پاسخنامه تشریحی

۱ ـ گزینه ۲

$$mx - 3\sqrt{x} + m - 2 = 0 \Rightarrow m(\sqrt{x})^2 - 3\sqrt{x} + m - 2 = 0 \; (I)$$
$$\xrightarrow{\sqrt{x}=t} mt^2 - 3t + m - 2 = 0$$

اگر این معادله دارای یک ریشه‌ی مثبت و یک ریشه‌ی منفی باشد معادله‌ی I فقط یک ریشه دارد (زیرا امکان ندارد $\sqrt{x}$ برابر یک مقدار منفی باشد) و شرط آن‌که یک معادله‌ی درجه‌ی دوم دارای دو ریشه‌ی متمایز مختلف‌العلامت باشد آن است که $\frac{c}{a} < 0$ باشد.

$$\frac{c}{a} < 0 \Rightarrow \frac{m-2}{m} < 0 \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} 0 < m < 2$$

دقت کنید اگر معادله‌ی $mt^2 - 3t + m - 2 = 0$ دارای یک ریشه‌ی مضاعف مثبت باشد، نیز معادله‌ی I فقط یک جواب دارد.

$$\begin{cases} \Delta = 0 \Rightarrow b^2 - 4ac = 0 \Rightarrow 9 - 4m(m-2) = 0 \Rightarrow 4m^2 - 8m - 9 = 0 \begin{cases} m = \dfrac{2+\sqrt{13}}{2} \\ m = \dfrac{2-\sqrt{13}}{2} \end{cases} \\ \underbrace{\dfrac{-b}{2a}}_{\text{ریشه مضاعف}} > 0 \Rightarrow \dfrac{3}{2m} > 0 \Rightarrow m > 0 \end{cases}$$

پس جواب می‌شود: $\left\{\frac{2+\sqrt{13}}{2}\right\} \cup 0 < m < 2$. بنابراین گزینه‌ی دوم می‌تواند صحیح باشد.

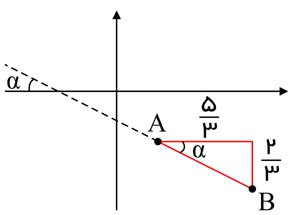
۲ ـ گزینه ۴

خط $x = 2$ محور تقارن تابع درجه‌ی دوم داده شده است.

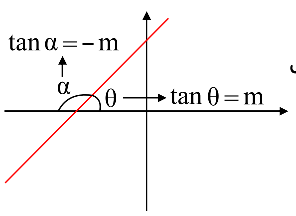
$$x = \frac{-b}{2a} \Rightarrow x = 2 = -\frac{1}{2a-2} \Rightarrow 4a - 4 = -1 \Rightarrow a = \frac{3}{4}$$
$$y = -\frac{1}{4}x^2 + x + 3 \xrightarrow[y=0]{\times(-4)} y = 0x^2 - 4x - 12 = 0 \Rightarrow (x-6)(x+2) = 0 \begin{cases} x = -2 \\ x = 6 \end{cases}$$

چون طول مثبت را خواسته پس $x = 6$ جواب مسأله است.

۳ ـ گزینه ۳



شیب خط عبارت است از تانژانت زاویه‌ای که خط با سمت راست محور طول‌ها تشکیل می‌دهد.



پس : $\tan\alpha = -m = \frac{\text{مقابل}}{\text{مجاور}} = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{5}{3}} = \frac{2}{5} \to m = -\frac{2}{5}$

۴ ـ گزینه ۲

این معادله باید دارای ۲ ریشه‌ی متمایز مثبت باشد. $x^2 = t \Rightarrow t^2 - (m+2)t + m + 5 = 0$

$$\begin{cases} \Delta > ۰ \\ \frac{c}{a} > ۰ \\ -\frac{b}{a} > ۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m^۲ + ۴ + ۴m - ۴m - ۲۰ > ۰ \\ m + ۵ > ۰ \\ m + ۲ > ۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m^۲ > ۱۶ \\ m > -۵ \\ m > -۲ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m > ۴ \ , \ m < -۴ \\ m > -۵ \\ m > -۲ \end{cases} \xrightarrow{\text{اشتراک}} m > ۴$$

۵ ـ گزینه ۱

روش اول: اگر t ریشه‌ی معادله‌ی جدید و x ریشه‌ی معادله ی قدیم باشد آن‌گاه:

$$t = \frac{۲}{x} \Rightarrow x = \frac{۲}{t} \xrightarrow{\text{معادله}} \frac{۱۶}{t^۲} - \frac{۱۴}{t} + ۳ = ۰ \xrightarrow{\times t^۲} ۱۶ - ۱۴t + ۳t^۲ = ۰ \rightarrow ۳t^۲ - ۱۴t + ۱۶ = ۰$$

$$\xrightarrow{\text{مقایسه با } ۳x^۲+ax+۱۰=۰} a = -۱۴ \ , \ b = ۱۶$$

روش دوم: ابتدا معادله‌ی درجه‌ی دومی مینویسیم که ریشه‌هایش معکوس ریشه‌های معادله‌ی درجه دوم داده شده باشد سپس معادله‌ی درجه‌ی دومی می‌نویسیم که ریشه هایش دو برابر ریشه های معادله‌ی درجه‌ی دوم بدست آمده باشد پس جای a , c را عوض کرده و سپس b را در ۲ و c را در $۲^۲$ ضرب کنیم.

