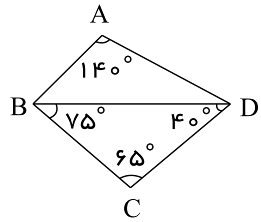
پاسخنامه تشریحی

۱ - گزینه ۴

$$\overset{\Delta}{BDC}: D\widehat{B}C = ۱۸۰^\circ - (۶۵^\circ + ۴۰^\circ) = ۷۵^\circ$$



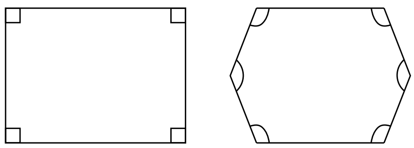
در مثلث ABD، زاویه‌ی A از دو زاویه‌ی دیگر بزرگ‌تر است پس BD بزرگ‌ترین ضلع مثلث ABD است. از طرفی:

$\overset{\Delta}{BDC}: ۷۵^\circ > ۶۵^\circ > ۴۰^\circ \Rightarrow DC > BD > BC$

پس DC بزرگ‌ترین پاره‌خط در شکل داده شده است.

۲ - گزینه ۴ مثال‌های نقض گزینه‌ی «۱»: تمام مثلث‌های قائم الزاویه، که محل همرسی ارتفاع‌های آن‌ها روی محیط مثلث قرار دارد.

مثال‌های نقض گزینه‌ی «۲»:



مثال‌های نقض گزینه‌ی «۳»:

۱. دو مستطیل به ابعاد ۴ × ۳ و ۶ × ۲

۲. دو مستطیل به ابعاد ۶ × ۴ و ۸ × ۳

تنها مثال نقض گزینه‌ی «۴»: عدد صفر است که اگر در $\sqrt{۲}$ ضرب شود، گنگ نمی‌شود.

۳ - گزینه ۱ قضیه‌ای را دو شرطی می‌گوئیم که خود قضیه و عکس آن، هر دو درست باشند، بنابراین، با بررسی گزینه‌ها در می‌یابیم که عکس قضیهٔ مربوط به گزینهٔ ۱ صحیح نیست. زیرا اگر زاویه‌های نظیر در دو مثلث مساوی باشند، الزاماً دو مثلث هم‌نهشت نیستند بلکه با این وضعیت می‌توان ادعا کرد دو مثلث متشابهند نه هم‌نهشت.

۴ - گزینه ۲ گزینهٔ «۱»: در استدلال استقرایی از جزء به کل می‌رسیم.

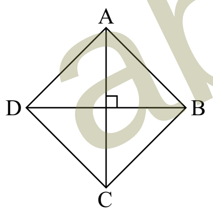
گزینهٔ «۳»: قضیه‌ها با استدلال استنتاجی ثابت می‌شوند.

گزینهٔ «۴»: عکس قضیه ممکن است درست باشد یا نادرست.

۵ - گزینه ۳

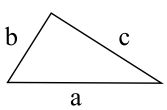
درستی بعضی از گزینه‌ها کاملاً مشخص است و به عنوان مثال نقض گزینهٔ «۳»، به شکل زیر توجه کنید:

در چهارضلعی $ABCD$، دو قطر AC و BD هم‌اندازه و بر هم عمود هستند، ولی این چهارضلعی مربع نیست.



۶ - گزینه ۴

نامساوی مثلث: $|b-c| < a < b+c$



طول اضلاع مثلث باید در نامساوی مثلثی صدق کند. داریم:

$۲x - ۲ + x + ۵ > x + ۱ \Rightarrow x > -۱$

$x + ۵ + x + ۱ > ۲x - ۲ \Rightarrow ۶ > -۲$ بدیهی

$۲x - ۲ + x + ۱ > x + ۵ \Rightarrow x > ۳$

بنابراین مقادیر قابل قبول برای x، به صورت $x > ۳$ است.

محیط مثلث $= x + ۵ + ۲x - ۲ + x + ۱ = ۴x + ۴$

$x > ۳ \Rightarrow ۴x > ۱۲ \Rightarrow ۴x + ۴ > ۱۶$

پس تنها عدد ۱۸ از بین گزینه‌ها می‌تواند محیط این مثلث باشد.

