

پاسخنامه تشریحی

۱ - گزینه ۴

رابطه‌ای تابع است که در آن به ازای هر عضو از مجموعه A دقیقاً یک عضو از مجموعه B نسبت داده شود.

با توجه به نکته‌ی فوق، تعداد اعضای برد نمی‌تواند از تعداد اعضای دامنه‌ی تابع بیشتر باشد. بنابراین با شرایط طرح شده در گزینه‌ی ۴ نمی‌توان تابع تشکیل داد.

۲ - گزینه ۲

می‌دانیم: در نمایش زوج مرتبی، یک رابطه زمانی تابع است که هیچ دو زوج مرتبی مؤلفه‌های اولشان یکسان نباشد مگر اینکه مؤلفه‌های دومشان نیز یکسان باشد (تکراری باشد).

$$\begin{cases} (5, -4) \\ (5, n^2 - 5n) \end{cases} \rightarrow n^2 - 5n = -4 \Rightarrow n^2 - 5n + 4 = 0 \Rightarrow (n-1)(n-4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} n=1 \\ n=4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (n, 4) \\ (1, n) \end{cases} \xrightarrow{n=1} \begin{cases} (1, 4) \\ (1, 1) \end{cases} \Rightarrow \text{تابع نیست} \Rightarrow n \neq 1$$

$$\begin{cases} (n, 4) \\ (1, n) \end{cases} \xrightarrow{n=4} \begin{cases} (4, 4) \\ (1, 4) \end{cases} \Rightarrow \text{تابع است} \Rightarrow n=4$$

$$x^n + xn^n = 8x^n \xrightarrow{n=4} x^4 + 16x = 8x^4 \Rightarrow x^4 - 8x^4 + 16x = 0 \Rightarrow x(x^3 - 8x + 16) = 0 \Rightarrow x(x-4)^2 = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ (x-4)^2 = 0 \Rightarrow x=4 \end{cases}$$

دو جواب متمایز

۳ - گزینه ۱

معادله‌ی سهمی که دامنه آن نقطه‌ی x_0 باشد، به فرم $y = a(x - x_0)^2 + y_0$ است.

با استفاده از رأس S_1 ، معادله‌ی سهمی را می‌نویسیم:

$$y = a(x - 1)^2 + 1$$

حال مختصات نقطه‌ی $\left| \begin{matrix} 0 \\ 2 \end{matrix} \right|$ که روی سهمی است را در آن قرار می‌دهیم:

$$\left| \begin{matrix} 0 \\ 2 \end{matrix} \right| \Rightarrow 2 = a(0 - 1)^2 + 1 \Rightarrow 2 = a + 1 \Rightarrow a = 1$$

پس معادله‌ی سهمی عبارتست از:

$$y = (x - 1)^2 + 1$$

معادله‌ی خط نیز با استفاده از دو نقطه‌ی $\left| \begin{matrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \end{matrix} \right|$ و $\left| \begin{matrix} 1 \\ 1 \end{matrix} \right|$ به صورت زیر است:

$$y - 0 = \frac{1 - 0}{0 - (-\frac{1}{2})} (x + \frac{1}{2}) \Rightarrow y = \frac{1}{\frac{1}{2}} (x + \frac{1}{2}) \Rightarrow y = 2(x + \frac{1}{2}) \Rightarrow y = 2x + 1$$

پس تابع $f(x)$ ضابطه‌ای به فرم زیر خواهد داشت:

$$f(x) = \begin{cases} (x-1)^2 + 1 & x \geq 0 \\ 2x + 1 & x < 0 \end{cases}$$

در نتیجه:

$$\left. \begin{aligned} f(3) &= \text{ضابطه‌ی بالا} (3-1)^2 + 1 = 4 + 1 = 5 \\ f(4) &= \text{ضابطه‌ی بالا} (4-1)^2 + 1 = 9 + 1 = 10 \\ f(-1) &= \text{ضابطه‌ی پایین} 2(-1) + 1 = -1 \\ f(-3,5) &= \text{ضابطه‌ی پایین} 2(-3,5) + 1 = -7 + 1 = -6 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{f(3) - f(4)}{-f(-1) + f(-3,5)} = \frac{5 - 10}{-(-1) - 6} = \frac{-5}{-5} = 1$$

