پاسخنامه تشریحی

۱ ـ گزینه ۳ برای این منظور باید نامعادله‌ی $-x^{۲}-\frac{۱}{۲}x+\frac{۹}{۲}>۲x+|x|$ را حل می‌کنیم.

$$x\geq ۰\rightarrow -x^{۲}-\frac{۱}{۲}x+\frac{۹}{۲}>۲x+x\rightarrow x^{۲}+\frac{۷}{۲}x-\frac{۹}{۲}<۰$$

x	$-\infty$	$-\frac{۹}{۲}$	۱	$+\infty$
عبارت <۰	$+$	۰	$-$	۰ $+$

$$\rightarrow \frac{-۹}{۲}<x<۱\xrightarrow{\text{اشتراک با شرط}}۰\leq x<۱ \qquad (I)$$

$$x<۰\rightarrow -x^{۲}-\frac{۱}{۲}x+\frac{۹}{۲}>۲x-x\rightarrow x^{۲}+\frac{۳}{۲}x-\frac{۹}{۲}<۰$$

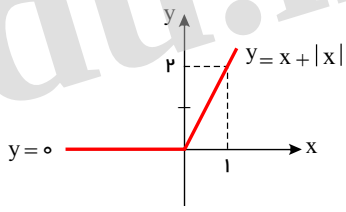
x	$-\infty$	-۳	$\frac{۳}{۲}$	$+\infty$
عبارت <۰	$+$	۰	$-$	۰ $+$

$$\rightarrow -۳<x<\frac{۳}{۲}\xrightarrow{\text{اشتراک با شرط}}-۳<x<۰ \qquad (II)$$

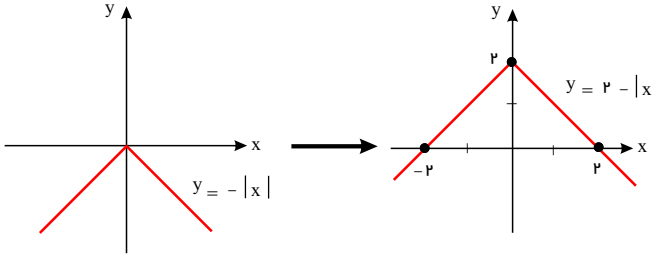
از اجتماع I و II به جواب $-۳<x<۱$ می‌رسیم که طول نقطه‌ی وسط بازه $\frac{-۳+۱}{۲}=-۱$ است.

۲ ـ گزینه ۳

$$y=x+|x|\rightarrow\begin{cases}x\geq ۰\rightarrow y=x+x\rightarrow y=۲x, & A\left|\begin{matrix}۰\\۰\end{matrix}\right. \quad B\left|\begin{matrix}۱\\۲\end{matrix}\right.\\ x<۰\rightarrow y=x-x\rightarrow y=۰\end{cases}$$

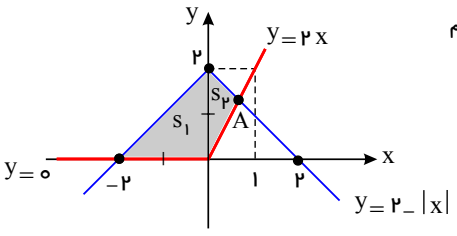


$$y=۲-|x|\rightarrow$$



حال، کافی است این دو شکل را با هم رسم کنیم. برای پیدا کردن طول نقطه A، کافی است که خط $y=۲x$ و $y=۲-x$ را با هم تلاقی دهیم.

$$۲x=۲-x\rightarrow ۳x=۲\rightarrow x_A=\frac{۲}{۳}$$



$$S_{۱}=\frac{۲\times ۲}{۲}=۲\ ,\quad S_{۲}=\frac{\frac{۲}{۳}\times ۲}{۲}=\frac{۲}{۳}\rightarrow S_{\text{کل}}=۲+\frac{۲}{۳}=\frac{۸}{۳}$$

۳ ـ گزینه ۲ می‌دانیم که $\left|\frac{f}{g}\right|=\frac{|f|}{|g|}$ است.

$$\frac{|۲-x|}{|۲x-۳|}>۱\rightarrow |۲-x|>|۲x-۳|\xrightarrow{\text{توان۲}}۴+x^{۲}-۴x>۴x^{۲}+۹-۱۲x$$

