \end{aligned}$$

۲۱ - گزینه ۴

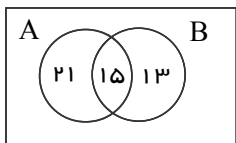


A و B را روی نمودار ون ببینید: $A - B$ و $B - A$ هیچ عضو مشترکی ندارند، پس وقتی $B - A$ را از $A - B$ کم می‌کنیم، چیزی از $A - B$ کم نمی‌شود و $A - B$ تغییری نمی‌کند.

$$(A - B) - (B - A) = A - B \quad \text{در نتیجه: از طرفی:}$$

$$(A \cap B') - (B - A) = (A - B) - (B - A) = A - B$$

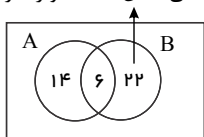
۲۲ - گزینه ۳ طبق فرض، پیش از تغییر، اعضا به صورت زیر توزیع شده بودند:



۱۶ عضو از A برداشته‌ایم که ۹ عضو آن در اشتراک دو مجموعه حضور داشته‌اند، پس ۹ عضو از اشتراک کم می‌شود و ۷ عضو هم از باقیمانده A :

$$13 + 9 = 22$$

از مجموعه‌ی B عضوی کم نشده است یعنی همان ۲۲ عضو را دارد

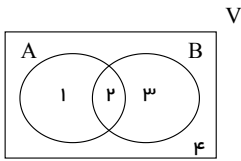


دقت: از B چیزی حذف نشده. بنابراین تعداد آن نباید تغییر کند.

حال تعداد اعضای اجتماع دو مجموعه را در وضعیت جدید محاسبه می‌کنیم:

$$n(A \cup B) = 14 + 6 + 22 = 42$$

۲۳ - گزینه ۳ راه حل اول: با شماره گذاری نمودار ون داریم:



مجموعه	اعداد مربوط	تعداد
V	1, 2, 3, 4	50
B	2, 3	35
A' ∪ B'	1, 3, 4	30
A'	3, 4	20

$50 \Rightarrow 1, 4: 15$
 $35 \Rightarrow 1, 2, 3: 45$
 $30 \Rightarrow 1: 10$
 $20 \Rightarrow 1, 2, 3: 45$

راه حل دوم:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

$$n(A \cap B) = n(U) - n(A' \cup B') = 50 - 30 = 20$$

$$n(A) = n(U) - n(A') = 50 - 20 = 30$$

$$\rightarrow n(A \cup B) = 30 + 35 - 20 = 45$$

۲۴ - گزینه ۱

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) \Rightarrow n(A \cup B) = n(A) + 8 + n(B) - (n(A \cap B) + 6)$$

$$= n(A) + n(B) - n(A \cap B) + 8 - 6 = 14 + 8 - 6 = 16$$

$n(A \cup B) = 14$

$$n(A - B) = n(A) - n(A \cap B)$$

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

۲۵ - گزینه ۱ می دانیم:

$$n(A - B) = n(A) - n(A \cap B) \Rightarrow 3 = n(A) - 5 \Rightarrow n(A) = 8$$

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) \Rightarrow 13 = 8 + n(B) - 5 \Rightarrow n(B) = 10$$

$$A \cap A' = \emptyset$$

$$A \cup A' = U$$

۲۶ - گزینه ۳ می دانیم:

$$(A \cap A') \cap ((A \cap B) \cap B') = \emptyset \cap (A \cap B \cap B') = \emptyset \cap (A \cap \emptyset) = \emptyset \cap \emptyset = \emptyset$$

بررسی گزینه ها:

$$۱) (A \cup A') \cup (B \cap B') = U \cup \emptyset = U$$

$$۲) (A \cup A') \cup ((A \cap B) \cap B') = U \cup (A \cap B \cap B') = U \cup (A \cap \emptyset) = U \cup \emptyset = U$$

$$۳) (A \cup A') \cap ((A \cap B) \cap B') = U \cap (A \cap B \cap B') = U \cap (A \cap \emptyset) = U \cap \emptyset = \emptyset$$

$$۴) (B \cup B') \cup ((A \cap B) \cap B') = U \cup (A \cap B \cap B') = U \cup (A \cap \emptyset) = U \cup \emptyset = U$$