$$۴x^۲ - ۷x + ۳ = ۰ \Rightarrow ۳x^۲ - ۷x + ۴ = ۰ \Rightarrow ۳x^۲ - ۱۴x + ۱۶ = ۰$$

این معادله را با $۳x^۲ + ax + b = ۰$ مقایسه می‌کنیم و داریم:

$$a = -۱۴ \ , \ b = ۱۶$$

توجه کنید ریشه‌های معادله‌ی $cx^۲ + bx + a = ۰$ عکس ریشه‌های معادله‌ی $ax^۲ + bx + c = ۰$ است. و ریشه‌های معادله‌ی $ax^۲ + bkx + ck^۲ = ۰$، k برابر ریشه‌های معادله‌ی $ax^۲ + bx + c = ۰$ می‌باشند.

۶ ـ گزینه ۲ نقطه‌ی $A\left|\begin{array}{l}\alpha \\ \alpha - ۱\end{array}\right.$ را روی خط $y = x - ۱$ در نظر گرفته و فاصله‌ی آن را از خط $۲x - ۳y = ۵$ بدست آورده و مساوی $\sqrt{۱۳}$ قرار می‌دهیم.

$$\begin{cases} A\left|\begin{array}{l}\alpha \\ \alpha - ۱\end{array}\right. \\ ۲x - ۳y - ۵ = ۰ \end{cases} \rightarrow AH = \frac{|۲\alpha - ۳\alpha + ۳ - ۵|}{\sqrt{۴ + ۹}} = \frac{|-\alpha - ۲|}{\sqrt{۱۳}} = \sqrt{۱۳} \rightarrow |-\alpha - ۲| = ۱۳$$

$$-\alpha - ۲ = ۱۳ \rightarrow \alpha = -۱۵ \ , \ -\alpha - ۲ = -۱۳ \rightarrow \alpha = ۱۱$$

توجه کنید فاصله‌ی نقطه‌ی $A\left|\begin{array}{l}\alpha \\ \beta\end{array}\right.$ از خط به معادله‌ی $ax + by + c = ۰$ از رابطه‌ی $AH = \frac{|a\alpha + b\beta + c|}{\sqrt{a^۲ + b^۲}}$ به‌دست می‌آید.

۷ ـ گزینه ۱

اگر بخواهیم دو ریشه ی متمایز داشته باشیم Δ باید بزرگتر از صفر باشد پس داریم:

$$۲x^۲ + ax + a - \frac{۳}{۲} = ۰$$

$$\Delta = b^۲ - ۴ac = a^۲ - ۸a + ۱۲ > ۰ \Rightarrow (a - ۲)(a - ۶) > ۰$$

$$\rightarrow \begin{array}{c|ccccccc} a & -\infty & & ۲ & & ۶ & & +\infty \\ \hline \text{عبارت}>0 & & + & ۰ & - & ۰ & + & \end{array} \Rightarrow \begin{cases} a > ۶ \\ a < ۲ \end{cases}$$

۸ ـ گزینه ۲

معادله‌ی درجه‌ی دومی که ریشه‌هایش k واحد بیشتر از ریشه های معادله‌ی $ax^۲ + bx + c = ۰$ می باشد به صورت زیر است:

$$a(x - k)^۲ + b(x - k) + c = ۰$$

پس کافی است x را به $x - ۱$ تبدیل کنیم.

$$۳(x - ۱)^۲ + ۷(x - ۱) + ۱ = ۰ \Rightarrow ۳x^۲ - ۶x + ۳ + ۷x - ۷ + ۱ = ۰ \Rightarrow ۳x^۲ + x - ۳ = ۰$$

برای مقایسه با $x^۲ + ax + b = ۰$ معادله را بر ۳ تقسیم می کنیم.

$$x^۲ + \frac{۱}{۳}x - ۱ = ۰ \rightarrow a = \frac{۱}{۳} \ , \ b = -۱$$

۹ ـ گزینه ۴ شرط آنکه سه خط در یک نقطه همدیگر را قطع کنند آن است که محل تلاقی دو خط در معادله‌ی خط سوم صدق کند.

$$- \begin{cases} y + ۲x = ۰ \\ y + ۳x = a \end{cases} \Rightarrow x = a \ , \ y = -۲a$$

$$A\left|\begin{array}{l}a \\ -۲a\end{array}\right. \xrightarrow[۲y+ax+۵=۰]{\text{صدق در خط سوم}} -۴a + a^۲ + ۵ = ۰ \Rightarrow a^۲ - ۴a + ۵ = ۰$$

$\Delta = b^۲ - ۴ac = ۱۶ - ۲۰ = -۴ < ۰ \rightarrow$ ریشه‌ی حقیقی ندارد $\rightarrow$ این سه خط هیچ‌گاه متقارب نیستند.