۴ - گزینه ۴

$$x^2 = x + 6 \Rightarrow x^2 - x - 6 = 0 \Rightarrow (x-3)(x+2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x-3=0 \Rightarrow x=3 \\ x+2=0 \Rightarrow x=-2 \end{cases}$$

$$x = 3 : \begin{cases} 2x^2 - 6 = 2(9) - 6 = 18 - 6 = 12 \\ 4x = 12 \end{cases} \Rightarrow a = b \text{ (غ ق)}$$

$$x = -2 : \begin{cases} 2x^2 - 6 = 2(4) - 6 = 8 - 6 = 2 \\ 3x = -6 \end{cases}$$

۵ - گزینه ۱

$$D_f = (-2, 3] \Rightarrow -2 < x \leq 3 \xrightarrow{\times \frac{3}{2}} -3 < \frac{3}{2}x \leq \frac{9}{2} \xrightarrow{-1} -4 < \frac{3}{2}x - 1 \leq \frac{7}{2}$$

$$\Rightarrow \left| \frac{3}{2}x - 1 \right| < 4 \xrightarrow{+1} 1 \leq \left| \frac{3}{2}x - 1 \right| + 1 < 5 \Rightarrow 1 \leq f(x) < 5 \Rightarrow R_f = [1, 5)$$

۶ - گزینه ۲ با قرار دادن $x = 3$ ، $f(x)$ را تعیین می‌کنیم:

$$xf(3) + 3f(x) = x + 6 \xrightarrow{x=3} 3f(3) + 3f(3) = 3 + 6$$

$$\rightarrow 6f(3) = 9 \rightarrow f(3) = \frac{9}{6} = \frac{3}{2}$$

رابطه‌ی اصلی به صورت زیر درمی‌آید:

$$x \times \frac{3}{2} + 3f(x) = x + 6 \rightarrow 3f(x) = -\frac{3}{2}x + x + 6 \rightarrow 3f(x) = -\frac{1}{2}x + 6$$

$$\xrightarrow{\div 3} f(x) = -\frac{1}{6}x + 2$$

و در آخر $f(6)$ را محاسبه می‌کنیم:

$$\xrightarrow{x=6} f(6) = -\frac{1}{6} \times 6 + 2 = -1 + 2 = 1$$

۷ - گزینه ۳

می‌دانیم: $f(x) = mx + n$ کلی تابع خطی است.

$$f(x) = mx + n \xrightarrow{(0,0)} f(0) = n \Rightarrow f(x) = mx$$

بررسی گزینه‌ها:

$$1) \begin{cases} f(a+b) = m(a+b) = ma+mb \\ f(a)+f(b) = ma+mb \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} f(a-b) = m(a-b) = ma-mb \\ f(a)-f(b) = ma-mb \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} f(ab) = m(ab) \\ f(a)f(b) = (ma)(mb) = m^2(ab) \end{cases}$$

$$4) \begin{cases} f(ka) = m(ka) = mka \\ kf(a) = k(ma) = kma = mka \end{cases}$$

۸ - گزینه ۲

$$D_f = [-3, -1] \cup [0, 6]$$

$$R_f = [-4, 1]$$

$$D_f \cup R_f = [-4, 6] \xrightarrow{\text{اعداد صحیح نامشیت}} \{-4, -3, -2, -1, 0\}$$

۹ - گزینه ۱ می‌دانیم: رابطه‌ای تابع است که هیچ دو زوج مرتب متمایزی در آن مؤلفه اول یکسان نداشته باشند.

رابطه R را به صورت زیر با زوج‌های مرتب آن نمایش می‌دهیم:

$$R = \{(3, 1), (3, 3), (4, 1), (4, 2), (4, 4), (5, 1), (5, 5), (6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 6)\}$$

زوج‌های مرتب مشخص شده را حذف می‌کنیم تا R یک تابع شود؛ یعنی حداقل ۷ زوج مرتب.

