

پاسخنامه تشریحی

۱ - گزینه ۱

$$\begin{aligned} (A \cup (A \cap B))' \cap ((B \cap A) \cup (B - A)) &= (A' \cap (A \cap B)') \cap (B \cap \underbrace{(A \cup A')}_M) \\ &= (A' \cap (A' \cup B')) \cap \underbrace{(B \cap M)}_B = A' \cap (A' \cup B') \cap B \\ &= A' \cap ((A' \cup B') \cap B) = A' \cap ((A' \cap B) \cup \underbrace{(B' \cap B)}_\emptyset) \\ &= A' \cap (A' \cap B) = \underbrace{(A' \cap A')}_{A'} \cap B = A' \cap B = A' - B' \end{aligned}$$

۲ - گزینه ۲

$$A_1 = \{m \in \mathbb{Z} \mid -1 \leq m \leq 7\} = \{-1, 0, \dots, 7\}$$

$$A_2 = \{m \in \mathbb{Z} \mid -2 \leq m \leq 6\} = \{-2, -1, \dots, 6\}$$

.

.

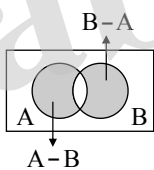
$$A_8 = \{-8, -7, \dots, 0\}$$

$$\left. \begin{aligned} \bigcup_{i=1}^8 A_i &= \{-8, -7, -6, \dots, 5, 6, 7\} \Rightarrow \text{تعداد اعضا} = 16 \\ \bigcap_{i=1}^8 A_i &= \{-1, 0\} \Rightarrow \text{تعداد اعضا} = 2 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} (-) &\rightarrow \text{تعداد اعضای باقی مانده} = 14 \end{aligned}$$

۳ - گزینه ۱

$$\begin{aligned} \text{متمم} &= ((B - A)' - A)' = ((B \cap A')' \cap A')' = ((B \cap A')') \cup (A')' = (B \cap A') \cup A \\ &= (B \cup A) \cap (A' \cup A) = B \cup A = A \cup B \end{aligned}$$

۴ - گزینه ۴



A و B را روی نمودار ون ببینید: $A - B$ و $B - A$ هیچ عضو مشترکی ندارند، پس وقتی $B - A$ را از $A - B$ کم می‌کنیم، چیزی از $A - B$ کم نمی‌شود و $A - B$ تغییری نمی‌کند.

$$(A - B) - (B - A) = A - B$$

در نتیجه:

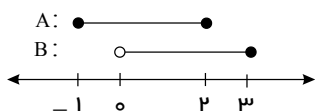
از طرفی:

$$(A \cap B') - (B - A) = (A - B) - (B - A) = A - B$$

۵ - گزینه ۱

$$\begin{aligned} (A - B)' \cap (A \cup B) \cap A' &= (A \cap B')' \cap (A \cup B) \cap A' \\ &= (A' \cup B) \cap (A \cup B) \cap A' = \underbrace{(B \cup \emptyset)}_B \cap A' = B \cap A' = B - A \end{aligned}$$

۶ - گزینه ۲



بازه‌ها را روی محور نمایش می‌دهیم و گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

$$۱) A \cup B = [-1, 3]$$

$$۲) B - A = (2, 3]$$

$$۳) B \cap A = (0, 2]$$

$$۴) A - B = [-1, 0]$$

۷ - گزینه ۱

$$\begin{cases} \mathbb{Z} - \mathbb{N} = \{\dots, -2, -1, 0\} \\ W = \{0, 1, \dots\} \end{cases} \Rightarrow W \cap (\mathbb{Z} - \mathbb{N}) = \{0\}$$

(۲)

$$\begin{cases} \mathbb{Z} - W = \{\dots, -3, -2, -1\} \\ \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\} \end{cases} \Rightarrow \mathbb{N} \cap (\mathbb{Z} - W) = \{ \}$$