ریاضی

۱۰ ـ گزینه ۲ ابتدا شیب خط گذرنده از دو نقطه‌ی $A\left|\begin{matrix}۲\\-۱\end{matrix}\right.$ و $B\left|\begin{matrix}۸\\۳\end{matrix}\right.$ را بدست می‌آوریم.

$$m_{AB}=\frac{y_A-y_B}{x_A-x_B}=\frac{-۱-۳}{۲-۸}=\frac{-۴}{-۶}=\frac{۲}{۳}\xrightarrow{\text{عمود}} m_{\text{دسته خط}}=-\frac{۳}{۲}$$
$$m_{\text{دسته خط}}=-\frac{۲k}{k+۱}=-\frac{۳}{۲}\to ۴k=۳k+۳\to k=۳$$
$$k=۳\xrightarrow{\text{معادله‌ی دسته خطوط}} ۴y+۶x-۲=۰\xrightarrow{\div ۲} ۲y+۳x=۱$$

۱۱ ـ گزینه ۱ اگر x' و x'' ریشه های معادله باشند داریم:

$$x'+x''=-\frac{b}{a}=\frac{m+۳}{m}\ ,\ x'x''=\frac{c}{a}=\frac{۵}{m}$$

فرض مسأله: $x'^۲+x''^۲=۶\Rightarrow (x'+x'')^۲-۲x'x''=۶\Rightarrow (\frac{m+۳}{m})^۲-\frac{۱۰}{m}-۶=۰$

$$\Rightarrow \frac{m^۲+۶m+۹}{m^۲}-\frac{۱۰}{m}-۶=۰\xrightarrow{\times m^۲} m^۲+۶m+۹-۱۰m-۶m^۲=۰$$

$$\Rightarrow ۵m^۲+۴m-۹=۰\xrightarrow{a+b+c=۰}\begin{cases} m=۱\xrightarrow{\text{معادله}} x^۲-۴x+۵=۰\ :\quad \Delta=۱۶-۲۰<۰\ \text{غ ق ق}\\ m=-\frac{۹}{۵}\to \text{با توجه به گزینه ها } \Delta>۰ \text{ است و نیازی به چک کردن گزینه ها نیست}\end{cases}$$

۱۲ ـ گزینه ۴ می‌دانیم برای نوشتن معادله‌ی درجه‌ی دومی که ریشه‌هایش عکس ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی دوم داده شده‌ای باشد باید جای a و c را عوض کنیم و برای نوشتن معادله‌ی درجه‌ی دومی که ریشه‌هایش k واحد کمتر از ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی دوم داده شده‌ای باشد باید x را به $x+k$ تبدیل کنیم.

$$۲x^۲-۳x-۱=۰\xrightarrow[\text{جای } a,c \text{ عوض}]{\text{معکوس}}-x^۲-۳x+۲=۰\xrightarrow[x\to x+۱]{\text{یک واحد کمتر}}-(x+۱)^۲-۳(x+۱)+۲=۰$$
$$\to -x^۲-۲x-۱-۳x-۳+۲=۰\to x^۲+۵x+۲=۰$$

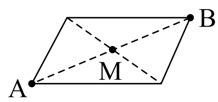
۱۳ ـ گزینه ۴ معادله‌ی خط نیمساز ناحیه‌ی اول و سوم $y=x$ است که شیب آن یک می‌باشد و چون خط باید با نیمساز ناحیه‌ی اول و سوم موازی باشد پس شیب خط مطلوب هم، یک می‌باشد. چون این خط ،نیمساز ناحیه‌ی دوم و چهارم $(y=-x)$ را در نقطه‌ای به طول $x=۲$ قطع می‌کند پس عرض آن -۲ یعنی $y=-۲$ است.

$$A\left|\begin{matrix}۲\\-۲\end{matrix}\right.,m=۱\to y-(-۲)=۱(x-۲)\to y+۲=x-۲\to y-x=-۴$$

۱۴ ـ گزینه ۳

مختصات نقطه‌ی A در هیچ‌یک از معادلات دو خط صدق نمی‌کند پس نقطه A روی این دو خط قرار ندارد و چون این دو خط، موازی نیستند کافی است با این دو خط تشکیل دستگاه دهیم تا مختصات نقطه‌ی B بدست آید.