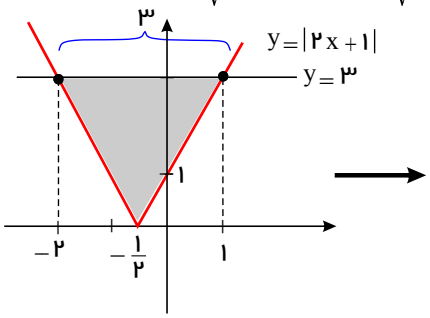
$$\rightarrow ۳x^{۲}-۸x+۵<۰\xrightarrow{\text{تعیین علامت}}۱<x<\frac{۵}{۳}$$

abadgaranedu.ir

ولی دقت کنید که $x=\frac{۳}{۲}$ مخرج کسر را صفر می‌کند و از مجموعه‌ی جواب باید حذف شود و جواب به صورت $(۱,\frac{۳}{۲})\cup(\frac{۳}{۲},\frac{۵}{۳})$ در می‌آید.

۴ ـ گزینه ۳

$$gof(x)=g\left(f(x)\right)=\sqrt{۴(x^۲+x)+۱}=\sqrt{۴x^۲+۴x+۱}=\sqrt{(۲x+۱)^۲}=|۲x+۱|$$

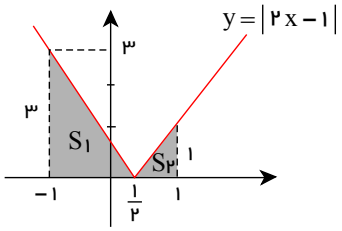


$$S=\frac{۳\times ۳}{۲}=\frac{۹}{۲}=۴٫۵$$

دقت کنید که نقاطی به طولهای $x=۱$ و $x=-۲$ از تلاقی تابع $y=|۲x+۱|$ با خط $y=۳$ بدست آمده‌اند.

$$|۲x+۱|=۳\rightarrow\begin{cases}۲x+۱=۳\rightarrow ۲x=۲\rightarrow x=۱\\ ۲x+۱=-۳\rightarrow ۲x=-۴\rightarrow x=-۲\end{cases}$$

۵ ـ گزینه ۳ نمودار تابع داده شده را رسم می‌کنیم.



$$\rightarrow\begin{cases}S_۱=\frac{\frac{۳}{۲}\times ۳}{۲}=\frac{۹}{۴}\\ S_۲=\frac{\frac{۱}{۲}\times ۱}{۲}=\frac{۱}{۴}\end{cases}\rightarrow S_{کل}=\frac{۹}{۴}+\frac{۱}{۴}=\frac{۵}{۲}$$

۶ ـ گزینه ۱ روش اول:

$$\left|\frac{x-۲}{۲x+۱}\right|>۱\rightarrow\frac{|x-۲|}{|۲x+۱|}>۱\rightarrow|x-۲|>|۲x+۱|\xrightarrow{\text{توان ۲}}(x-۲)^۲>(۲x+۱)^۲$$

$$\rightarrow(x-۲)^۲-(۲x+۱)^۲>۰\xrightarrow{\text{مزدوج}}((x-۲)+(۲x+۱))((x-۲)-(۲x+۱))>۰$$

$$\rightarrow(۳x-۱)(-x-۳)>۰\xrightarrow{\text{تعیین علامت}}-۳<x<\frac{۱}{۳}$$

در ضمن x نباید $-\frac{۱}{۲}$ باشد زیرا مخرج را صفر می‌کند پس $x\in(-۳,-\frac{۱}{۲})\cup(-\frac{۱}{۲},\frac{۱}{۳})$ می‌باشد.

روش دوم:

به جای حل کردن عدد گذاری می‌کنیم. $x=۰$ و $x=-۲$ در نامعادله صدق می‌کنند که فقط هر دو در گزینه‌ی ۱ می‌باشند.

۷ ـ گزینه ۴

روش اول:

$$\begin{cases}|x|<۲\Rightarrow -۲<x<۲\quad(۱)\\ (۲x-۱)<|x|\Rightarrow\begin{cases}x\geq ۰:۲x-۱<x\Rightarrow x<۱\xrightarrow{\text{اشتراک با شرط}}۰\leq x<۱\\ x<۰:۲x-۱<-x\Rightarrow ۳x<۱\Rightarrow x<\frac{۱}{۳}\xrightarrow{\text{اشتراک با شرط}}x<۰\end{cases}\xrightarrow{\text{اجتماع}}x<۱\quad(۲)\end{cases}$$

از اشتراک روابط ۱ و۲ به جواب $-۲<x<۱$ می‌رسیم.