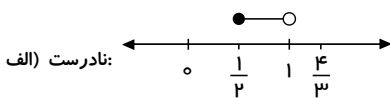
(۳)

$$w \subseteq Q \Rightarrow (R - Q) \cap w = \{ \}$$

از آنجاییکه اعضای w همگی در Q هستند، پس با کم شدن Q از \mathbb{R} اعضای w نیز همگی از \mathbb{R} کم می‌شوند در نتیجه اشتراکشان تهی است. با استدلال مشابه گزینه ۳ داریم:

$$۴) N \subseteq Z \Rightarrow (Q - Z) \cap N = \{ \}$$

۸ - گزینه ۳

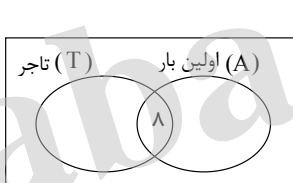


ب) درست: $-2 \in \{-2, 0\}$

پ) درست: $-\frac{7}{8} \notin \mathbb{Z}$

ت) درست: $\mathbb{R} - \mathbb{Q} = \mathbb{Q}'$

۹ - گزینه ۲ با توجه به نمودار ون داریم:



$$n(V) = 72, n(T) = 23, n(T \cap A) = 8$$

$$n(T \cup A) = n(T) + n(A) - n(T \cap A) = 23 + 12 - 8 = 27$$

$$n(T \cup A)' = n(V) - n(T \cup A) = 72 - 27 = 45$$

۱۰ - گزینه ۴ به گزینه‌ها توجه کنید:

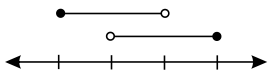
(۱) دو مجموعه نامتناهی می‌توانند با هم هیچ اشتراکی نداشته باشند؛ یعنی اشتراک آن‌ها تهی باشد که متناهی است. (نادرست)

(۲) دو مجموعه نامتناهی می‌توانند با هم برابر باشند و تفاضلشان تهی باشد که متناهی است. (نادرست)

(۳) اگر A تهی باشد، A زیرمجموعه‌ی همه‌ی مجموعه‌هاست. یعنی B می‌تواند متناهی یا نامتناهی باشد.

(۴) اگر $A \subseteq B$ ، آنگاه $A \cap B = A$ خواهد بود. طبق متن گزینه‌ی A نامتناهی است و B مجموعه‌ای است که آن را در بر گرفته است؛ پس B الزاماً نامتناهی است.

۱۱ - گزینه ۴ برای آنکه اشتراک بازه‌های $(a, -2]$ و $(b, 4]$ برابر با $(-\frac{2}{3}, 1)$ باشد، باید روی محور چنین وضعیتی داشته باشند:



بنابراین اشتراک آنها (b, a) است:

$$(b, a) = \left(-\frac{2}{3}, 1\right) \Rightarrow \begin{cases} b = -\frac{2}{3} \\ a = 1 \end{cases}$$

$$(-2a - 1, b) = (-2 \times 1 - 1, -\frac{2}{3}) = (-3, -\frac{2}{3})$$

$$(b - a) = (-\frac{2}{3}, 1)$$

پس:

$$(-2a - 1, b) \cup (b, a) = (-3, -\frac{2}{3}) \cup (-\frac{2}{3}, 1)$$

$$= (-3, 1) - \{-\frac{2}{3}\}$$

۱۲ - گزینه ۳

$$28 \text{ مجموعه مقسوم‌علیه‌های طبیعی } A = \{1, 2, 4, 7, 14, 28\}$$

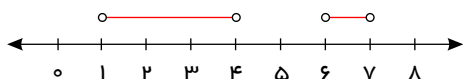
$$30 \text{ مجموعه مقسوم‌علیه‌های طبیعی } B = \{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}$$

$$\Rightarrow A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 10, 14, 15, 28, 30\} \Rightarrow n(A \cup B) = 12$$

۱۳ - گزینه ۱ گزینه‌ها را ببینید: الف) دو مجموعه‌ی متناهی، تعداد اعضای قابل شمارش دارند. پس تعداد اعضای اجتماع آنها نیز قابل شمارش است و متناهی است. ب) اشتراک یک مجموعه‌ی متناهی با یک مجموعه‌ی نامتناهی، حداکثر می‌تواند به اندازه‌ی تمام مجموعه‌ی متناهی باشد. پس متناهی است و این گزینه نادرست است. پ) این جمله به مضارب مشترک ۵ و ۷ اشاره دارد؛ یعنی مضارب ۳۵ و مجموعه مضارب ۳۵ نامتناهی است. پس این گزینه نیز نادرست است. ت) اگر از مجموعه‌ای متناهی مثل A ، مجموعه‌ای نامتناهی مثل B را کم کنیم، حاصل این کار مجموعه‌ای است که زیرمجموعه A است و نمی‌تواند نامتناهی باشد. پس این گزینه نیز نادرست است.