$$\begin{matrix}۳\\-۲\end{matrix}\begin{cases}۲y-۳x=۱۱\\ ۳y+۴x=۸\end{cases}\to -۱۷x=۱۷\Rightarrow x=-۱\ ,\ y=۴\ \Rightarrow B\left|\begin{matrix}-۱\\۴\end{matrix}\right.$$

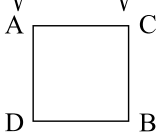


می‌دانیم نقطه‌ی M وسط پاره‌خط AB قرار دارد یعنی:

$$x_M=\frac{x_A+x_B}{۲}=\frac{۷-۱}{۲}=۳\quad ,\quad y_M=\frac{y_A+y_B}{۲}=\frac{۶+۴}{۲}=۵$$

۱۵ ـ گزینه ۱ طول پاره خط‌های AB و AC و BC را پیدا می‌کنیم تا مشخص شود ترتیب قرار گرفتن رئوس، در مربع چگونه است.

$$AB=\sqrt{(۱+۵)^۲+(۲-۲)^۲}=\sqrt{۳۶+۰}=۶$$
$$AC=\sqrt{(۱+۲)^۲+(۲-۵)^۲}=\sqrt{۹+۹}=\sqrt{۱۸}$$
$$BC=\sqrt{(-۵+۲)^۲+(۲-۵)^۲}=\sqrt{۹+۹}=\sqrt{۱۸}$$



واضح است که AC و BC اضلاع مربع و AB قطر مربع است. (قطر مربع، از حاصلضرب یک ضلع در $\sqrt{۲}$ بدست می‌آید) یعنی:

$$\left.\begin{matrix}x_A+x_B=x_C+x_D\to ۱-۵=-۲+x_D\to x_D=-۲\\ y_A+y_B=y_C+y_D\to ۲+۲=۵+y_D\to y_D=-۱\end{matrix}\right\}\to x_D+y_D=-۳$$

۱۶ ـ گزینه ۲ ابتدا با قرار دادن $x=۲$ در معادله‌ی داده شده، a را می‌یابیم:

$$x(ax^۲-x-۵)=۲ \xrightarrow{x=۲} ۲(۴a-۲-۵)=۲ \Rightarrow ۴a-۷=۱ \Rightarrow a=۲$$

پس معادله به صورت $۲x^۳-x^۲-۵x-۲=۰$ می‌شود. حال با تقسیم معادله بر $x-۲$ آن را به شکل زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$۲x^۳-x^۲-۵x-۲=۰ \Rightarrow (x-۲)(۲x^۲+۳x+۱)=۰$$

می‌دانیم مجموع دو ریشه‌ی دیگر که ریشه‌های معادله‌ی درجه دوم داخل پرانتز می‌باشند، برابر با $-\frac{b}{a}=-\frac{۳}{۲}$ می‌شود.

۱۷ ـ گزینه ۱

$$x^۳+(a-۱)x^۲+(۴-a)x-۴=۰$$

چون جمع ضرایب این معادله صفر است پس حتماً یک ریشه‌ی معادله $x=۱$ است و معادله بر $x-۱$ بخش‌پذیر است.

$$\begin{array}{l|l}
x^۳+(a-۱)x^۲+(۴-a)x-۴ & x-۱ \\ \cline{2-2}
-x^۳+x^۲ & x^۲+ax+۴ \\ \cline{1-1}
ax^۲+(۴-a)x-۴ & \\
-ax^۲+ax & \\ \cline{1-1}
۴x-۴ & \\
-۴x+۴ & \\ \cline{1-1}
\text{صفر} &
\end{array}$$

بنابراین عبارت درجه‌ی سوم به صورت $(x-۱)(x^۲+ax+۴)=۰$ تجزیه می‌شود یک ریشه‌ی این معادله $x=۱$ است پس معادله‌ی درجه‌ی دوم در پرانتز دوم باید دارای ۲ ریشه‌ی متمایز مثبت باشد (چون سوال گفته معادله دارای ۳ ریشه‌ی حقیقی متمایز مثبت باشد)

$$\Delta>۰ \to b^۲-۴ac>۰ \to a^۲-۱۶>۰ \to a^۲>۱۶ \to a>۴ \text{ یا } a<-۴ \quad (I)$$

$$S>۰ \to -\frac{b}{a}>۰ \to -a>۰ \to a<۰ \quad (II)$$

$$P>۰ \to \frac{c}{a}>۰ \to ۴>۰ \text{ همواره برقرار است} (III)$$

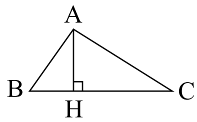
از اشتراک $I\,,\,II\,,\,III$ به جواب $a<-۴$ می‌رسیم.