روش دوم:

تست را به روش عدد گذاری حل می‌کنیم.

$x=۱\rightarrow\begin{cases}۱<۲\ \checkmark\\ ۲-۱<۱\ \times\end{cases}\rightarrow$ گزینه‌های ۲ و ۳ که شامل $x=۱$ می‌باشند حذف می‌شوند.

$x=-۱\rightarrow\begin{cases}۱<۲\ \checkmark\\ -۲-۱<۱\ \checkmark\end{cases}\rightarrow$ گزینه ۱ شامل $x=-۱$ نمی‌باشد حذف می‌شود.

۸ ـ گزینه ۲ نامساوی مثلثی برای n عدد وقتی به تساوی تبدیل می‌شود که همگی هم‌علامت باشند.

$$|x_۱+x_۲+x_۳+\cdots+x_n|\leq|x_۱|+|x_۲|+|x_۳|+\cdots+|x_n|$$

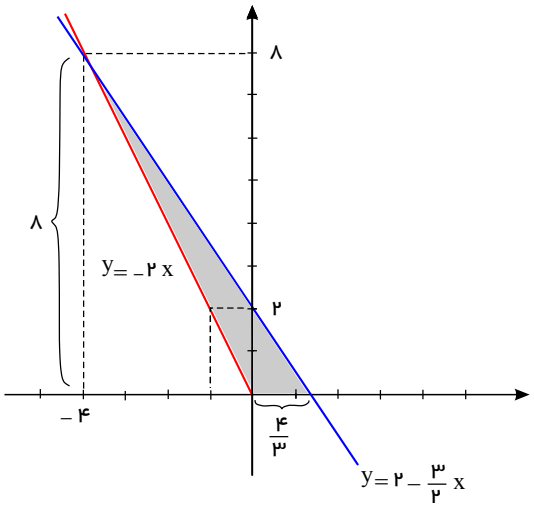
abadgaranedu.ir

همگی هم علامت باشند
$\longrightarrow |x_۱ + x_۲ + \cdots + x_n| = |x_۱| + |x_۲| + \cdots + |x_n|$

۹ ـ گزینه ۳

$$y = |x| - x = \begin{cases} x - x & x \geq ۰ \\ -x - x & x < ۰ \end{cases} = \begin{cases} ۰ & x \geq ۰ \\ -۲x & x < ۰ \end{cases}$$

خط افقی $y = ۰$ را به شرط $x \geq ۰$ و خط $y = -۲x$ با شرط $x < ۰$ رسم می‌کنیم. برای رسم خط $y = -۲x$ دو نقطه‌ی دلخواه $\begin{vmatrix} -۱ \\ ۲ \end{vmatrix}$ و $\begin{vmatrix} ۰ \\ ۰ \end{vmatrix}$ را روی آن در نظر می گیریم و برای رسم خط $y = ۲ - \frac{۳}{۲}x$ دو نقطه‌ی دلخواه $\begin{vmatrix} ۰ \\ ۲ \end{vmatrix}$ و $\begin{vmatrix} \frac{۴}{۳} \\ ۰ \end{vmatrix}$ را روی آن در نظر می گیریم.



$$\Rightarrow S = \frac{۸ \times \frac{۴}{۳}}{۲} = \frac{۱۶}{۳}$$

دقت کنید برای پیدا کردن محل برخورد دو خط به معادلات $y = -۲x$ و $y = ۲ - \frac{۳}{۲}x$ ، آنها را تلاقی می‌دهیم.

$$۲ - \frac{۳}{۲}x = -۲x \xrightarrow{\times ۲} ۴ - ۳x = -۴x \rightarrow x = -۴$$

و x بدست آمده را در معادلات یکی از دو خط، قرار دهیم، عرض نقطه‌ی تلاقی -۸ می‌شود.

۱۰ ـ گزینه ۳

$$f(x) = \sqrt{x + |x + ۲|} \Rightarrow f(-x) = \sqrt{-x + |-x + ۲|} = \sqrt{|x - ۲| - x}$$

برای پیدا کردن دامنه‌ی تعریف باید زیر رادیکال را بزرگ‌تر مساوی صفر قرار دهیم یعنی: $|x - ۲| - x \geq ۰$

$$\left.\begin{array}{l} x \geq ۲ : x - ۲ - x \geq ۰ \Rightarrow -۲ \geq ۰ \Rightarrow \varnothing \xrightarrow{\text{اشتراک با شرط}} \varnothing \\ x < ۲ : -x + ۲ - x \geq ۰ \Rightarrow -۲x \geq -۲ \Rightarrow x \leq ۱ \xrightarrow{\text{اشتراک با شرط}} x \leq ۱ \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{اجتماع}} x \leq ۱$$