۷ - گزینه ۴ گزینه‌ها را به‌ترتیب بررسی می‌کنیم:

گزینهٔ «۱»: اگر طول کوچک‌ترین ضلع ۷ باشد، بدیهی است که طول دو ضلع دیگر بزرگ‌تر یا مساوی ۷ است که در این صورت حداقل محیط ۲۱ است. (تناقض)

گزینهٔ «۲»: اگر طول کوچک‌ترین ضلع ۳ و بزرگ‌ترین ۷ باشد، با توجه به اندازهٔ محیط مثلث، طول ضلع سوم ۸ می‌باشد که از طول بزرگ‌ترین ضلع (یعنی ۷) بیشتر است. (تناقض)

گزینهٔ «۳»: اگر طول بزرگ‌ترین ضلع ۹ باشد، با توجه به محیط ۱۸ واحدی، جمع دو ضلع دیگر ۹ است که در این حالت مثلث پدید نمی‌آید. (تناقض)

گزینهٔ «۴»: اگر طول کوچک‌ترین و بزرگ‌ترین ضلع به‌ترتیب ۴ و ۸ باشد، با توجه به اندازهٔ محیط مثلث، طول ضلع سوم برابر ۶ می‌باشد که سه عدد ۴، ۶ و ۸ در نامساوی مثلثی صدق می‌کنند.

۸ - گزینه ۴ عکس قضیه به‌صورت زیر است:

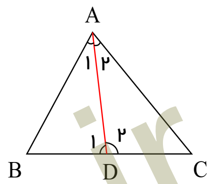
در مثلث ABC اگر $\hat{C} > \hat{B}$ باشد آن‌گاه $AB > AC$.

در اثبات با استفاده از برهان خلف، فرض خلف، نقیض حکم می‌باشد.

حکم : $AB > AC \Rightarrow$ (فرض خلف) نقیض حکم : $AB \leq AC$

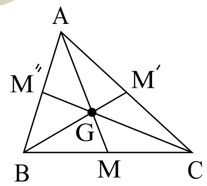
۹ - گزینه ۱ $D_۱$ زاویه‌ی خارجی مثلث $\overset{\Delta}{ADC}$ است

بنابراین:



$$\hat{D}_۱ > \hat{A}_۲ \xrightarrow{\hat{A}_۱ = \hat{A}_۲} \hat{D}_۱ > \hat{A}_۱ \xrightarrow{\overset{\Delta}{ABD}:} AB > BD$$

۱۰ - گزینه ۱ ابتدا ثابت می‌کنیم مجموع میانه‌های هر مثلث از $\frac{۳}{۴}$ محیط بزرگ‌تر و از محیط مثلث کوچکتر است. با توجه به این که میانه‌های هر مثلث یک دیگر را به نسبت ۲ به ۱ تقسیم می کنند، داریم:



$$\frac{AG}{AM} = \frac{۲}{۳} \text{ و } \frac{BG}{BM'} = \frac{۲}{۳} \text{ و } \frac{CG}{CM''} = \frac{۲}{۳}$$
$$\Rightarrow AG = \frac{۲}{۳}AM \text{ و } BG = \frac{۲}{۳}BM' \text{ و } CG = \frac{۲}{۳}CM''$$

همانطور که قبلاً ثابت کردیم، مجموع فواصل هر نقطه درون مثلث از رئوس آن از نصف محیط بزرگ‌تر است. لذا خواهیم داشت:

$$\frac{AB + AC + BC}{۲} < AG + BG + CG \Rightarrow \frac{AB + AC + BC}{۲} < \frac{۲}{۳}AM + \frac{۲}{۳}BM' + \frac{۲}{۳}CM''$$
$$\Rightarrow \frac{۳}{۴}(AB + AC + BC) < AM + BM' + CM''$$

طرف چپ نامساوی اثبات شد. برای اثبات طرف راست نامساوی نیز باید به نکته ی زیر که قبلاً اثبات کردیم، اشاره نمود:

«در هر مثلث، میانه ی نظیر هر ضلع از نصف مجموع ۲ ضلع دیگر کوچکتر است.»

