

پاسخنامه تشریحی

۱ - گزینه ۲

$$6x^2 + (k+1)x + k = 0 \Rightarrow \text{مجموع ریشه‌ها} = -\frac{b}{a} = -\frac{k+1}{6} = \frac{1}{6}$$

$$\Rightarrow k+1 = -1 \Rightarrow k = -2 \Rightarrow \text{معادله: } 6x^2 - x - 2 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4 \times 6 \times (-2) = 1 + 48 = 49 \Rightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1 \pm \sqrt{49}}{2 \times 6}$$

$$\Rightarrow \text{ریشه‌ی مثبت} = \frac{1+7}{12} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$$

۲ - گزینه ۱

$$x^2 + 10x^2 + 9 = 0 \Rightarrow (x^2)^2 + 10x^2 + 9 = 0 \xrightarrow{\text{اتحاد جمله‌ی مشترک}} (x^2 + 9)(x^2 + 1) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^2 + 9 = 0 \rightarrow x^2 = -9 \rightarrow \text{ریشه‌ی حقیقی ندارد} \\ x^2 + 1 = 0 \rightarrow x^2 = -1 \rightarrow \text{ریشه‌ی حقیقی ندارد} \end{cases}$$

۳ - گزینه ۲

$$2x^2 + ax + 4 = 0 \begin{cases} a = x^2 \text{ ضریب} = 2 \\ b = x \text{ ضریب} = a \\ c = \text{عدد ثابت} = 4 \end{cases}$$

در معادله‌ی درجه‌ی دوم به فرم $ax^2 + bx + c = 0$ مجموع ریشه‌ها از رابطه‌ی $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ به دست می‌آید، که طبق گفته‌ی مسأله این مقدار برابر $-\frac{9}{2}$ است:

$$-\frac{b}{a} = -\frac{a}{2} = -\frac{9}{2} \rightarrow 2a = 18 \rightarrow a = \frac{18}{2} = 9$$

عدد $a = 9$ را در معادله جای گذاری می‌کنیم و معادله به صورت $2x^2 + 9x + 4 = 0$ درمی‌آید.

$$\Delta = b^2 - 4ac = (9)^2 - 4(2)(4) = 81 - 32 = 49$$

$$x_1, x_2 = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-9 \pm \sqrt{49}}{2(2)} = \frac{-9 \pm 7}{4} \rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{-9+7}{4} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2} \\ x_2 = \frac{-9-7}{4} = \frac{-16}{4} = -4 \end{cases}$$

ریشه‌ی بزرگ‌تر عدد $-\frac{1}{2}$ است.

۴ - گزینه ۱

$$2x^2 + kx + 1 - k = 0 \Rightarrow \text{حاصل ضرب ریشه‌ها} = \frac{c}{a} = 5 \Rightarrow \frac{1-k}{2} = 5 \Rightarrow 1-k = 10 \Rightarrow k = -9$$

$$\Rightarrow \text{معادله: } 2x^2 - 9x + 10 = 0 \Rightarrow \Delta = b^2 - 4ac = (-9)^2 - 4 \times 2 \times 10 = 81 - 80 = 1$$

$$\Rightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{9 \pm \sqrt{1}}{2(2)} \Rightarrow \text{ریشه‌ی بزرگ‌تر} = \frac{9+1}{4} = \frac{10}{4} = 2,5$$

۵ - گزینه ۴ اگر دو ریشه‌ی معادله را x' و x'' بنامیم در صورتی معکوس یکدیگرند که حاصل ضرب آن‌ها برابر یک شود (با شرط $\Delta > 0$)

$$x'x'' = 1 \rightarrow \frac{c}{a} = 1 \rightarrow \frac{2m+6}{2} = 1 \rightarrow 2m+6 = 2 \rightarrow 2m = 2-6 \rightarrow 2m = -4 \rightarrow m = -2$$

$$\text{مجموع ریشه‌ها} = \frac{-b}{a} \rightarrow x' + x'' = \frac{-3m}{2} = \frac{-3(-2)}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

۶ - گزینه ۳ ابتدا معادله را به شکل استاندارد می‌نویسیم:

$$x(2x - 5) = a \Rightarrow 2x^2 - 5x - a = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = x^2 \text{ ضریب} = 2 \\ b = x \text{ ضریب} = -5 \\ c = \text{عدد ثابت} = -a \end{cases}$$