۱۰ - گزینه ۲

$$\begin{cases} \sqrt{x} = 5 \Rightarrow x = 25 \Rightarrow f(5) = f(\sqrt{25}) = 25 - \sqrt{25} = 25 - 5 = 20 \\ \sqrt{x} = 4 \Rightarrow x = 16 \Rightarrow f(4) = f(\sqrt{16}) = 16 - \sqrt{16} = 16 - 4 = 12 \Rightarrow 2f(4) = 24 \\ f(5) - 2f(4) = 20 - 24 = -4 \end{cases}$$

۱۱ - گزینه ۴

می‌دانیم: $f(x) = ax + b$ فرم تابع خطی $f(x)$ است.

$$\begin{cases} f(x) = ax + b \\ f(-x) = -ax + b \end{cases} \Rightarrow f(x) + f(-x) = ax + b - ax + b = 2b = -12 \Rightarrow b = -6$$

$$\begin{cases} f(4) = 4a - 6 \\ f(1) = a - 6 \end{cases} \Rightarrow f(4) = -2f(1) \Rightarrow 4a - 6 = -2(a - 6) \Rightarrow 4a - 6 = -2a + 12 \Rightarrow 6a = 18 \Rightarrow a = 3$$

$$f(x) = 3x - 6 \Rightarrow f(10) = 3 \times 10 - 6 = 30 - 6 = 24$$

۱۲ - گزینه ۴

$$f(x) = \frac{x-1}{2} \Rightarrow \begin{cases} f(0) = \frac{-1}{2} \\ f(2) = \frac{1}{2} \Rightarrow 3f(2) = \frac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow 3f(2) - f(0) = \frac{3}{2} - \left(\frac{-1}{2}\right) = 2 = f(a)$$

$$f(a) = 2 = \frac{a-1}{2} \Rightarrow a-1 = 4 \Rightarrow a = 5$$

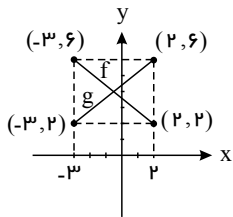
۱۳ - گزینه ۳

می‌دانیم: دامنه تابع مجموعه مقادیر ممکن برای x و برد تابع مجموعه مقادیر ممکن برای y است.

بررسی گزینه‌ها:

۱) $D_f = \mathbb{R}$, $R_f = \mathbb{R}$ $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{R} \Rightarrow R_f \subseteq D_f$
 ۲) $D_f = \mathbb{R}$, $R_f = [0, +\infty)$ $[0, +\infty) \subseteq \mathbb{R} \Rightarrow R_f \subseteq D_f$
 ۳) $D_f = [-1, 0) \cup (0, 1)$, $R_f = (-1, 1)$ $\Rightarrow R_f \not\subseteq D_f$
 ۴) $D_f = \mathbb{R}$, $R_f = [-4, 4]$ $[-4, 4] \subseteq \mathbb{R} \Rightarrow R_f \subseteq D_f$

۱۴ - گزینه ۲ به کمک شکل خیلی راحت می‌توان فهمید که تنها دو تابع خطی با این ویژگی‌ها وجود دارد. بنابراین کفایت با توجه به شکل، توابع f و g را به دست آوریم و سپس حاصل $f(1) + g(1)$ را محاسبه کنیم:



$$1) f(x) = ax + b \Rightarrow \begin{cases} f(2) = 2 \Rightarrow 2a + b = 2 \\ f(-3) = 6 \Rightarrow -3a + b = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a + b = 2 \\ -3a + b = 6 \end{cases}$$

$$\Delta a = -4 \Rightarrow a = \frac{-4}{5} \Rightarrow b = \frac{18}{5}$$

$$\Rightarrow f(x) = -\frac{4}{5}x + \frac{18}{5} \Rightarrow f(1) = \frac{14}{5}$$

$$2) g(x) = cx + d \Rightarrow \begin{cases} g(2) = 6 \Rightarrow 2c + d = 6 \\ g(-3) = 2 \Rightarrow -3c + d = 2 \end{cases} \Rightarrow \Delta c = 4 \Rightarrow \begin{cases} 2c + d = 6 \\ -3c + d = 2 \end{cases}$$