با توجه به نکته ی فوق داریم:

$$\begin{cases} AM < \dfrac{AB + AC}{۲} \\ BM' < \dfrac{AB + BC}{۲} \\ CM'' < \dfrac{AC + BC}{۲} \end{cases} \xrightarrow{+} AM + BM' + CM'' < \frac{۲(AB + AC + BC)}{۲}$$
$$\Rightarrow AM + BM' + CM'' < AB + AC + BC$$

حال با توجه به دو اثبات مذکور داریم:

$$\frac{۳}{۴}(AB + AC + BC) < AM + BM' + CM'' < AB + AC + BC$$
$$\Rightarrow \frac{۳}{۴}(۵ + ۶ + ۹) < AM + BM' + CM'' < ۵ + ۶ + ۹$$
$$\Rightarrow ۱۵ < AM + BM' + CM'' < ۲۰ \Rightarrow ۱۵ < k < ۲۰$$

۱۱ - گزینه ۱ نقطه تلاقی عمود منصف ها به نوع مثلث بستگی دارد پس باید نوع آن را تشخیص دهیم.

$۱۲^۲, ۶^۲ + ۸^۲$

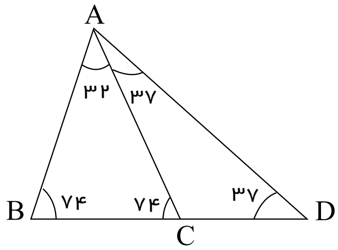
اگر برابر بود مثلث قائم الزاویه می شد ولی معلوم است که زاویه‌ی مقابل ۱۲ از ۹۰° بزرگ‌تر است.

$۱۴۴ > ۳۶ + ۶۴$
$۱۴۴ > ۱۰۰$

در نتیجه: در مثلث منفرجه الزاویه، محل تلاقی عمود منصف ها خارج مثلث است.

۱۲ ـ گزینه ۱ در مثلث متساوی الساقین میانه، ارتفاع و نیمساز وارد بر قاعده بر هم منطبق‌اند و یقیناً هم طولند.

۱۳ ـ گزینه ۳



$$\left.\begin{array}{l} A\hat{C}B = \dfrac{۱۸۰^\circ - ۳۲^\circ}{۲} = ۷۴^\circ \\ A\hat{C}D \text{ زاویه خارجی مثلث } A\hat{C}B \end{array}\right\} A\hat{D}C = \frac{A\hat{C}B}{۲} \Rightarrow ADC = \frac{۷۴^\circ}{۲} = ۳۷^\circ$$

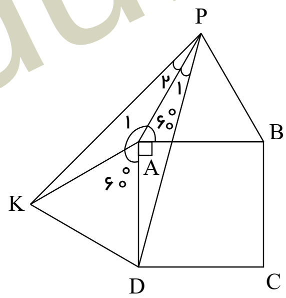
۱۴ ـ گزینه ۴

$$AC = AD \Rightarrow A\hat{C}D = A\hat{D}C \Rightarrow A\hat{C}B = C\hat{D}E \Rightarrow \overset{\Delta}{BCA} \overset{\text{ض ز ض}}{\cong} \overset{\Delta}{CDE} \Rightarrow \hat{E} = B\hat{A}C$$
$$\Rightarrow \hat{B} + \hat{E} = \hat{B} + B\hat{A}C = A\hat{C}D = \frac{۱۸۰^\circ - ۲۸^\circ}{۲} = ۷۶^\circ$$

توجه: زاویه $A\hat{C}D$ زاویه خارجی $\overset{\Delta}{ACB}$ است:

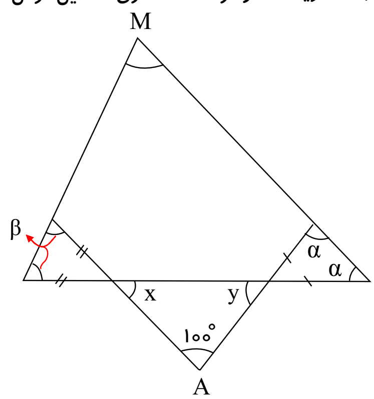
$(\hat{B} + B\hat{A}C = A\hat{C}D)$

۱۵ ـ گزینه ۲ با توجه به شکل داریم:



$$\hat{A}_۱ = ۳۶۰^\circ - (۶۰^\circ + ۶۰^\circ + ۹۰^\circ) = ۱۵۰^\circ$$
$$AP = AD \Rightarrow \hat{P}_۱ = \frac{۱۸۰^\circ - P\hat{A}D}{۲} = \frac{۱۸۰^\circ - ۱۵۰^\circ}{۲} = ۱۵^\circ$$
$$AP = AK \Rightarrow \hat{P}_۲ = \frac{۱۸۰^\circ - \hat{A}_۱}{۲} = \frac{۱۸۰^\circ - ۱۵۰^\circ}{۲} = ۱۵^\circ$$
$$D\hat{P}K = \hat{P}_۱ + \hat{P}_۲ = ۳۰^\circ$$

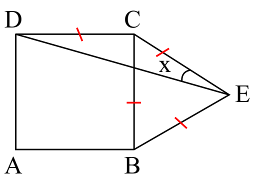
۱۶ ـ گزینه ۴ در دو مثلث متساوی الساقین فرض کنیم زوایای مجاور به قاعده در آنها β, α باشد با توجه به شکل $x + ۲\beta = ۱۸۰ \ , \ y + ۲\alpha = ۱۸۰$ داریم:



$$x + y = ۸۰^\circ \Rightarrow ۲\alpha + ۲\beta + (x + y) = ۲ \times ۱۸۰^\circ$$
$$\Rightarrow ۲(\alpha + \beta) = ۳۶۰^\circ - ۸۰^\circ = ۲۸۰^\circ$$
$$\Rightarrow \alpha + \beta = ۱۴۰^\circ \Rightarrow M = ۴۰^\circ$$

۱۷ ـ گزینه ۱

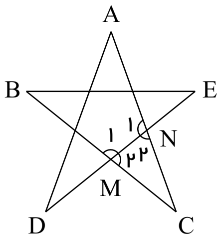
چون $ABCD$ مربع است، همه‌ی زوایای آن ۹۰° است و چون BCE مثلث متساوی‌الاضلاع است، همه‌ی زوایای آن ۶۰° است.



از طرفی $CE = DC$ (ضلع مربع، ضلع متساوی‌الاضلاع هم هست) بنابراین مثلث $\overset{\Delta}{DCE}$ متساوی‌الساقین است. چون $\hat{C} = ۹۰^\circ + ۶۰^\circ = ۱۵۰^\circ$ بنابراین:

$$x = \frac{۱۸۰^\circ - ۱۵۰^\circ}{۲} = ۱۵^\circ$$

۱۸ - گزینه ۱



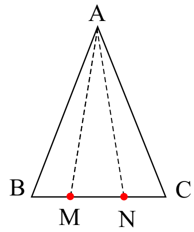
$\widehat{M}_2$ زاویه‌ی خارجی مثلث $\overset{\Delta}{MEB}$ است: $\widehat{M}_2 = \widehat{E} + \widehat{B}$

$\widehat{N}_2$ زاویه‌ی خارجی مثلث $\overset{\Delta}{ADN}$ است: $\widehat{N}_2 = \widehat{A} + \widehat{D}$

و در مثلث $\overset{\Delta}{MNC}$ داریم:

$$\hat{C} + \hat{M} + \hat{N} = 180^\circ \Rightarrow \hat{C} + \hat{A} + \hat{D} + \hat{E} + \hat{B} = 180^\circ$$

۱۹ - گزینه ۳

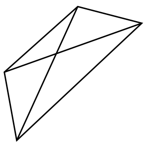


$$\begin{cases} AB = AC \\ BM = NC \\ \widehat{B} = \widehat{C} \end{cases} \xrightarrow{\text{ض ز ض}} \overset{\Delta}{ABM} \cong \overset{\Delta}{ANC} \xrightarrow{\text{تساوی اجزای متناظر}} AM = AN$$

۲۰ - گزینه ۴ مثال صفحه‌ی ۲۳ صریحاً بیان می‌کند که گزینه‌ی ۱ دوشرطی است.

در تمرین ۵ صفحه ۱۷ به نوعی عکس گزینه‌ی ۲ بیان شده است.