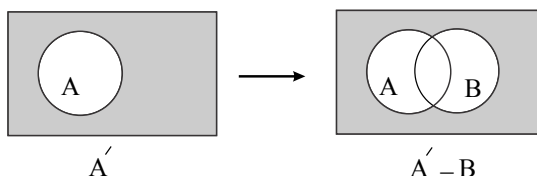
۲۷ - گزینه ۱

$$\left. \begin{array}{l} C - A = \emptyset \\ A \cap B = \emptyset \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} C = \mathbb{W} \\ A = \mathbb{Z} \\ B = \mathbb{Q}' \end{array} \right.$$

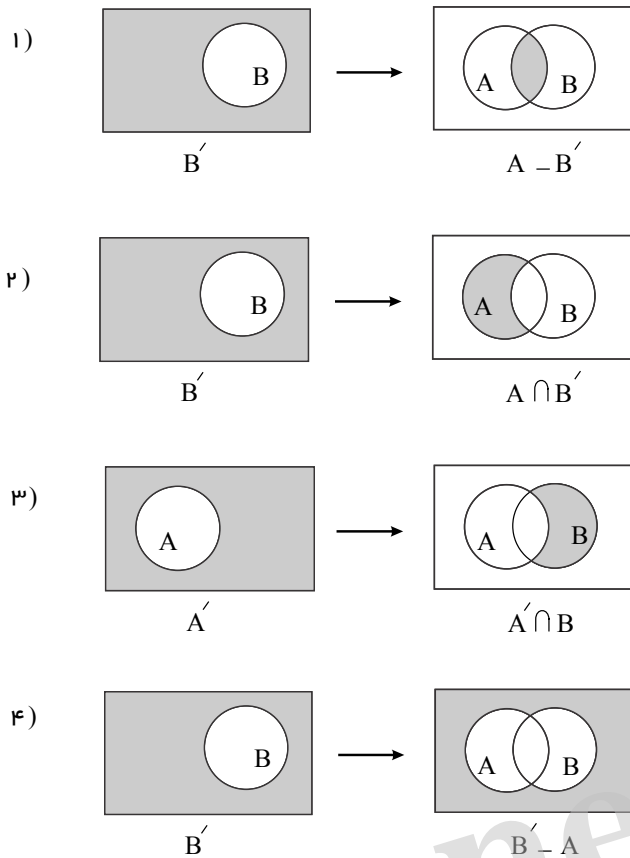
$$A - (B \cup C) = \mathbb{Z} - (\mathbb{Q}' \cup \mathbb{W}) = \{\dots, -2, -1\}$$

پس:

۲۸ - گزینه ۴ مجموعه $A' - B$ را روی نمودار ون ببینید:



حالا گزینه ها را روی نمودار ون بررسی می کنیم:

۲۹ - گزینه ۱ اگر تعداد دانش آموزان کلاس را x فرض کنیم فیزیک را با E ، ریاضی را با R نشان می دهیم، داریم:

$$n(R) = \frac{4}{5}x$$

$$n(F) = \frac{3}{5}x$$

$$n(R \cap F) = \frac{1}{2}x$$

$$n(R \cup F) = 36$$

$$n(R \cup F) = n(R) + n(F) - n(R \cap F)$$

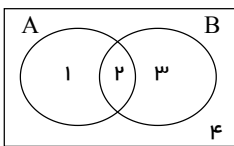
$$36 = \frac{4}{5}x + \frac{3}{5}x - \frac{1}{2}x \Rightarrow 36 = \frac{8+6-5}{10}x \Rightarrow 36 = \frac{9}{10}x \Rightarrow x = 40$$

تعداد دانش آموزانی که در هر دو درس قبول شده اند.

$$n(R \cup F)' = n(U) - n(R \cup F) = 40 - 36 = 4$$

۳۰ - گزینه ۲

با شماره گذاری نمودار ون، داریم:



$$[(A \cap B) \cup (A \cap (A' \cup B'))]'$$

$\underbrace{\quad}_{2} \quad \underbrace{\quad}_{1,2} \quad \underbrace{\quad}_{1,3,4}$
 $\underbrace{\quad}_{1}$
 $[1,2]' = A'$