$$c = \frac{4}{5}, d = \frac{22}{5}$$

$$\Rightarrow g(x) = \frac{4}{5}x + \frac{22}{5} \Rightarrow g(1) = \frac{26}{5}$$

$$f(1) + g(1) = \frac{14}{5} + \frac{26}{5} = \frac{40}{5} = 8$$

۱۵ - گزینه ۳

می‌دانیم: $(\text{طول} + \text{عرض}) \times 2 = \text{محیط مستطیل}$

اگر طول مستطیل را x فرض کنیم، عرض آن برابر است با $2 - \frac{x}{2}$ بنابراین:

$$P(x) = 2 \times \left(\frac{x}{2} - 2 + x\right) = 2\left(\frac{3x}{2} - 2\right) = 3x - 4$$

۱۶ - گزینه ۴

می‌دانیم: در نمایش زوج مرتبی، دامنه تابع مجموعه مؤلفه‌های اول زوج مرتب‌های تشکیل‌دهنده تابع است و برد تابع مجموعه مؤلفه‌های دوم زوج مرتب‌های تشکیل‌دهنده تابع است.

$$f(a) = b \Leftrightarrow (a, b)$$

$$f = \{(-1, 2m+1), (2, 3-m), (-6, 2), (-m, m-1)\} \Rightarrow \begin{cases} f(-1) = 2m+1 \\ f(2) = 3-m \\ f(-6) = 2 \\ f(-m) = m-1 \end{cases}$$

$$f(2) - f(-6) + 2f(-1) = 9 \Rightarrow 3-m - (2) + 2(2m+1) = 9$$

$$\Rightarrow 3-m-2+4m+2=9 \Rightarrow 3m=6 \Rightarrow m=2$$

$$R_f = \{2m+1, 3-m, 2, m-1\} \xrightarrow{m=2} R_f = \{5, 1, 2, 1\} = \{5, 1, 2\}$$

۱۷ - گزینه ۲

می‌دانیم: تعداد اعضای دامنه باید از تعداد اعضای برد بیشتر و یا با آن مساوی باشند تا رابطه تابع باشد.

$$55 - 4n \geq 2n + 1 \Rightarrow 6n \leq 54 \Rightarrow n \leq 9$$

۱۸ - گزینه ۲ در نمودار پیکانی یک تابع، به هر عضو مجموعه‌ی A ، دقیقاً یک عضو از مجموعه‌ی B نسبت داده می‌شود. توجه: با تعریف فوق، هیچ‌یک از اعضای مجموعه‌ی A نباید بدون پیکان باشند.

۱۹ - گزینه ۱ رابطه‌ای تابع است که در آن به ازای یک ورودی (مؤلفه اول زوج‌های مرتب) تنها یک خروجی (مؤلفه دوم زوج‌های مرتب) وجود داشته باشد.

چون $(3, m^2)$ و $(3, m+2)$ هر دو عضو f هستند، باید:

$$m^2 = m+2 \Rightarrow m^2 - m - 2 = 0 \Rightarrow (m-2)(m+1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} m=2 \\ m=-1 \end{cases}$$

با هر دو مقدار m تابع را تشکیل می‌دهیم:

$$m = -1 \Rightarrow f = \{(3, 1), (2, 1), (-3, -1), (-2, -1), (3, 1), (-1, 4)\} \Rightarrow \text{تابع است.}$$

$$m = -2 \Rightarrow f = \{(3, 4), (2, 1), (-3, 2), (-2, 2), (3, 4), (2, 4)\} \Rightarrow \text{تابع نیست.}$$

ورودی یکسان و خروجی متفاوت

پس فقط به ازای یک مقدار m ، تابع است.

۲۰ - گزینه ۳ رابطه‌ای تابع است که در نمودار پیکانی آن، از هر عضو مجموعه‌ی A دقیقاً یک پیکان خارج شود. پس در مجموعه سمت راست باید دو تا از پیکان‌های خارج شده از B را حذف کنیم و از C و D نیز هر کدام یک پیکان می‌بایست حذف شود؛ یعنی مجموعاً ۴ پیکان.