ریشه‌ی مضاعف معادله‌ی درجه‌ی دوم $ax^2 + bx + c = 0$ از رابطه‌ی $x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a}$ به دست می‌آید. پس $x_1 = x_2 = \frac{-(-5)}{2(2)} = \frac{5}{4}$ است.

$$۷ - \text{گزینه } ۲ \text{ ریشه‌های معادله، اعداد } \frac{2 \pm \sqrt{3}}{2} = \frac{2}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} = 1 \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ هستند.}$$

ابتدا یک بار مجموع ریشه‌های (S) و سپس حاصل ضرب ریشه‌ها (f) را به دست می‌آوریم:

$$S = 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} + 1 - \frac{\sqrt{3}}{2} = 2$$

$$P = \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \stackrel{\text{اتحاد مزدوج}}{=} (1)^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$$

حال مقادیر $S = 2$ و $P = \frac{1}{4}$ را در معادله‌ی $x^2 - Sx + P = 0$ جایگزین کرده و به معادله‌ی $x^2 - 2x + \frac{1}{4} = 0$ می‌رسیم.

۸ - گزینه ۲ مقدار $x = 3$ را در معادله جایگذاری می‌کنیم:

$$\frac{x-2}{ax-5} = \frac{a+2}{x-1} - 1 \xrightarrow{x=3} \frac{3-2}{3a-5} = \frac{a+2}{3-1} - 1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{3a-5} = \frac{a+2-2}{2} \Rightarrow \frac{1}{3a-5} = \frac{a}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{3a-5} - \frac{a}{2} = 0 \Rightarrow \frac{2-3a^2+5a}{2(3a-5)} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{-3a^2+5a+2}{6a-10} = 0 \Rightarrow -3a^2+5a+2 = 0$$

$$\Rightarrow (3a+1)(2-a) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a=2 \\ a=-\frac{1}{3} \end{cases}$$

۹ - گزینه ۲ روش اول:

ابتدا در معادله به جای x عدد ۱ قرار می‌دهیم:

$$\frac{4}{a-2} + \frac{a}{2} = a \quad (1) \rightarrow \frac{4}{a-2} = \frac{a}{2} \rightarrow a^2 - 2a = 8$$

$$\rightarrow a^2 - 2a - 8 = 0 \xrightarrow{\text{تجزیه}} (a-4)(a+2) = 0 \Rightarrow a = -2, 4$$

روش دوم:

با امتحان کردن گزینه‌ها در رابطه (۱) می‌بینیم که گزینه (۲) صحیح است. یعنی ۴ و -۲ صدق می‌کنند.

۱۰ - گزینه ۱ در معادله‌ی درجه‌ی دوم $ax^2 + bx + c = 0$ با ریشه‌های x_1 و x_2 داریم:

$$S = x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}, \quad P = x_1 x_2 = \frac{c}{a} \rightarrow \begin{cases} S = \frac{-1}{3} \\ P = \frac{-6}{3} \end{cases}$$

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} \stackrel{\text{مخرج مشترک}}{=} \frac{x_2 + x_1}{x_1 x_2} = \frac{\frac{-b}{a}}{\frac{c}{a}} = \frac{-1}{3} = \frac{3}{18} = \frac{1}{6}$$

۱۱ - گزینه ۲

$$عدد\ مورد\ نظر = x \Rightarrow \begin{cases} مربع = x^2 \\ ۲\ برابر\ عدد = 2x \Rightarrow x^2 = 2x + 3 \Rightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \\ ۳\ به\ علاوه = +3 \end{cases}$$

بنابراین گزینه ۲ است.

۱۲ - گزینه ۲

عدد مورد نظر را x در نظر می‌گیریم؛ داریم:

$$2x + 7 = \frac{1}{3}x + 8$$

$$\Rightarrow 2x - \frac{1}{3}x = 8 - 7$$

$$\Rightarrow \frac{5}{3}x = 1 \Rightarrow x = \frac{3}{5}$$

۱۳ - گزینه ۱ برای آنکه معادله $ax^2 + bx + c = 0$ ریشه مضاعف داشته باشد باید $\Delta = 0$ باشد به عبارتی داریم:

$$4x^2 - 12x - k = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 0 \Rightarrow (-12)^2 - 4(-4k) = 0 \Rightarrow 144 + 16k = 0 \Rightarrow 16k = -144 \Rightarrow k = -9$$