۱۱ ـ گزینه ۲ روش اول :

قدرمطلق را تعیین علامت می‌کنیم:

$$x \geq ۲ \Rightarrow x^۲ - ۲x < x - ۲ \Rightarrow x^۲ - ۳x + ۲ < ۰ \Rightarrow (x - ۱)(x - ۲) < ۰$$
$$\xrightarrow{\text{تعیین علامت}} ۱ < x < ۲ \xrightarrow{\text{اشتراک با شرط}} \varnothing \quad (I)$$
$$x < ۲ \Rightarrow x^۲ - ۲x < -x + ۲ \Rightarrow x^۲ - x - ۲ < ۰ \Rightarrow (x - ۲)(x + ۱) < ۰$$
$$\xrightarrow{\text{تعیین علامت}} -۱ < x < ۲ \xrightarrow{\text{اشتراک با شرط}} -۱ < x < ۲ \quad (II)$$
$$(I) \cup (II) : -۱ < x < ۲$$

روش دوم:

نامعادله را به روش عدد گذاری حل می‌کنیم.

$x = ۰ \xrightarrow{\text{نامعادله}}$ درست است(گزینه‌های ۳ و ۴ حذف می‌شوند) $۰ < ۲$

$x = ۱ \xrightarrow{\text{نامعادله}}$ درست است (گزینه‌ی ۱ حذف می‌شود) $-۱ < ۱$

abadgaranedu.ir

۱۲ ـ گزینه ۴

روش اول:

$$۲x+۱-|x-۲|>|\underbrace{x^۲+۱}_{+}|\to ۲x+۱-|x-۲|>x^۲+۱$$

$$x\geq ۲: ۲x+۱-(x-۲)>x^۲+۱\to ۲x+۱-x+۲>x^۲+۱\to x^۲-x-۲<۰\to (x-۲)(x+۱)<۰$$

$$\xrightarrow{\text{تعیین علامت}} -۱<x<۲ \xrightarrow{\text{اشتراک با شرط}} \varnothing \quad (I)$$

$$x<۲: ۲x+۱-(-x+۲)>x^۲+۱\to ۲x+۱+x-۲>x^۲+۱\to x^۲-۳x+۲<۰\to (x-۱)(x-۲)<۰$$

$$\xrightarrow{\text{تعیین علامت}} ۱<x<۲ \xrightarrow{\text{اشتراک با شرط}} ۱<x<۲ \quad (II)$$

از اجتماع جواب‌های I و II به جواب $۱<x<۲$ یا $x\in(۱,۲)$ می‌رسیم.

روش دوم:

در نامعادله‌ی داده شده به جای x، عدد صفر قرار می‌دهیم.

$$x=۰\to ۰+۱-۲>۱\to -۱>۱$$

به نتیجه‌ی غلطی رسیدیم، پس گزینه‌های ۱و۲و۳ که همگی شامل صفر هستند حذف می‌شوند و گزینه‌ی چهارم، جواب صحیح است.

۱۳ ـ گزینه ۳ داخل قدرمطلق را تعیین علامت می‌کنیم.

$$x\geq ۰\to x+x\leq \frac{۱}{۲}x+۳\to ۲x\leq \frac{۱}{۲}x+۳\to ۴x\leq x+۶$$

$$\to ۳x\leq ۶\to x\leq ۲ \xrightarrow{\text{اشتراک با شرط}} ۰\leq x\leq ۲ (I)$$

$$x<۰\to x-x\leq \frac{۱}{۲}x+۳\to ۰\leq \frac{۱}{۲}x+۳\to ۰\leq x+۶$$

$$\to x\geq -۶ \xrightarrow{\text{اشتراک با شرط}} -۶\leq x<۰ \quad (II)$$

از اجتماع جواب‌های I و II به جواب $-۶\leq x\leq ۲$ یا $x\in[-۶,۲]$ می‌رسیم.

