پاسخنامه تشریحی

۱ - گزینه ۱ دقت کنید چون در مجموع، فقط درایه‌های بالای قطر اصلی را خواسته و از طرفی در ماتریس B درایه‌های بالای قطر اصلی $j-i$ هستند.
بنابراین داریم:

مجموع درایه‌های بالای قطر اصلی $A+B=[i-j]+[j-i]=[i-j+j-i]=[0]$

۲ - گزینه ۲

$$A=B \rightarrow \begin{bmatrix} m & \times & \times \\ \times & n-1 & \times \\ \times & \times & k+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & \times & \times \\ \times & 6 & \times \\ \times & \times & 12 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} m=2 \\ n-1=6 \rightarrow n=7 \\ k+1=12 \rightarrow k=11 \end{cases}$$

$$\rightarrow m+n+k=20$$

۳ - گزینه ۱ برای اینکه این ضرب قابل انجام باشد A باید یک ماتریس سطری 3×1 باشد:

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} [x \quad y \quad z] = \begin{bmatrix} 2x & 2y & 2z \\ x & y & z \\ 3x & 3y & 3z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ 3 & 1 & -1 \\ d & e & f \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=1 \\ z=-1 \end{cases}$$

$$\rightarrow a+b+e=2x+2y+3y=6+2+3=11$$

۴ - گزینه ۲

$$(A-B)^2=A^2+B^2-(AB+BA)$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 8 \\ 4 & 18 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -4 & 3 \end{bmatrix} - (AB+BA)$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 12 \\ 0 & 21 \end{bmatrix} - (AB+BA) \rightarrow AB+BA = \begin{bmatrix} -1 & 12 \\ 0 & 15 \end{bmatrix}$$

۵ - گزینه ۴
با ضرب کردن ماتریس ها در یکدیگر داریم:

$$[x \quad 2 \quad 1] \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = O \Rightarrow [2x+7 \quad x \quad 2+a] \begin{bmatrix} x \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = O$$

$$\Rightarrow \left[2x^2+7x+2x+(2+a)\right]=O$$

بنابراین داریم:

$$2x^2+9x+(2+a)=0 \xrightarrow{x=0} 2+a=0$$

و معادله به صورت زیر در می آید:

$$2x^2+9x=0 \Rightarrow x(2x+9)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=-\frac{9}{2} \end{cases}$$

۶ - گزینه ۳
از طرفی داریم:

$$A^2 + AB + 3B = A(A+B) + 3B$$

$$A + B = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = 3I$$

بنابراین:

$$A^2 + AB + 3B = A(A+B) + 3B = A \times 3I + 3B$$

$$= 3A + 3B = 3(A+B) = 3 \times 3I = 9I$$

۷ - گزینه ۴ می‌دانیم A با هر ترکیبی از خودش مثل A^2 و A^3 و... و همچنین با هر ترکیبی از A و I مانند $A+I$ و $3A+2I$ و... تعویض‌پذیر است پس هر ۴ مورد صحیح می‌باشد.

۸ - گزینه ۱

$$A^2 = 2A + 13I \;\Rightarrow\; 2A = A^2 - 13I \;\Rightarrow\; A = \frac{1}{2}(A^2 - 13I)$$

$$\Rightarrow A = \frac{1}{2}\left(\begin{bmatrix} 9 & 2 \\ 10 & 21 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 13 & 0 \\ 0 & 13 \end{bmatrix}\right) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 10 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$$

۹ - گزینه ۳ ابتدا ماتریس A^2 را می‌یابیم:

$$A^2 = A \times A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \boxed{2} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^3 = A^2 \times A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \boxed{3} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

باتوجه به وضعیت درایه‌های ماتریس A^2 و A^3 و به کمک استدلال استقرایی می‌توان نتیجه گرفت که $A^k = \begin{bmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ در نتیجه داریم:

$$A^{12} + A^{13} = \begin{bmatrix} 1 & 12 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 12 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 25 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow$$ ۲۹ مجموع درایه‌ها