۱۴ - گزینه ۲

$$-3x^2 + 2x + 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} = \frac{-2}{-3} = \frac{2}{3} \\ x_1 x_2 = \frac{c}{a} = \frac{1}{-3} = -\frac{1}{3} \end{cases}$$

$$\Rightarrow x_1 + x_2 + x_1 x_2 = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

۱۵ - گزینه ۳ ابتدا $x = 2$ را در عبارت جایگزین می‌کنیم، خواهیم داشت:

$$x = 2 \Rightarrow 2^2 - a(2) + a + 1 = 0 \Rightarrow 5 - a = 0 \Rightarrow a = 5$$

$$\text{بنابراین } 2x^2 + 5x - 3 = 0$$

$$\Delta = 25 - 4(-6) = 49$$

$$x = \frac{-5 \pm 7}{4} \Rightarrow x_1 = \frac{1}{4}, x_2 = -3$$

۱۶ - گزینه ۲

۵ واحد اضافه می‌کنیم ۲ برابر $\frac{1}{3}$ عددی $\frac{1}{3}$ عددی

→ →

$$\frac{1}{3}x \quad 2 \times \frac{1}{3}x \quad 2 \times \frac{1}{3}x + 5$$

$$2 \times \frac{1}{3}x + 5 = \frac{1}{3}x - 1 \xrightarrow{\times 6} 4x + 30 = 2x - 6 \Rightarrow 4x - 2x = -6 - 30 \Rightarrow x = -36$$

۱۷ - گزینه ۲ تعداد گروه اول $x =$

$$x + \frac{1}{2}x + \frac{1}{3} \times \frac{1}{2}x + 2 \times \frac{1}{2}x = 16$$

$$2x + \frac{1}{2}x + \frac{1}{6}x = 16 \Rightarrow \frac{16}{6}x = 16 \Rightarrow \frac{8}{3}x = 16 \Rightarrow x = \frac{16 \times 3}{8} = 6$$

$$x = \frac{3 \times 16}{8} = 6$$

$$\text{تعداد گروه دوم} = \frac{1}{2}x = \frac{1}{2} \times 6 = 3$$

۱۸ - گزینه ۴

$$9x^2 + 3x - 2 = 0 \Rightarrow (3x)^2 + 1(3x) - 2 = 0$$

اتحاد جمله مشترک

$$\rightarrow (3x + 2)(3x - 1) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3x + 2 = 0 \Rightarrow x = -\frac{2}{3} \\ 3x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{3} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{اختلاف جواب‌ها} = \left| \frac{1}{3} - \left(-\frac{2}{3}\right) \right| = \frac{3}{3} = 1$$

۱۹ - گزینه ۲ با جایگذاری $x = 1$ در معادله b به دست می‌آید:

$$x = 1 \Rightarrow \frac{(1)^2 - 8}{1 + 12} = \frac{1 - 3}{1 + 4} + \frac{b(1)^2}{1 + 3} \Rightarrow \frac{-7}{13} = \frac{-2}{5} + \frac{b}{4} \Rightarrow \frac{2}{5} - \frac{7}{13} = \frac{b}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{-35 + 36}{65} = \frac{b}{4} \Rightarrow \frac{-9}{65} = \frac{b}{4} \Rightarrow b = \frac{-36}{65}$$

۲۰ - گزینه ۳

$$-3x^2 + x + (k^2 + 1) = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 1^2 - 4(-3)(k^2 + 1) = 1 + 12(k^2 + 1) > 0$$

چون $\Delta > 0$ پس معادله همواره دو ریشه‌ی حقیقی دارد از طرفی:

$$\text{حاصل ضرب ریشه‌ها} = x_1 x_2 = \frac{c}{a} = \frac{k^2 + 1}{-3} < 0$$

چون حاصل ضرب ریشه‌ها منفی شده، پس معادله دو ریشه‌ی مختلف‌العلامت دارد.

نکته: اگر $\frac{c}{a} < 0$ باشد، معادله‌ی درجه‌ی دوم حتماً دو ریشه‌ی حقیقی مختلف‌العلامت دارد و نیازی به چک کردن Δ نیست.

abadgaran.edu.ir