

۱- اگر نمودارهای f و g به صورت زیر باشند، دامنه تابع $\frac{f}{g}$ شامل چند عدد صحیح است؟

- ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)

۲- اگر $f = \{(1, 3), (-1, 0), (2, 1), (3, 1)\}$ و $Dg = \{3, 0, -1, -2\}$ آن گاه $D_{g \circ f}$ کدام است؟

- ۱ (۱) $\{-1, 1\}$ ۲ (۲) $\{0, 3\}$ ۳ (۳) $\{-1, 3\}$ ۴ (۴) $\{1, -1, 2, 3\}$

۳- اگر $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$ و $f \circ g(x) = \frac{x-3}{x+3}$ آن گاه ضابطه $g(x)$ کدام است؟

- ۱ (۱) $g(x) = \frac{x}{3}$ ۲ (۲) $g(x) = -\frac{x}{3}$ ۳ (۳) $g(x) = \frac{3x}{2}$ ۴ (۴) $g(x) = -\frac{2x}{3}$

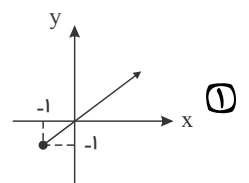
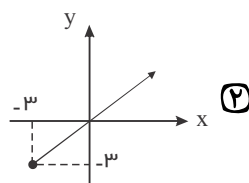
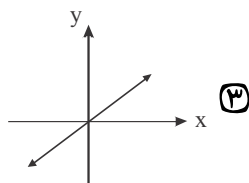
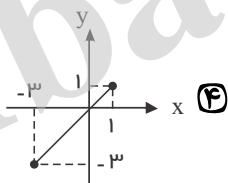
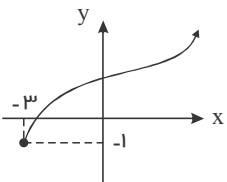
۴- اگر $f + g = \{(3, 2), (4, 2), (5, -1)\}$ و $f - g = \{(3, 6), (4, 6), (5, 1)\}$ آن گاه دامنه تابع $\frac{1}{f}$ شامل چند عدد حقیقی است؟

- ۱ (۱) ۳ ۲ (۲) ۱ (۳) ۴ (۴) قابل تشخیص نمی‌باشد.

۵- اگر $f = \{(2, 1), (1, 6), (4, 6)\}$ و $g = \{(1, 2), (2, 4), (6, 1)\}$ باشد، آنگاه برد تابع $\frac{2f+g}{f \circ g}$ کدام است؟

- ۱ (۱) $\{1, \frac{3}{2}\}$ ۲ (۲) $\{1, 14\}$ ۳ (۳) $\{\frac{3}{2}\}$ ۴ (۴) $\{14\}$

۶- اگر نمودار تابع معکوس‌پذیر f به صورت مقابل باشد، نمودار تابع $y = f^{-1} \circ f(x)$ کدام است؟



۷- اگر $f(x) = \sqrt{x-1} - 2$ و $g(x) = \frac{2x}{x+3}$ باشد ریشه‌ی $f \circ g(x) = 0$ کدام است؟

- ۱ (۱) -۵ ۲ (۲) ۵ ۳ (۳) ۴ ۴ (۴) -۴

۸- اگر $f(x) = [2x] + [-2x]$ آن گاه $f \circ f \circ f(\sqrt{2})$ کدام است؟

- ۱ (۱) ۱ ۲ (۲) ۰ ۳ (۳) -۱ ۴ (۴) $f(\sqrt{2})$

۹- اگر $f(x) = 2x + 2a$ و $g(x) = x^2 + bx + c$ و $f \circ g(x) = 2x^2 + x + 1$ آن گاه $a + b + c$ کدام است؟

- ۱ (۱) ۲ ۲ (۲) -۱ ۳ (۳) -۳ ۴ (۴) -۳

۱۰- اگر $f(x) = x + a$ و $g(x) = 2x - b$ و $f \circ g(2) = g \circ f(3)$ آن گاه a کدام است؟

- ۱ (۱) -۲ ۲ (۲) ۳ ۳ (۳) ۴ ۴ (۴) ۴

پاسخنامه تشریحی

۱ - گزینه ۱

با توجه به نمودار f و g داریم:

$$D_f = (-3, 3), \quad D_g = [-1, 1]$$

$$D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g - \{x | g(x) = 0\}, \quad D_f \cap D_g = [-1, 1]$$

$$g(x) = 0 \Rightarrow -1 \leq x \leq 1, \quad x \neq 0 \Rightarrow D_{\frac{f}{g}} = [-1, 1] - ([-1, 1] - \{0\}) = \{0\}$$

دامنه تابع $\frac{f}{g}$ فقط شامل عدد صحیح $x = 0$ است.