۱۸ ـ گزینه ۳ شیب هر دو خط $\sqrt{۳}$ می‌باشد پس با هم موازیند و می‌دانیم برای محاسبه‌ی فاصله‌ی بین دو خط موازی به معادلات $ax+by+c=۰$ و $ax+by+c'=۰$ از رابطه‌ی $d=\frac{|c-c'|}{\sqrt{a^۲+b^۲}}$ استفاده می‌کنیم (ضرایب $x\,,\,y$ در هر دو معادله‌ی خط باید یکسان باشند.)

$$\begin{cases} y=\sqrt{۳}x+۲ \xrightarrow{\times\sqrt{۳}} ۳x-\sqrt{۳}y+۲\sqrt{۳}=۰ \\ \sqrt{۳}y-۳x+۶=۰ \to ۳x-\sqrt{۳}y-۶=۰ \end{cases}$$

$$\Rightarrow d=\frac{|۲\sqrt{۳}-(-۶)|}{\sqrt{۹+۳}}=\frac{۲\sqrt{۳}+۶}{\sqrt{۱۲}}=\frac{۲(\sqrt{۳}+۳)}{۲\sqrt{۳}}=\frac{\sqrt{۳}+۳}{\sqrt{۳}}=۱+\frac{۳}{\sqrt{۳}}=۱+\sqrt{۳}$$

۱۹ ـ گزینه ۲



$$BC:\ ۲y+۳x=۶ \to m_{BC}=-\frac{۳}{۲} \xrightarrow{\text{ارتفاع } AH \text{ بر ضلع } BC \text{ عمود است}} m_{AH}=\frac{۲}{۳}$$

برای پیدا کردن مختصات نقطه‌ی A کافی است معادلات خطوط اضلاع AB و AC را تلاقی دهیم.

$$\begin{cases} ۲y-x=۳ \\ y-۲x=۵ \end{cases} \xrightarrow{\text{دستگاه}} x=-\frac{۷}{۳}\,,\, y=\frac{۱}{۳}$$

حال، معادله‌ی ارتفاع AH را با داشتن شیب و یک نقطه می‌نویسیم.

$$A\left|\begin{array}{l} -\frac{۷}{۳} \\ \frac{۱}{۳} \end{array}\right. \ ,\ m_{AH}=\frac{۲}{۳} \to y-\frac{۱}{۳}=\frac{۲}{۳}(x+\frac{۷}{۳}) \to ۳y-۱=۲x+\frac{۱۴}{۳}$$

$$\xrightarrow{\times ۳} ۹y-۳=۶x+۱۴ \to ۹y-۶x=۱۷$$

۲۰ ـ گزینه ۴ این دو خط ممکن دو ضلع موازی یا هر ضلع عمود بر هم باشند، لذا باید هر دو حالت را بررسی نماییم.

حالت اول: دو ضلع موازی باشند، در این حالت شیب دو خط برابر است. خطوط را به حالت استاندارد می‌نویسیم:

$$my - x = -7 \to y = \frac{1}{m}x - \frac{7}{m} \to m_1 = \frac{1}{m}$$

$$m^3x + y = 2 \to y = -m^3x + 2 \to m_2 = -m^3$$

شرط موازی بودن $\frac{1}{m} = -m^3 \to m^4 = -1$ غیر ممکن

پس دو ضلع موازی نیستند.

حالت دوم: دو خط بر هم عمود باشد که حاصلضرب با شیب‌ها -1 خواهد بود.

$$\frac{1}{m} \times -(m^3) = -1 \xrightarrow{\text{با فرض } m\neq 0} m^3 = m \to m^3 - m = 0$$

$$m(m^2 - 1) = 0 \Rightarrow m = \pm 1$$

اگر $m = 0$ در این صورت نیز دو خط عمود بر هم می‌باشد، بنابراین $m = 0$ نیز جواب می‌باشد پس معادله ۳ جواب دارد.

۲۱ ـ گزینه ۴

$$Max \to x^2 \text{ ضریب } < 0 \to m < 0 : I$$

تابع، محور طول را قطع نمی‌کند $\to \Delta < 0 \to b^2 - 4ac < 0 \to 32 - 4m(m-2) < 0 \to 32 - 4m^2 + 8m < 0$

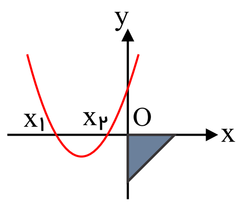
$\to 4m^2 - 8m - 32 > 0 \to m^2 - 2m - 8 > 0 \to (m-4)(m+2) > 0 \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} m < -2$ یا $m > 4 : II$

از طرفی طول رأس سهمی یعنی $\frac{-b}{2a}$ منفی می‌باشد.

$$\frac{-b}{2a} < 0 \to \frac{-4\sqrt{2}}{2m} < 0 \to m > 0 : III$$

که اشتراک جواب‌های I و II و III تهی می‌باشد.