۱۴ - گزینه ۱

مجموعه‌ی S عبارتست از:



این مجموعه فقط شامل اعداد صحیح $\{2, 3\}$ است. گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

$$1) A = \{x \in \mathbb{Z} \mid \frac{x^2 + 4}{x^2} \in \mathbb{N}\}$$

$$\frac{x^2 + 4}{x^2} = 1 + \frac{4}{x^2}$$

توجه کنید اگر $x = 1, -1, 2, -2$ اختیار شود آن‌گاه $1 + \frac{4}{x^2}$ یک عدد طبیعی است.

$$2) B = \{1, 2, 3, 4\} \Rightarrow B \cup \{2, 3\} = \{1, 2, 3, 4\}$$

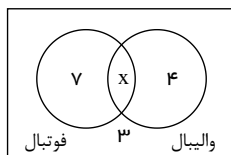
$$3) C : \Rightarrow C = \{1, 2, 6\} \Rightarrow C \cup \{2, 3\} = \{1, 2, 3, 6\}$$

$$4) D = \{2, 3, 5, 7\} \Rightarrow D \cup \{2, 3\} = \{2, 3, 5, 7\}$$

تعداد اعضاء در گزینه‌ی ۱ از همه بیشتر است.

۱۵ - گزینه ۱

اطلاعات مسئله را روی شکل روبرو نشان می‌دهیم:



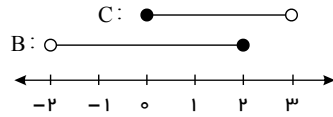
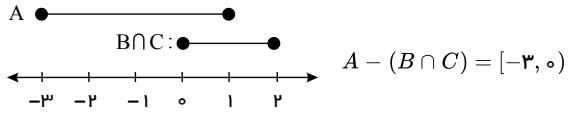
$$20 = 7 + 4 + 3 + x \Rightarrow x = 6$$

$$13 = 7 + 6 = \text{تعداد دانش‌آموزانی که فوتبال بازی می‌کنند}$$

۱۶ - گزینه ۱

$$\left. \begin{array}{l} A' = \{3, 5\} \\ B' = \{2, 4, 5\} \end{array} \right\} \Rightarrow A' \cup B' = \{2, 3, 4, 5\} = C'$$

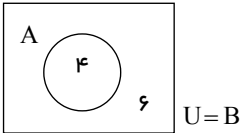
۱۷ - گزینه ۱

بازه‌های B و C را روی محور نمایش می‌دهیم:و داریم: $B \cap C = [0, 2]$ از تفاضل A و این بازه روی محور داریم:

$$A \cup B \subseteq B \Rightarrow A \subseteq B$$

$$\begin{aligned} A' &= U - A \\ A \cup B = B &\Leftrightarrow A \subseteq B \end{aligned}$$

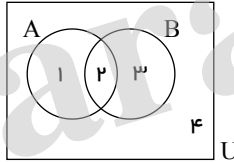
۱۸ - گزینه ۳ می‌دانیم:

در حالتی که B مجموعه مرجع باشد، تعداد اعضای A' حداقل مقدار خود را دارد.بنابراین فرض می‌کنیم $U = B$ و داریم:

$$n(A') = n(U) - n(A) = n(B) - n(A) = 10 - 4 = 6$$

۱۹ - گزینه ۴

با توجه به نمودار ون داریم:

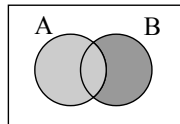


$$\begin{aligned} (A - (A - B)) \cup (A \cap B)' &\rightarrow (1, 2 - (1, 2 - 2, 3)) \cup (1, 2 \cap 2, 3)' \\ &\rightarrow (1, 2 - 1) \cup (2)' \rightarrow (2) \cup (1, 3, 4) = 1, 2, 3, 4 \rightarrow \{ \} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (A \cup B)' &= A' \cap B' \\ A - B &= A \cap B' \end{aligned}$$

۲۰ - گزینه ۲ می‌دانیم:

با توجه به نمودار ون داریم:



$$A \cup (B - A) = A \cup B \Rightarrow [A \cup (B - A)]' = (A \cup B)' = A' \cap B' = A' - B$$