۱۴ ـ گزینه ۱ روش اول:

$$\left|\frac{۲x-۵}{x+۲}\right|>۳\to \frac{|۲x-۵|}{|x+۲|}>۳\to |۲x-۵|>۳|x+۲| \xrightarrow{\text{توان ۲}} ۴x^۲-۲۰x+۲۵>۹x^۲+۳۶x+۳۶$$

$$\to ۵x^۲+۵۶x+۱۱<۰\to \Delta=b^۲-۴ac=۳۱۳۶-۲۲۰=۲۹۱۶\to \begin{cases} x=\dfrac{-۵۶+۵۴}{۱۰}=-\dfrac{۱}{۵} \\ x=\dfrac{-۵۶-۵۴}{۱۰}=-۱۱ \end{cases}$$

x	$-\infty$		-۱۱		$-\frac{۱}{۵}$		$+\infty$
عبارت <۰		$+$	۰	$-$	۰	$+$	

$$\to -۱۱<x<-\frac{۱}{۵}$$

اگر $x=-۲$ باشد مخرج صفر می‌شود پس جواب $(-۱۱,-۲)\cup(-۲,\frac{-۱}{۵})$ می‌باشد.

البته دقت کنید نامعادله‌ی $|۲x-۵|>۳|x+۲|$ را می‌توان این گونه نیز حل کرد.

$$(۲x-۵)^۲>۹(x+۲)^۲\to (۲x-۵)^۲-۹(x+۲)^۲>۰\to (۲x-۵+۳(x+۲))(۲x-۵-۳(x+۲))>۰$$

$$\to (۵x+۱)(-x-۱۱)>۰ \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} -۱۱<x<-\frac{۱}{۵}\ ,\ x\neq -۲$$

روش دوم:

$x=-۲$ مخرج را صفر می‌کند پس نباید در گزینه‌ها باشد بنابراین گزینه‌های دوم و سوم حذف می‌شوند بین گزینه‌های ۱ و ۳ یک عدد انتخاب می‌کنیم که در یکی باشد و در دیگری نباشد.

پس $x=-۱۰$ باید در گزینه‌ها باشد بنابراین گزینه‌ی چهارم حذف می‌شود. $x=-۱۰\to \frac{۲۵}{۸}>۳$ **صحیح**

۱۵ ـ گزینه ۴ روش اول:

$$x>۰\to x+\frac{۱}{x}\leq ۲٫۵\to x^۲-۲٫۵x+۱\leq ۰ \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} \frac{۱}{۲}\leq x\leq ۲ \xrightarrow{\text{اشتراک با شرط}} \frac{۱}{۲}\leq x\leq ۲ \quad (I)$$

$$x<۰\to -x-\frac{۱}{x}\leq ۲٫۵\to x^۲+۲٫۵x+۱\leq ۰ \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} -۲\leq x\leq -\frac{۱}{۲} \xrightarrow{\text{اشتراک با شرط}} -۲\leq x\leq -\frac{۱}{۲} \quad (II)$$

از اجتماع I , II به جواب $[-۲,-\frac{۱}{۲}]\cup[\frac{۱}{۲},۲]$ می‌رسیم.

روش دوم: چون $x=۰$ مخرج را صفر می‌کند نباید در گزینه‌ها باشد پس گزینه‌های ۲ و ۳ حذف می‌شوند. بین گزینه‌ی ۱ و ۴ عدد $x=-۱$ را امتحان می‌کنیم (در گزینه‌ی ۴ هست ولی در گزینه‌ی ۱ نیست)

پس $x=-۱$ باید در گزینه‌ها باشد بنابراین گزینه‌ی اول حذف می‌شود. $x=-۱ \xrightarrow{\text{نامعادله}} ۲\leq ۲٫۵$ **صحیح است**

۱۶ ـ گزینه ۳ روش اول:

abadgaranedu.ir

ابتدا داخل قدرمطلق‌ها را تعیین علامت می‌کنیم.

x	$-\infty$		-۲		۵		$+\infty$
$x+۲$		$-$	۰	$+$		$+$	
$x-۵$		$-$		$-$	۰	$+$	

$$x < -۲ : -x-۲-x+۵ < ۶ \to -۲x < ۳ \to x > -\frac{۳}{۲} \xrightarrow{\text{اشتراک با شرط}} \varnothing$$

$$-۲ \le x \le ۵ : x+۲-x+۵ < ۶ \to ۷ < ۶ \xrightarrow{\text{اشتراک با شرط}} \varnothing \quad \text{امکان ندارد}$$

$$x > ۵ : x+۲+x-۵ < ۶ \to ۲x < ۹ \to x < \frac{۹}{۲} \xrightarrow{\text{اشتراک با شرط}} \varnothing$$

بنابراین مجموعه‌ی جواب این نامعادله، تهی می‌باشد.