۲۲ ـ گزینه ۴ با توجه به شکل زیر، برای این که نمودار فقط از ناحیه‌ی چهارم نگذرد باید حالت مقابل رخ دهد، با توجه به این حالت:



$f(0) = \frac{9}{4} \Rightarrow$ تابع بالای مبدأ محور عرض‌ها را قطع می‌کند.

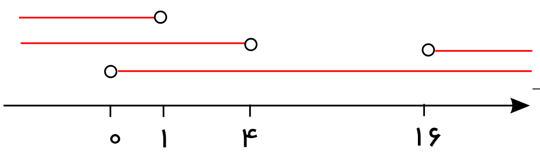
تابع باید مینیمم داشته باشد. $\Rightarrow a > 0 \quad (I)$

$$S = x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} < 0 \xrightarrow{a>0} a - 4 < 0 \Rightarrow a < 4 \quad (II)$$

$P = x_1x_2 = \frac{c}{a} > 0 \xrightarrow{a>0} c > 0 \Rightarrow \frac{9}{4} > 0$ همواره برقرار است

$$\Delta = b^2 - 4ac > 0 \Rightarrow \Delta = (a-4)^2 - 9a = a^2 - 17a + 16 > 0$$

$(a-1)(a-16) > 0 \Rightarrow a < 1$ یا $a > 16 \quad (III)$



$$\xrightarrow{(I)\cap(II)\cap(III)} 0 < a < 1$$

۲۳ ـ گزینه ۲

$$(x-1)^4 + 2x = x^2 + 7 \to (x-1)^4 = x^2 - 2x + 1 + 6 \to (x-1)^4 = (x-1)^2 + 6$$

$$(x-1)^2 = A \to A^2 = A + 6 \to A^2 - A - 6 = 0 \to (A-3)(A+2) = 0$$

$$\to \begin{cases} A = 3 \to (x-1)^2 = 3 \to x - 1 = \pm\sqrt{3} \to \boxed{x = \pm\sqrt{3} + 1} \\ A = -2 \to (x-1)^2 = -2 \to \text{جواب ندارد.} \end{cases}$$

مجموع مربعات ریشه‌ها $= (\sqrt{3}+1)^2 + (-\sqrt{3}+1)^2 = 3 + 1 + \cancel{2\sqrt{3}} + 3 + 1 - \cancel{2\sqrt{3}} = 8$

ریاضی

۲۴ ـ گزینه ۱ چون تابع درجه ۲ محور xها را در $x=۵$ و $x=-۱$ قطع می‌کند پس ضابطهٔ آن به‌صورت $f(x)=a(x+۱)(x-۵)$ نوشته می‌شود. ضمناً طول رأس سهمی وسط دو ریشه است پس داریم:

$$x_S=\frac{۵+(-۱)}{۲}\rightarrow x_S=۲\quad,\quad f(۲)=۱۸\rightarrow ۱۸=a(۲+۱)(۲-۵)$$

$$\rightarrow ۱۸=a(-۹)\rightarrow a=-۲$$

$$\rightarrow f(x)=a(x+۱)(x-۵)\xlongequal{a=-۲}-۲(x+۱)(x-۵)=-۲(x^۲-۴x-۵)$$

$$\rightarrow f(x)=-۲x^۲+۸x+۱۰\rightarrow \boxed{a=-۲}\ ,\ \boxed{b=۸}\ ,\ \boxed{c=۱۰}\qquad (I)$$

$$\rightarrow A=-۳a+\frac{b}{۲}-c\xlongequal{(I)}-۳(-۲)+\frac{۸}{۲}-۱۰\rightarrow A=۰$$

۲۵ ـ گزینه ۴

$$\frac{x^۲+ax+۴}{x^۲-۲x-۳}=۰\rightarrow x^۲+ax+۴=۰\ ,\ \rightarrow x^۲-۲x-۳\neq ۰\rightarrow (x-۳)(x+۱)\neq ۰$$

$$\rightarrow x\neq ۳\ ,\ x\neq -۱$$

برای این‌که معادله یک ریشه داشته باشد، حالت‌های زیر را درنظر می‌گیریم:

۱ـ معادلهٔ $x^۲+ax+۴=۰$ یک ریشه داشته باشد، پس باید $\Delta=۰$ باشد و داریم:

$$a^۲-۴(۱)(۴)=۰\rightarrow a^۲-۱۶=۰\rightarrow a=\pm ۴$$

$$\left.\begin{array}{l} a=۴\rightarrow x^۲+۴x+۴=۰\rightarrow (x+۲)^۲=۰\rightarrow \boxed{x=-۲}\ \checkmark \\ a=-۴\rightarrow x^۲-۴x+۴=۰\rightarrow (x-۲)^۲=۰\rightarrow \boxed{x=۲}\ \checkmark \end{array}\right\}$$

هردو مقدار $a=۴$ و $a=-۴$ قابل‌قبول است.