۲۱ - گزینه ۱ رابطه‌ای تابع است که در آن هیچ‌یک از دو زوج مرتب متمایز دارای مؤلفه اول مساوی نباشند.

$$\left. \begin{array}{l} (4, a^2 + 4) \in R \\ (4, 5) \in R \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{شرط تابع} \\ \text{بودن} \end{array} \rightarrow a^2 + 4 = 5 \Rightarrow a^2 = 1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a=1 \Rightarrow R = \{(2, b), (4, 3), (4, 5)\} \\ a=-1 \Rightarrow R = \{(2, b), (2, 3), (4, 5)\} \end{cases}$$

تابع نیست.

برای این‌که به ازای $a = -1$ ، R تابع باشد باید زوج‌های مرتب $(2, b)$ و $(2, 3)$ با هم برابر باشند؛ یعنی: $b = 3$

پس: $(a, b) = (-1, 3)$

۲۲ - گزینه ۴ طبق فرض x های موجود در دامنه‌ی تابع عبارتند از: $x \geq 3$

حال $f(x)$ را با استفاده از این دامنه می‌سازیم تا برد آن مشخص شود:

$$\xrightarrow{\times 2} 2x \geq 6 \xrightarrow{-1} \underbrace{2x-1}_{f(x)} \geq 5 \rightarrow f(x) \geq 5 \rightarrow \text{برد } f = [5, +\infty)$$

همین کار را برای تابع $g(x)$ نیز انجام می‌دهیم:

$$g \text{ دامنه‌ی } = (-\infty, 3) \rightarrow x \leq 3 \rightarrow \frac{1}{3}x \leq 1 \rightarrow \frac{1}{3}x + 3 \leq 4 \rightarrow g(x) \leq 4$$

$$g \text{ برد } = (-\infty, 4]$$

و اجتماع بردها عبارتست از: $R - (4, 5)$

۲۳ - گزینه ۳

رابطه‌ای تابع است که در آن هیچ دو زوج مرتب متمایزی، مولفه‌ی اول برابر نداشته باشند و اگر مولفه‌ی اول آنها برابر بود، حتماً مؤلفه‌ی دوم آنها نیز برابر باشند.

$$\left. \begin{array}{l} (1, 3) \in f \\ (1, m^2 - 2m) \in f \end{array} \right\} \Rightarrow m^2 - 2m = 3 \Rightarrow m^2 - 2m - 3 = 0 \Rightarrow (m-3)(m+1) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m=3 \rightarrow f = \{(1, 3), (3, 2), (-1, \frac{1}{3})\} \text{ تابع است} \\ m=-1 \rightarrow f = \{(1, 3), (-1, 2), (-1, -1)\} \text{ تابع نیست} \end{cases}$$

پس تنها مقدار قابل قبول برای m عدد ۳ است، حال معادله را حل می‌کنیم:

$$\xrightarrow{m=3} x^3 - 6x^2 + 9x = 0 \Rightarrow x(x^2 - 6x + 9) = 0 \Rightarrow x(x-3)^2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = 0 \end{cases}$$

معادله دو جواب متمایز دارد.

۲۴ - گزینه ۲

دامنه‌ی تابع عبارتست از تصویر نمودار تابع بر روی محور x ها و برد تابع، تصویر نمودار بر روی محور y ها است.