۲ - گزینه ۱

میدانیم:

$$D_{g \circ f} = \{x \in D_f, f(x) \in D_g\}$$

$$1 \xrightarrow{f} 3 \in D_g$$

$$-1 \xrightarrow{f} 0 \in D_g \Rightarrow D_{g \circ f} = \{-1, 1\}$$

$$2 \xrightarrow{f} 1 \notin D_g$$

$$3 \xrightarrow{f} 1 \notin D_g$$

۳ - گزینه ۲

$$f(g(x)) = \frac{x-3}{x+3} \rightarrow \frac{g(x)+1}{g(x)-1} = \frac{x-3}{x+3}$$

$$\Rightarrow \cancel{xg(x)} + x + 3g(x) + \cancel{1} = \cancel{xg(x)} - x - 3g(x) + \cancel{1}$$

$$6g(x) = -2x \Rightarrow g(x) = -\frac{x}{3}$$

۴ - گزینه ۴ با جمع کردن دو تابع $f+g$ و $f-g$ داریم:

$$(f+g) + (f-g) = 2f = \{(3, 8), (4, 8), (5, 0)\}$$

پس $f = \{(3, 4), (4, 4), (5, 0)\}$ پس این طور به نظر می رسد که:

$$\frac{1}{f} = \{(3, \frac{1}{4}), (4, \frac{1}{4})\}$$

یعنی دامنه آن شامل دو عدد است ولی با دقت بیشتر می توان فهمید که چون دامنه های $f+g$ و $f-g$ اشتراک دامنه های f و g هستند، دامنه f شامل اعداد دیگری هم می تواند باشد که با دامنه g مشترک نباشند. پس $\frac{1}{f}$ هم می تواند شامل زوج های بیش تری باشد. به طور کلی می توان گفت چون دامنه f مشخص نیست، پس دامنه $\frac{1}{f}$ مشخص نیست.

۵ - گزینه ۲ ابتدا زوج مرتب $2f+g$ و $2f$ را می یابیم.برای محاسبه $2f$ باید مؤلفه های دوم f را در ۲ ضرب کنیم.

$$2f = \{(2, 2), (1, 12), (4, 12)\}$$

برای محاسبه $2f+g$ باید زوج مرتب های $2f$ و g که مؤلفه های اول برابر دارند، مؤلفه های دوم آن ها را با هم جمع کنیم.

$$2f+g = \{(2, 6), (1, 14)\}$$

برای محاسبه ی زوج مرتب $f \circ g$ ، از تعریف تابع $f \circ g$ استفاده می کنیم.

$$D_{f \circ g} = \{x \in D_g, g(x) \in D_f\}$$

$$D_g \rightarrow g(x) \rightarrow f(x)$$

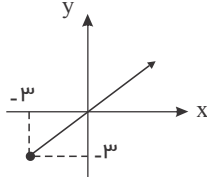
$$\left. \begin{array}{l} 1 \rightarrow 2 \rightarrow 1 \\ 2 \rightarrow 4 \rightarrow 6 \\ 6 \rightarrow 1 \rightarrow 6 \end{array} \right\} \Rightarrow f \circ g = \{(1, 1), (2, 6), (6, 6)\}$$

$$\Rightarrow \frac{2f+g}{f \circ g} = \left\{ \left(1, \frac{14}{1}\right), \left(2, \frac{6}{6}\right) \right\} = \{(1, 14), (2, 1)\}$$

$$D_f = [-3, +\infty) \quad R_f = [-1, +\infty)$$

۶ - گزینه ۲

$$y = f^{-1} \circ f(x) = x, \quad x \in D_f \Rightarrow y = x, \quad x \geq 3 \Rightarrow$$



۷ - گزینه ۱ ابتدا تابع $f(g(x))$ را تشکیل می دهیم:

$$f(g(x)) = 0$$

$$f(g(x)) = 0 \Rightarrow \sqrt{g(x) - 1} - 2 = 0 \Rightarrow \sqrt{g(x) - 1} = 2 \Rightarrow g(x) - 1 = 4$$

$$g(x) = 5 \Rightarrow \frac{2x}{x+3} = 5 \Rightarrow 2x = 5x + 15 \Rightarrow x = -5$$

۸ - گزینه ۲ میدانیم: $[f(x)] + [-f(x)] = \begin{cases} 0 & f(x) \in z \\ -1 & f(x) \notin z \end{cases}$ بنابراین:

$$[2x] + [-2x] = \begin{cases} 0 & 2x \in z \\ -1 & 2x \notin z \end{cases}$$

بنابراین $f \circ f(x) = 0$ و از آن جا $f \circ f(x) = f(0 \text{ یا } -1) = 0$

۹ - گزینه ۱

$$f(g(x)) = 2g(x) + 2a = 2(x^2 + bx + c) + 2a$$

$$\Rightarrow 2x^2 + x + 1 = 2x^2 + 2bx + 2(c + a)$$

$$x \text{ ضرب: } 2b = 1 \Rightarrow b = \frac{1}{2} \quad \text{و} \quad \text{عدد ثابت: } 1 = 2c + 2a \Rightarrow a + c = \frac{1}{2}$$

پس $a + b + c = 1$ است.

۱۰ - گزینه ۱

$$f(g(2)) = f(4 - b) = 4 - b + a$$

$$\Rightarrow \text{با هم برابرند} \Rightarrow 4 - b + a = 6 + 2a - b \rightarrow a = -2$$

$$g(f(3)) = g(3 + a) = 2(3 + a) - b$$

پاسخنامه کلیدی

۱ - ۱

۳ - ۲

۵ - ۲

۷ - ۱

۹ - ۱

۲ - ۱

۴ - ۴

۶ - ۲

۸ - ۲

۱۰ - ۱

AbadgaranEdu.ir