۲ـ معادلهٔ $x^۲+ax+۴=۰$ دو ریشه داشته باشد و یکی از آن‌ها $x=۳$ باشد و داریم:

$$۳^۲+a(۳)+۴=۰\rightarrow ۳a=-۱۳\rightarrow a=-\frac{۱۳}{۳}\rightarrow x^۲-\frac{۱۳}{۳}x+۴=۰$$

$$\rightarrow (x-۳)(x-\frac{۴}{۳})=۰\xrightarrow{\boxed{x=\frac{۴}{۳}}\ \checkmark}$$ $a=-\frac{۱۳}{۳}$ قابل قبول است.

۳ـ معادلهٔ $x^۲+ax+۴=۰$ دو ریشه داشته باشد و یکی از آن‌ها $x=-۱$ باشد و داریم:

$$(-۱)^۲+a(-۱)+۴=۰\rightarrow -a+۵=۰\rightarrow a=۵\rightarrow x^۲+۵x+۴=۰$$

$$\rightarrow (x+۱)(x+۴)=۰\xrightarrow{\boxed{x=-۴}\ \checkmark}$$ $a=۵$ قابل قبول است.

۴ مقدار برای a داریم یعنی $\{\pm ۴,-\frac{۱۳}{۳},۵\}$

۲۶ ـ گزینه ۲ طول نقطه‌ی B یا همان رأس سهمی، میانگین طول‌های دو نقطه‌ی هم عرض A و C است.

$$x_B=\frac{x_A+x_C}{۲}=\frac{-۲+۰}{۲}=-۱$$

و توجه کنید صورت کلی یک تابع درجه‌ی دوم به صورت $y=ax^۲+bx+c$ است.

$$\left.\begin{array}{l} A\left|\begin{array}{l}-۲\\-۲\end{array}\right.\xrightarrow{\text{صدق}}-۲=۴a-۲b+c \\ B\left|\begin{array}{l}-۱\\-۴\end{array}\right.\xrightarrow{\text{صدق}}-۴=a-b+c \end{array}\right\}\xrightarrow{c=-۲}\begin{cases}۴a-۲b=۰\\ a-b=-۲\end{cases}\rightarrow a=۲\ ,\ b=۴$$

$$C\left|\begin{array}{l}۰\\-۲\end{array}\right.\xrightarrow{\text{صدق}}-۲=c$$

بنابراین تابع درجه‌ی دوم به صورت $y=۲x^۲+۴x-۲$ است. برای بدست آوردن مجموع مربعات ریشه های معادله‌ی $۲x^۲+۴x-۲=۰$ بدین صورت عمل می کنیم.

$$x'+x''=-\frac{b}{a}=-\frac{۴}{۲}=-۲\quad,\quad x'x''=\frac{c}{a}=-۱$$

مجموع مربعات ریشه‌ها: $x'^۲+x''^۲=(x'+x'')^۲-۲x'x''=۴-۲(-۱)=۶$

۲۷ ـ گزینه ۲

$$(x-۲)(x^۲+mx+m+۳)=۰\rightarrow \begin{cases}x=۲\\ x^۲+mx+m+۳=۰\end{cases}$$

ریاضی

یک ریشه‌ی معادله $x=۲$ است و اگر ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی دوم $x^۲+mx+m+۳=۰$ را α و β در نظر بگیریم طبق صورت مسأله $\underbrace{\alpha^۲+\beta^۲+۲^۲}_{\text{مجموع مجذورات ریشه‌ها}}=۱۳$ است.

$$\alpha^۲+\beta^۲+۴=۱۳\to\alpha^۲+\beta^۲=۹\to(\alpha+\beta)^۲-۲\alpha\beta=۹\xrightarrow[\alpha\beta=\frac{c}{a}=m+۳]{\alpha+\beta=-\frac{b}{a}=-m}$$

$$m^۲-۲(m+۳)=۹\to m^۲-۲m-۱۵=۰\to(m-۵)(m+۳)=۰$$

$$\to\begin{cases}m=۵\xrightarrow{\text{معادله‌ی درجه‌ی دوم}}x^۲+۵x+۸=۰\to\Delta=b^۲-۴ac=۲۵-۳۲<۰\to\text{ریشه‌ی حقیقی ندارد}\\ m=-۳\xrightarrow{\text{معادله‌ی درجه‌ی دوم}}x^۲-۳x=۰\to x(x-۳)=۰\to x=۰,x=۳\end{cases}$$

بنابراین فقط $m=-۳$ قابل قبول است.