سایه‌ی نمودار $f(x)$ بر روی محور x ها عبارتست از:

$$D_f = [-3, -1) \cup [0, 6)$$

۲۵ - گزینه ۳ رابطه‌ی تابع است که در آن هیچ دو زوج مرتبی، مؤلفه‌ی اول یکسان نداشته باشند.

$$\begin{cases} (\sqrt{3}, 7) \in f \\ (\sqrt{3}, a^2 + 3) \in f \end{cases} \Rightarrow a^2 + 3 = 7 \Rightarrow a^2 = 4 \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ a = -2 \end{cases}$$

$$a = 2 \Rightarrow \begin{cases} (2, 1) \in f \\ (2, 2) \in f \end{cases} \Rightarrow f \text{ تابع نیست}$$

$$a = -2 \rightarrow \begin{cases} (-2, b) \in f \\ (-2, 1) \in f \end{cases} \Rightarrow b = 1$$

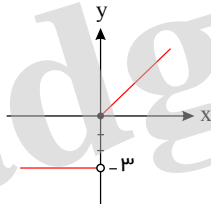
$$\Rightarrow a + b = -2 + 1 = -1$$

۲۶ - گزینه ۱ تابع همانی، شامل زوج‌های مرتبی است که مؤلفه‌ی اول و دوم آن‌ها با هم برابر است.

$$\left. \begin{aligned} n - 1 = 3 &\Rightarrow n = 4 \\ 3m - 2 = 4 &\Rightarrow 3m = 6 \Rightarrow m = 2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{m}{n} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

۲۷ - گزینه ۳ دامنه تابع عبارتست از تصویر نمودار آن بر روی محور x ها برد تابع عبارتست از تصویر نمودار آن بر روی محور y ها

$$\text{تابع } f(x) = \begin{cases} x & , x \geq 0 \\ -3 & , x < 0 \end{cases}$$

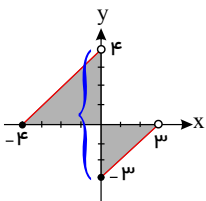


طبق شکل می‌بینیم برای $x \geq 0$ ، مقدار تابع در بازه‌ی $[0, +\infty)$ تغییر میکند و در ضابطه‌ی دوم وقتی $x < 0$ است مقدار تابع تنها عدد -3 است. پس برد تابع عبارت است از:

$$R_f = [0, +\infty) \cup \{-3\}$$

۲۸ - گزینه ۲ برد تابع عبارتست از تصویر نمودار آن بر روی محور y ها

برای توابعی که نمودار آن‌ها داده شده است، تصویر تمام نقاط نمودار روی محور y ها برد تابع را مشخص می‌کنند.



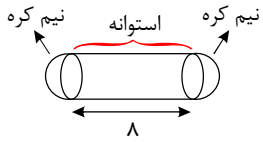
$$R_f = [-3, 4)$$

دقت کنید که عدد ۴، عضو برد تابع نیست.

۲۹ - گزینه ۲ ارتفاع \times مساحت قاعده = حجم استوانه

$$\text{حجم کره} = \frac{4}{3} \pi \times (\text{شعاع})^3$$

تانکر به شکل زیر است:



$$V(r) = 2 \times (\text{حجم نیم کره}) + \text{حجم استوانه}$$

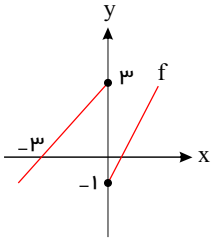
$$= \text{حجم استوانه} + \text{حجم یک کره کامل}$$

$$= \frac{4}{3}\pi r^3 + \pi r^2 h = \frac{4}{3}\pi r^3 + 8\pi r^2$$

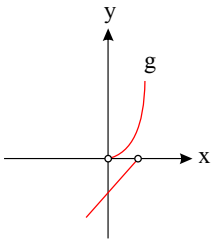
۳۰ - گزینه ۳ . رابطه‌ای تابع است که هر خط عمودی (قائم)، نمودار آن را حداکثر در یک نقطه قطع کند .

نمودار هر گزینه را رسم می‌کنیم:

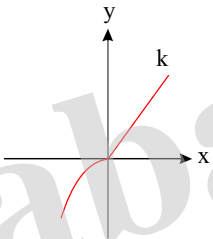
گزینه ۱:



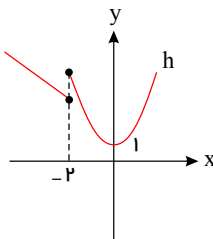
گزینه ۲:



گزینه ۳:



گزینه ۴:



با توجه به نمودارها، تنها گزینه‌ی ۳، تابع است.