روش دوم:

واضح است که $|x-۵| = |۵-x|$ و می دانیم طبق نامساوی مثلثی $|a+b| \le |a|+|b|$

پس: $|x+۲|+|۵-x| \ge |x+۲+۵-x| \to |x+۲|+|۵-x| \ge ۷$

پس امکان ندارد که $|x+۲|+|۵-x| < ۶$ باشد بنابراین این نامعادله جواب ندارد.

۱۷ ـ گزینه ۴ زیر رادیکال باید بزرگ‌تر مساوی صفر باشد یعنی: $x^۲ + |x| - ۲ \ge ۰$

$$x \ge ۰ \to x^۲+x-۲ \ge ۰ \to (x+۲)(x-۱) \ge ۰ \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} x \le -۲ \text{ یا } x \ge ۱ \xrightarrow{\text{اشتراک با شرط}} x \ge ۱ \quad (I)$$

$$x < ۰ \to x^۲-x-۲ \ge ۰ \to (x-۲)(x+۱) \ge ۰ \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} x \le -۱ \text{ یا } x \ge ۲ \xrightarrow{\text{اشتراک با شرط}} x \le -۱ \quad (II)$$

از اجتماع جواب‌های I , II به جواب $x \le -۱$ یا $x \ge ۱$ یا همان $R-(-۱,۱)$ می‌رسیم.

۱۸ ـ گزینه ۴

$$x \ge \frac{۵}{۳} \to x+۳x-۵ < ۸ \to ۴x < ۱۳ \to x < \frac{۱۳}{۴} \xrightarrow{\text{اشتراک با شرط}} \frac{۵}{۳} \le x < \frac{۱۳}{۴} \xrightarrow{\text{اجتماع}} \frac{-۳}{۲} < x < \frac{۱۳}{۴}$$

$$x < \frac{۵}{۳} \to x-۳x+۵ < ۸ \to -۲x < ۳ \to x > -\frac{۳}{۲} \xrightarrow{\text{اشتراک با شرط}} -\frac{۳}{۲} < x < \frac{۵}{۳}$$

۱۹ ـ گزینه ۳ روش اول:

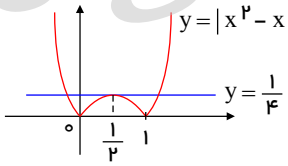
کافی است دو تابع $y = |x^۲ - x|$ و $y = \frac{۱}{۴}$ را تلاقی دهیم.

$$|x^۲-x| = \frac{۱}{۴} \to \begin{cases} x^۲-x = \frac{۱}{۴} \to x^۲-x-\frac{۱}{۴} = ۰ \to \frac{c}{a} < ۰ \to \text{دو ریشه‌ی متمایز مختلف العلامت دارد} \\ x^۲-x = -\frac{۱}{۴} \to x^۲-x+\frac{۱}{۴} = ۰ \to \Delta = b^۲-۴ac = ۱-۱ = ۰ \text{ یک ریشه‌ی مضاعف دارد} \end{cases}$$

پس این دو تابع در سه نقطه همدیگر را قطع می‌کنند.

روش دوم:

توابع $y = |x^۲ - x|$ و $y = \frac{۱}{۴}$ را رسم کنید.



۲۰ ـ گزینه ۳ باید نامعادله‌ی $|x^۲ - x| < ۲x - |x|$ را حل کنیم. برای این منظور داخل قدرمطلق‌ها را تعیین علامت می‌کنیم.

x	$-\infty$		۰		۱		$+\infty$
$x^۲-x$		$+$	۰	$-$	۰	$+$	
x		$-$	۰	$+$		$+$	

$$x < ۰ \to x^۲-x < ۲x+x \to x^۲-۴x < ۰ \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} ۰ < x < ۴ \xrightarrow{\text{اشتراک با شرط}} \varnothing \quad (I)$$

$$۰ \le x \le ۱ \to -x^۲+x < ۲x-x \to x^۲ > ۰ \to x \ne ۰ \xrightarrow{\text{اشتراک با شرط}} ۰ < x \le ۱ \quad (II)$$

$$x > ۱ \to x^۲-x < ۲x-x \to x^۲-۲x < ۰ \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} ۰ < x < ۲ \xrightarrow{\text{اشتراک با شرط}} ۱ < x < ۲ \quad (III)$$

از اجتماع جواب‌های I , II , III به جواب $۰ < x < ۲$ یا $(۰,۲)$ می‌رسیم.

abadgaranedu.ir