همچنین باتوجه به اینکه مثلث متساوی‌الاضلاع، سه ضلعی منتظم است. پس اگر سه زاویه در مثلثی برابر باشد، سه ضلع نیز حتماً برابرند. تنها گزینه‌ی ۴ نمی‌تواند دو شرطی باشد، زیرا اگر در یک چهارضلعی قطرها برابر باشند، آن چهارضلعی الزاماً مستطیل نیست. مثال نقض:



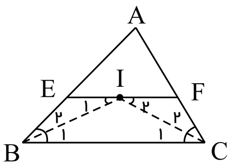
۲۱ - گزینه ۳ نقیض گزاره «هیچ مثلثی بیش از یک زاویه‌ی قائمه ندارد.» به صورت «مثلثی وجود دارد که حداقل دو زاویه‌ی قائمه داشته باشد» یا «مثلثی وجود دارد که دو یا سه زاویه‌ی قائمه داشته باشد» است.

۲۲ - گزینه ۳ استدلال استقرایی روش نتیجه‌گیری کلی بر مبنای مجموعه‌ی محدودی از مشاهدات است.

۲۳ - گزینه ۲ نکته: می‌دانیم اگر درهر مثلث سه زاویه تند باشند، محل همرسی ارتفاع‌ها داخل مثلث است. اگر یک زاویه‌ی قائمه باشد همرسی ارتفاع‌ها همان رأس قائمه است و اگر یک زاویه‌ی منفرجه داشته باشد محل همرسی ارتفاع‌ها خارج مثلث قرار دارد.

۲) $\widehat{B} = 70^\circ$, $\widehat{A} = 20^\circ \Rightarrow \widehat{C} = 90^\circ$ همرسی ارتفاع‌ها روی مثلث قرار دارد.

۲۴ - گزینه ۴ اگر نقطه‌ای به فاصله‌ی یکسان از دو ضلع یک زاویه باشد، روی نیم‌ساز آن زاویه قرار دارد. در نتیجه، BI و CI نیم‌ساز هستند.



$$\begin{cases} \text{نیم‌ساز } BI \Rightarrow \widehat{B}_1 = \widehat{B}_2 \\ \text{نیم‌ساز } CI \Rightarrow \widehat{C}_1 = \widehat{C}_2 \end{cases}$$

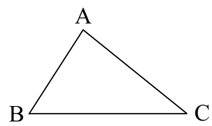
از طرفی باتوجه به قضیه‌ی خطوط موازی و مورب داریم:

$$EF \parallel BC \Rightarrow \begin{cases} \text{مورب } BI : \widehat{I}_1 = \widehat{B}_1 = \widehat{B}_2 \\ \text{مورب } CI : \widehat{I}_2 = \widehat{C}_1 = \widehat{C}_2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{Bmatrix} \text{متساوی‌الساقین } \overset{\Delta}{EBI} \Rightarrow BE = EI \\ \text{متساوی‌الساقین } \overset{\Delta}{FCI} \Rightarrow CF = FI \end{Bmatrix} \Rightarrow BE + CF = EI + FI = EF$$

۲۵ - گزینه ۱ نکته: اگر در مثلثی دو ضلع نابرابر باشد، زاویهٔ روبه‌رو به ضلع بزرگ‌تر، بزرگ‌تر از زاویهٔ روبه‌رو به ضلع کوچک‌تر است.

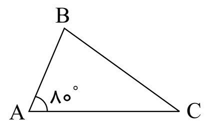
$$AB < AC \Rightarrow \hat{C} < \hat{B}$$



با توجه به نکته، در مثلث مذکور داریم:

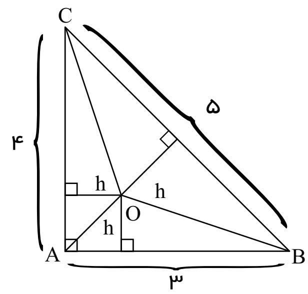
$$AC > BC > AB \Rightarrow \hat{B} > \hat{A} > \hat{C}$$

