پاسخنامه تشریحی

۱ - گزینه ۲

$$y=\frac{4x+1}{x-2}\in Z \Rightarrow \text{باید}: x-2|4x+1 \xrightarrow{x-2|x-2} x-2|4x+1-4(x-2)$$

$$\Rightarrow x-2|9 \Rightarrow x-2\in\{-9,-3,-1,1,3,9\} \xrightarrow{+2} x\in\{-7,-1,1,3,5,11\}$$

چون قرار است نقطهٔ مورد نظر در ربع دوم باشد بایستی $x<0$ و $y>0$ باشد.

$$x=-1\rightarrow y=\frac{4x+1}{x-2}=1\rightarrow \text{در ربع دوم است.}$$

$$x=-7\rightarrow y=\frac{4x+1}{x-2}=\frac{-27}{-9}=3\rightarrow \text{در ربع دوم است.}$$

۲ - گزینه ۳ تمام مقسوم‌علیه‌های صحیح ۴۵ به‌صورت زیر می‌باشد:

$\pm1,\ \pm3,\ \pm5,\ \pm9,\ \pm15,\ \pm45$

از بین اعداد فوق باید آنهایی را پیدا کنیم که در رابطهٔ $a\nmid 30$ صدق کنند، بنابراین داریم:

$a\in\{9,\ -9,\ 45,\ -45\}$

۳ - گزینه ۱

$$\text{نکته}: a|b \xrightarrow{k\in\mathbb{Z}} a|kb$$

$$n^2+2|n+6 \xrightarrow[\times(n-6)]{\text{سمت راست}} n^2+2|(n-6)(n+6) \Rightarrow n^2+2|n^2-36$$

$$\text{می‌دانیم}: \left.\begin{matrix} n^2+2|n^2-36 \\ n^2+2|n^2+2 \end{matrix}\right\} \xrightarrow{\text{تفاضل}} n^2+2|38 \Rightarrow n^2+2\in\{-38,-19,-2,-1,1,2,19,38\}$$

$$\xrightarrow{-2} n^2\in\{-40,-21,-4,-3,-1,0,17,36\}$$

$\xrightarrow{\text{جذر}}$ از معادلات فوق عبارت‌اند از: مقادیر صحیح به دست آمده $n=0,6,-6$

که به علت آنکه $n-6\neq0$ می‌باشد پس $n=6$ قابل قبول نیست.

۴ - گزینه ۲

$$\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{a}\geq a+b \Leftrightarrow \frac{a^3+b^3}{ab}\geq a+b \xleftrightarrow[(ab)>0]{\times ab} a^3+b^3\geq ab(a+b)$$

$$\rightarrow (a+b)(a^2-ab+b^2)\geq ab(a+b) \xrightarrow{\div(a+b)} a^2-ab+b^2\geq ab \Leftrightarrow a^2-2ab+b^2\geq0$$

$$\Leftrightarrow (a-b)^2\geq0 \leftarrow \text{همواره صحیح}$$

۵ - گزینه ۲ اگر $a=2$ ، آن‌گاه به ازای هر عدد طبیعی زوج k، رابطه‌ی $a|k^2+2$ برقرار است. اما به ازای $a=4$ ، رابطه هیچ‌گاه برقرار نیست، زیرا اگر k زوج باشد، k^2 مضرب ۴ بوده و باقی‌مانده تقسیم k^2+2 بر ۴، برابر ۲ است و در صورتی که k فرد باشد، k^2 در تقسیم بر ۴، دارای باقیمانده یک است و در نتیجه k^2+2 بر ۴، بخش‌پذیر نیست. سایر اعضای مجموعه A، قطعاً مضرب ۴ هستند و رابطه برای آنان نیز برقرار نیست.

۶ - گزینه ۱

هم باقیمانده بر ۱۱ یعنی همنهشتی به پیمانه ۱۱ $\quad$ $(a,P)=1\Rightarrow a^{P-1}\overset{P}{\equiv}1\Rightarrow 5^{10}\overset{11}{\equiv}1$: قضیه فرما

۷ - گزینه ۲ ابتدا عبارت $14n^2+19n+6$ را تجزیه کنیم.

$$14n^2+19n+6=(2n+1)(7n+6)$$

طبق فرض می‌دانیم که $2n+1$ مضرب ۵ می‌باشد از طرفی داریم:

$$\left.\begin{matrix} 5|2n+1 \\ 5|5n+5 \end{matrix}\right\} \Rightarrow 5|7n+6 \Rightarrow 7n+6=5q'$$

بنابراین:

$$14n^2+19n+6=(2n+1)(7n+6)=5q\times5q'=25qq'=25q''$$

۸ - گزینه ۳ راه‌حل اول: نکته: اگر $a|b$ و $b|c$ ، آن‌گاه $a|c$.