۱۰ - گزینه ۴

$$A = A^{-1} \xrightarrow{\times A} A^2 = A \times A^{-1} = I$$

$$(A + A^{-1})^2 \xlongequal{A=A^{-1}} (A+A)^2 = (2A)^2 = 4A^2 = 4(I)$$

۱۱ - گزینه ۳ چون $A^6 = \bar{O}$ می‌باشد پس $I^6 - A^6 = I^6 - \bar{O} = I$ حال بسط اتحاد $I^6 - A^6$ را می‌نویسیم:

$$I^6 - A^6 = (I - A)(I^5 + I^4A + I^3A^2 + I^2A^3 + IA^4 + A^5) = I$$

$$= (I - A)(I + A + A^2 + A^3 + A^4 + A^5) = I$$

$$\Rightarrow\; (I - A)^{-1} = I + A + A + A^2 + \cdots + A^5$$

تذکر: اگر $A^n = \bar{O}$ آنگاه داریم:

$$(I - A)^{-1} = I + A + \cdots + A^{n-1}$$

۱۲ - گزینه ۲ ابتدا ماتریس A را می‌یابیم:

$A=[a_{ij}]_{۳\times ۳}\quad ;\quad a_{ij}=\begin{cases} ۱ & i+j \text{ مضرب ۳ است} \\ ۰ & i+j \text{ مضرب ۳ نیست} \end{cases}$

$A=\begin{bmatrix} ۰ & ۱ & ۰ \\ ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix} \Rightarrow$ مجموع درایه‌های واقع بر قطر اصلی $= ۰+۰+۱=۱$

۱۳ - گزینه ۳ نکته: ماتریس مثلث A بفرم $A=\begin{bmatrix} a & b & c \\ ۰ & d & e \\ ۰ & ۰ & f \end{bmatrix}$ مفروض است:

$$A^n=\begin{bmatrix} a^n & * & * \\ ۰ & d^n & * \\ ۰ & ۰ & f^n \end{bmatrix}$$

$$A=\begin{bmatrix} ۲ & ۵ & ۴ \\ ۰ & ۱ & ۱۰ \\ ۰ & ۰ & ۳ \end{bmatrix} \Rightarrow A^۲=\begin{bmatrix} ۲^۲ & * & * \\ ۰ & ۱^۲ & * \\ ۰ & ۰ & ۳^۲ \end{bmatrix} \Rightarrow A^۴=(A^۲)^۲=\begin{bmatrix} ۴^۲ & * & * \\ ۰ & ۱^۲ & * \\ ۰ & ۰ & ۹^۲ \end{bmatrix}$$

$A^۴$ مجموع درایه‌های واقع بر قطر اصلی $=۱۶+۱+۸۱=۹۸$

۱۴ - گزینه ۱

تذکر: اگر $A_{۲\times ۲}$, $|A|=۰$ باشد آنگاه داریم:

$$A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \Rightarrow A^{-۱}=\frac{۱}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

$$A=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ -۱ & ۳ \end{bmatrix} \rightarrow A^{-۱}=\frac{۱}{(۱\times ۳)-((-۱)\times ۰)}\begin{bmatrix} ۳ & ۰ \\ ۱ & ۱ \end{bmatrix}=\frac{۱}{۳}\begin{bmatrix} ۳ & ۰ \\ ۱ & ۱ \end{bmatrix}$$

$$A^{-۱}B=\frac{۱}{۳}\begin{bmatrix} ۶ & ۳ \\ ۲ & ۳ \end{bmatrix} \Rightarrow \frac{۱}{۳}\begin{bmatrix} ۳ & ۰ \\ ۱ & ۱ \end{bmatrix}\times\begin{bmatrix} a & ۱ \\ ۰ & ۲ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۲ & ۱ \\ \frac{۲}{۳} & ۱ \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} ۳a & ۳ \\ a & ۳ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۶ & ۳ \\ ۲ & ۳ \end{bmatrix} \Rightarrow a=۲$$

۱۵ - گزینه ۲

تذکر: ماتریس مربعی A مفروض است ماتریس B را وارون A نامند هرگاه: $AB=BA=I$

$$A^۲=A+۲I \Rightarrow A^۲-A=۲I \Rightarrow A(A-I)=۲I$$

$$\xrightarrow{\times\frac{۱}{۲}} A\times\frac{۱}{۲}(A-I)=I \Rightarrow A^{-۱}=\frac{۱}{۲}(A-I)$$

۱۶ - گزینه ۴

تذکر (۱): ماتریس مربعی A را وارون‌پذیر نامند هرگاه $|A|\neq ۰$ باشد.