چون $\hat{A}=۸۰^\circ$، پس $\hat{B}>۸۰^\circ$. بنابراین برای اینکه $\hat{C}$ بیشترین مقدار را داشته باشد باید $\hat{B}$ کمترین مقدار را داشته باشد. چون زاویه‌ها عدد صحیح‌اند،
کمترین مقدار $\hat{B}$ برابر است با: $\hat{B}=۸۱^\circ$



بنابراین بیشترین مقدار $\hat{C}$ برابر است با: $\hat{C}=۱۸۰^\circ-\hat{A}-\hat{B}=۱۹^\circ$

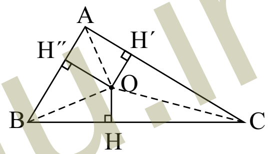
۲۶ – گزینه ۴ طول اضلاع مثلث ABC در قضیهٔ فیثاغورس $(BC^۲=AB^۲+AC^۲)$ صدق می‌کنند، بنابراین مثلث ABC، قائم‌الزاویه است. مطابق شکل، اگر O محل تلاقی نیمسازهای داخلی زوایای این مثلث باشد، آنگاه فاصلهٔ O از سه ضلع مثلث یکسان است و در نتیجه داریم:



$$S_{\overset{\triangle}{ABC}}=S_{\overset{\triangle}{OAB}}+S_{\overset{\triangle}{OAC}}+S_{\overset{\triangle}{OBC}}$$
$$\Rightarrow \frac{۳\times۴}{۲}=\frac{۳\times h}{۲}+\frac{۴\times h}{۲}+\frac{۵\times h}{۲}$$
$$\Rightarrow ۶=۶h \Rightarrow h=۱$$

۲۷ – گزینه ۳ از آن‌جا که نقطهٔ O روی نیمساز $\hat{B}$ است و فاصلهٔ هر نقطه روی نیمساز از اضلاع زاویه برابر است. داریم:

$$OH=OH''\Rightarrow x+۲=۲x-۱\Rightarrow x=۳$$

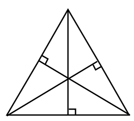


همچنین نقطهٔ O روی نیمساز $\hat{C}$ است:

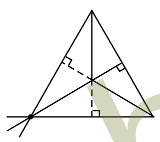
$OH'=OH=۲\times۳-۱\Rightarrow OH'=۵$ (فاصلهٔ O از ضلع AC)

۲۸ – گزینه ۱

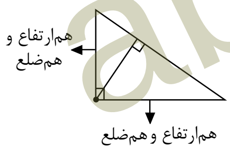
محل همرسی ارتفاع‌های مثلث در مثلثی که سه زاویهٔ تند دارد داخل مثلث است.



محل همرسی ارتفاع‌های مثلث با یک زاویه منفرجه خارج مثلث قرار دارد.



ولی محل برخورد ارتفاع‌ها در مثلث قائم‌الزاویه روی رأس قائمه قرار دارد.



۲۹ – گزینه ۴

۳۰ – گزینه ۲ هر چهار گزینه یک جمله‌ی خبری هستند ولی در گزینه‌ی «۱» عدد ۱۱ اول است. درست

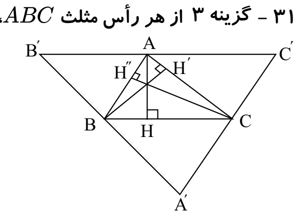
در گزینه‌ی «۳» هر سال دوازده ماه دارد. درست

و در گزینه‌ی «۴» جواب معادله‌ی $۲x=۱۰$ برابر $x=-۵$ است. کاملاً نادرست است چون $x=۵$ می‌شود.

ولی گزینه‌ی «۲» با این که یک جمله‌ی خبری است ولی نمی توان ارزش درستی یا نادرستی آن را مشخص کرد بنابراین گزاره نیست.

یادآوری: "گزاره جمله‌ای خبری است که ارزش آن یا درست و یا نادرست است."

۳۱ – گزینه ۳ از هر رأس مثلث ABC، خطی به موازات ضلع مقابل رسم می‌کنیم. مثلث به وجود آمده را $A'B'C'$ می‌نامیم.