۲۸ ـ گزینه ۱ برای حل مسئله ابتدا مجموع و حاصلضرب ریشه‌های معادلهٔ اول را محاسبه می‌نماییم.

$$۲x^۲+(c+۲)x+۸=۰\Rightarrow\begin{cases}S=\alpha+\beta=-\dfrac{b}{a}=\dfrac{-(c+۲)}{۲}\quad(I)\\ P=\alpha\cdot\beta=\dfrac{c}{a}=\dfrac{۸}{۲}=۴\end{cases}$$

حال سراغ معادلهٔ دوم برویم: $\begin{cases}x_۱=\sqrt{\alpha\beta}\\ x_۲=۲\sqrt{\alpha\beta}\end{cases}$ ، $x^۲+bx+c=۰$

$$S_{\text{جدید}}=x_۱+x_۲=\sqrt{\alpha\beta}+۲\sqrt{\alpha\beta}=۳\sqrt{\alpha\beta}=۳\sqrt{P}=۳\sqrt{۴}=۶$$

$$P_{\text{جدید}}=x_۱\cdot x_۲=\sqrt{\alpha\beta}\times۲\sqrt{\alpha\beta}=۲\alpha\beta=۲(۴)=۸$$

حال می‌توان با فرمول زیر معادله را بازنویسی کرد: $x^۲-Sx+P=۰$.

$$\left.\begin{matrix}x^۲-۶x+۸=۰\\ x^۲+bx+c=۰\end{matrix}\right\}\Rightarrow c=۸\xrightarrow{(I)}\alpha+\beta=\frac{-(c+۲)}{۲}=\frac{-۱۰}{۲}=-۵$$

۲۹ ـ گزینه ۳ قدم اول محاسبه مختصات رأس سهمی S می‌باشد.

$$f(x)=x^۲-mx+m+۱$$

$$S=\left|\begin{array}{l}x_s=-\dfrac{b}{۲a}=-\dfrac{-m}{۲(۱)}=\dfrac{m}{۲}\\ y_s=f(-\dfrac{b}{۲a})=f(\dfrac{m}{۲})=(\dfrac{m}{۲})^۲-m(\dfrac{m}{۲})+m+۱=\dfrac{m^۲}{۴}-\dfrac{m^۲}{۲}+m+۱=\dfrac{-m^۲+۴m+۴}{۴}\end{array}\right.$$

با توجه به اینکه رأس سهمی روی خط $y=x+۱$ قرار دارد، مختصات رأس در معادله خط صدق می‌نماید.

$$\frac{-m^۲+۴m+۴}{۴}=\frac{m}{۲}+۱\xrightarrow{\times۴}-m^۲+۴m+۴=۲m+۴$$

$$\to m^۲-۲m=۰\to m(m-۲)=۰\Rightarrow\begin{cases}m=۰\\ m=۲\end{cases}$$

۳۰ ـ گزینه ۱ روش اول: اگر ریشه های معادلهٔ $x(۵x+۳)=۴$ را با α و β نمایش دهیم، ریشه‌های معادلهٔ $۴x^۲+kx-۵=۰$ برابر با $\frac{۱}{\alpha}$ و $\frac{۱}{\beta}$ هستند. بنابراین:

$$x(۵x+۳)=۴\Rightarrow۵x^۲+۳x-۴=۰$$

$$\Rightarrow\begin{cases}S=\alpha+\beta=\frac{-b}{a}=-\frac{۳}{۵}\\ P=\alpha\beta=\frac{c}{a}=-\frac{۴}{۵}\end{cases}$$

$$\begin{cases}S'=\frac{۱}{\alpha}+\frac{۱}{\beta}=\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=\frac{S}{P}=+\frac{۳}{۴}\\ P'=\frac{۱}{\alpha}\times\frac{۱}{\beta}=\frac{۱}{\alpha\beta}=\frac{۱}{P}=-\frac{۵}{۴}\end{cases}$$

$$\xrightarrow[\text{معادله}]{\text{تشکیل}}x^۲-S'x+P'=۰$$

$$\Rightarrow x^۲-\frac{۳}{۴}x-\frac{۵}{۴}=۰\Rightarrow۴x^۲-۳x-۵=۰\Rightarrow k=-۳$$

روش دوم: اگر ریشه‌های معادله $۴x^۲+kx-۵=۰$ را به صورت X نشان دهیم داریم:

$$x\left(5x+3\right)=4 \rightarrow 5x^{2}+3x-4=0 \rightarrow X=\frac{1}{x} \text{ یا } x=\frac{1}{X}$$

$$\rightarrow 5\left(\frac{1}{x}\right)^{2}+3\left(\frac{1}{x}\right)-4=0 \rightarrow \frac{5}{X^{2}}+\frac{3}{X}-4=0$$

$$\xrightarrow{\times X^{2}} 5+3X-4X^{2}=0 \rightarrow 4X^{2}-3X-5=0$$

$$\rightarrow \boxed{k=-3}$$