(۲) $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \Rightarrow |A|=ad-bc$

همهٔ حالاتی که ماتریس A با درایه‌های ۰ و ۱ وارون‌پذیرند به شکل زیر است:

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix} , \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۱ & ۱ \end{bmatrix} , \begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix} , \begin{bmatrix} ۰ & ۱ \\ ۱ & ۱ \end{bmatrix} , \begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ ۱ & ۰ \end{bmatrix} , \begin{bmatrix} ۰ & ۱ \\ ۱ & ۰ \end{bmatrix}$$

۱۷ - گزینه ۲

تذکر: اگر A و B دو ماتریس مربعی هم‌مرتبه باشند، B را وارون A نامند هرگاه: $AB = BA = I$

$$(I - ۳A)(I + \lambda A) = I \Rightarrow I^۲ + (\lambda - ۳)A - ۳\lambda A^۲ = I \xrightarrow{A^۲ = A} I + (\lambda - ۳)A - ۳\lambda A = I$$

$$\Rightarrow (\lambda - ۳ - ۳\lambda)A = \bar{O} \Rightarrow (-۲\lambda - ۳)A = \bar{O} \xrightarrow{A \neq \bar{O}} -۲\lambda - ۳ = ۰ \Rightarrow \lambda = -\frac{۳}{۲}$$

۱۸ - گزینه ۴

نکته: اگر ماتریس مربعی A مرتبه $n \times n$ باشد و $k \in R$ آنگاه: $|kA| = k^۲ |A|$

$$\begin{bmatrix} ۳ & ۰ & ۰ \\ ۴ & -۱ & ۰ \\ ۲ & -۵ & ۲ \end{bmatrix} \times A \times \begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۲ & ۰ \\ ۳ & ۰ & ۰ \end{bmatrix} = ۶I$$

$$\xrightarrow{\text{از طرفین دترمینان می‌گیریم.}} \begin{vmatrix} ۳ & ۰ & ۰ \\ ۴ & -۱ & ۰ \\ ۲ & -۵ & ۲ \end{vmatrix} \times |A| \times \begin{vmatrix} ۰ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۲ & ۰ \\ ۳ & ۰ & ۰ \end{vmatrix} = |۶I|$$

$$\Rightarrow (-۶) \times |A| \times (-۶) = ۶^۳ \cancel{|I|} \Rightarrow |A| = \frac{۶^۳}{۶^۲} = ۶$$

۱۹ - گزینه ۲ نکته: در محاسبهٔ دترمینان یک ماتریس مربعی از یک درایهٔ دلخواه در یک سطر یا یک ستون می‌توانیم فاکتور گرفته و به‌صورت ضریب کنار دترمینان قرار بدهیم.

$$\begin{vmatrix} ka & kb & kc \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$$

$$m = \begin{vmatrix} ۱ & a & a^۲ \\ ۱ & b & b^۲ \\ ۱ & c & c^۲ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a \times \frac{۱}{a} & a & a \times a \\ b \times \frac{۱}{b} & b & b \times b \\ c \times \frac{۱}{c} & c & c \times c \end{vmatrix} \xlongequal[\text{فاکتور و سطر سوم از } c \text{ فاکتور می‌گیریم.}]{\text{سطر اول از } a \text{ فاکتور ، سطر دوم از } b} abc \begin{vmatrix} \frac{۱}{a} & ۱ & a \\ \frac{۱}{b} & ۱ & b \\ \frac{۱}{c} & ۱ & c \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow{\div abc} \begin{vmatrix} \frac{۱}{a} & ۱ & a \\ \frac{۱}{b} & ۱ & b \\ \frac{۱}{c} & ۱ & c \end{vmatrix} = \frac{m}{abc}$$

۲۰ - گزینه ۳

نکته: اگر A ماتریس مربعی باشد و دترمینان آن از دستور زیر حاصل می‌شود:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \rightarrow |A| = ad - bc$$

$$A=\begin{bmatrix} |A^۲| & |A| \\ ۳ & ۴|A| \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{از طرفین دترمینان}} |A|=\begin{vmatrix} |A^۲| & |A| \\ ۳ & ۴|A| \end{vmatrix} \rightarrow |A|=۴|A|^۲-۳|A|$$

$$\rightarrow ۴|A|^۳-۴|A|=\rightarrow ۴|A|(|A|^۲-۱)=۰ \rightarrow \begin{cases} |A|=۰ \\ |A|=۱ \\ |A|=-۱ \end{cases}$$

بنابراین مجموع مقادیر $|A|$ برابر صفر می‌باشد.