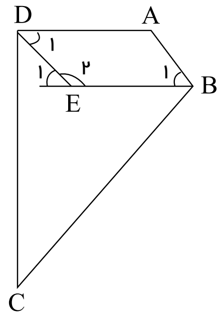


$$\begin{cases}AH\perp BC\\ BC\parallel B'C'\end{cases}\Rightarrow AH\perp B'C'\ (۱)$$

$$\left.\begin{array}{l}AB'=BC \text{ چهارضلعی } AB'BC \text{ متوازی‌الاضلاع است}\\ AC'=BC \text{ چهارضلعی } ABCC' \text{ متوازی‌الاضلاع است}\end{array}\right\}\Rightarrow AB'=AC'\ (۲)$$

از (۱) و (۲) نتیجه می‌شود که AH عمودمنصف ضلع $B'C'$ است. به همین ترتیب BH' و CH'' عمودمنصف‌های اضلاع $A'B'$ و $A'C'$ هستند.

۳۲ – گزینه ۳ ابتدا زاویه ی حاده ی بین نیمسازهای داخلی $\hat{B}$ و $\hat{D}$ را بر حسب زوایای داخلی $ABCD$ به دست می آوریم:

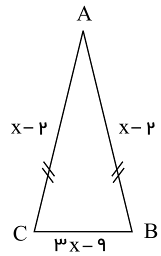


$$ABED: \hat{A}+\hat{B}_1+\hat{D}_1+\hat{E}_2=360^\circ \Rightarrow \hat{A}+\frac{\hat{B}}{2}+\frac{\hat{D}}{2}+\hat{E}_2=360^\circ$$

$$\Rightarrow \hat{E}_2=360^\circ-\frac{\hat{B}+\hat{D}}{2}-\hat{A}=360^\circ-\left(\frac{360^\circ-(\hat{A}+\hat{C})}{2}\right)-\hat{A}=180^\circ-\frac{\hat{A}-\hat{C}}{2}$$

$$\Rightarrow \hat{E}_1=180^\circ-\hat{E}_2=\frac{\hat{A}-\hat{C}}{2} \Rightarrow \hat{E}_1=\frac{120^\circ-40^\circ}{2}=40^\circ$$

۳۳ - گزینه ۲ باتوجه به نامساوی مثلثی، در هر مثلث مجموع دو ضلع از ضلع سوم بزرگ‌تر است. بنابراین:

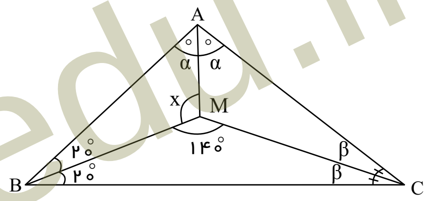


$$(x-2)+(x-2)>3x-9 \Rightarrow -x>-9+4 \Rightarrow x<5$$

$$(3x-9)+(x-2)>x-2 \Rightarrow 3x-9>0 \Rightarrow x>3$$

از اشتراک محدوده‌های بدست آمده داریم: $3<x<5$

۳۴ - گزینه ۲ می‌دانیم نیمسازهای زوایای داخلی هر مثلث همرس‌اند. پس BM نیز نیمساز زاویهٔ ABC است و در نتیجه $M\hat{B}C=20^\circ$. داریم:



$$\overset{\Delta}{ABC}: 2\alpha+2\beta+2\times 20^\circ=180^\circ$$

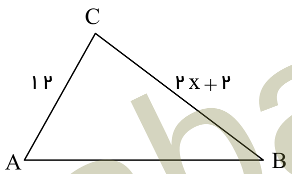
$$\Rightarrow \alpha+\beta=70^\circ$$

$$\overset{\Delta}{AMC}: \underbrace{\alpha+\beta}_{70^\circ}+A\hat{M}C=180^\circ \Rightarrow A\hat{M}C=110^\circ$$

$$x+A\hat{M}C+140^\circ=360^\circ \Rightarrow x+110^\circ+140^\circ=360^\circ$$

$$\Rightarrow x=110^\circ$$

۳۵ - گزینه ۴



$$\overset{\Delta}{ABD}: \hat{A}>\hat{B} \rightarrow BC>AC \rightarrow 2x+2>12 \rightarrow 2x>10 \rightarrow x>5$$