حال گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

$$\text{گزینه ۱}: a^5|b^3 \xrightarrow{a|a^5} a|b^3$$

$$\text{گزینه ۲}: a^5|b^3 \xrightarrow{\text{توان ۸}} a^{40}|b^{24} \xrightarrow{b^{24}|b^{25}} a^{40}|b^{25} \Rightarrow a^8|b^5$$

$a|b^{۳} \xrightarrow{\text{توان ۲}} a^{۲}|b^{۶} \xrightarrow{b^{۶}|b^{۷}} a^{۲}|b^{۷}$: گزینه ۴

راه‌حل دوم: نکته: اگر $a^n|b^m$، آن‌گاه در صورتی که $\begin{vmatrix} n & m \\ p & q \end{vmatrix} \geq ۰$، می‌توان نتیجه گرفت: $a^p|b^q$

$a^{۵}|b^{۳} \xrightarrow{\begin{vmatrix} ۵ & ۳ \\ ۱ & ۳ \end{vmatrix}=۱۲>۰} a|b^{۳}$: گزینه ۱

$a^{۵}|b^{۳} \xrightarrow{\begin{vmatrix} ۵ & ۳ \\ ۸ & ۵ \end{vmatrix}=۱>۰} a^{۸}|b^{۵}$: گزینه ۲

$a^{۵}|b^{۳} \xrightarrow{\begin{vmatrix} ۵ & ۳ \\ ۲ & ۷ \end{vmatrix}=۲۹>۰} a^{۲}|b^{۷}$: گزینه ۴

دقت کنید در گزینه ۳ داریم: $\begin{vmatrix} ۵ & ۳ \\ ۷ & ۴ \end{vmatrix} = -۱ < ۰$، پس نمی‌توان رابطه گزینه ۳ را نتیجه گرفت.

۹ - گزینه ۱

$$۵^{۲} \overset{۲۳}{\equiv} ۲ \xrightarrow{\text{توان } n} ۵^{۲n} \overset{۲۳}{\equiv} ۲^{n} \xrightarrow{\times ۵} ۵^{۲n+۱} \overset{۲۳}{\equiv} ۵ \times ۲^{n}$$

$$۵^{۲n+۱} + ۲^{n+۴} + ۲^{n+۱} \overset{۲۳}{\equiv} ۵ \times ۲^{n} + ۴^{۲} \times ۲^{n} + ۲ \times ۲^{n} = ۲۳ \times ۲^{n} \overset{۲۳}{\equiv} ۰$$

یعنی بازای تمام مقادیر n، عبارت مورد نظر بر ۲۳ بخش‌پذیر است.

۱۰ - گزینه ۱ ابتدا یکی از دو متغیر a یا b را حذف می‌کنیم:

$$\begin{matrix} ۱۱|۵a + ۴b + ۳ \\ ۱۱|a + ۳b + k \end{matrix} \xrightarrow[\times ۵]{\times -۱} ۱۱| - \cancel{۵a} - ۴b - ۳ + \cancel{۵a} + ۱۵b + ۵k \Rightarrow ۱۱|۱۱b + ۵k - ۳$$

$$\xrightarrow{۱۱|۱۱b} ۱۱|۵k - ۳ \xrightarrow{\text{عدد گذاری}} k_{min} = ۵$$

۱۱ - گزینه ۱

طبق فرض داریم:

$$\begin{cases} a \mid ۴n^{۲} + ۶ \\ a \mid ۶n^{۲} + ۱ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a \mid ۱۲n^{۲} + ۱۸ \\ a \mid ۱۲n^{۲} + ۲ \end{cases} \Rightarrow a \mid ۱۶$$

بنابراین $a \in \{۱\,,\,۲\,,\,۴\,,\,۸\,,\,۱۶\}$ ولی با توجه به اینکه $۶n^{۲} + ۱$ عددی فرد است $\Leftarrow a = ۱$.

۱۲ - گزینه ۴

چون باید معادله جواب صحیح داشته باشد پس y عددی صحیح است و باید $\frac{۸}{۳x - ۱}$ هم عددی صحیح باشد، بنابراین: $۳x - ۱$ باید مقسوم علیه عدد ۸ باشد پس:

$$۳x - ۱ \mid ۸ \Rightarrow \begin{cases} ۳x - ۱ = \pm ۱ \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{۲}{۳} & \text{غ ق ق} \\ x = ۰ & \text{ق ق} \end{cases} \\ \text{یا} \\ ۳x - ۱ = \pm ۲ \Rightarrow \begin{cases} x = ۱, & \text{ق ق} \\ x = -\frac{۱}{۳} & \text{غ ق ق} \end{cases} \\ \text{یا} \\ ۳x - ۱ = \pm ۴ \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{۵}{۳} & \text{غ ق ق} \\ x = -۱ & \text{ق ق} \end{cases} \\ \text{یا} \\ ۳x - ۱ = \pm ۸ \Rightarrow \begin{cases} x = ۳ & \text{ق ق} \\ x = -\frac{۷}{۳} & \text{غ ق ق} \end{cases} \end{cases}$$

۱۳ - گزینه ۳ به کمک برهان خلف می‌توان ثابت کرد حاصل ضرب عبارت‌های $(x_{۱}, y_{۱}), (x_{۲} - y_{۲}), \cdots, (x_n - y_n)$ همواره زوج است.

۱۴ - گزینه ۳

گزینهٔ ۳ به‌ازای $n = ۵$ عددی اول نیست : $۲^{۲^n} + ۱ \overset{n=۵}{=\!=} ۲^{۳۲} + ۱ = ۶۴۱ \times ۶۷۰۰۴۱۷$

در اثبات گزینهٔ «۱»، «۲» و «۴» از روش برهان خلف استفاده می‌کنیم.

۱۵ - گزینه ۴ طبق معادلهٔ $(a + b)^n - a^n - b^n \overset{ab}{\equiv} ۰$ بنابراین داریم:

$$(۱۱ + ۲)^{۵۰} - ۱۱^{۵۰} - ۲^{۵۰} \overset{۲۲}{\equiv} ۱۳^{۵۰} - ۱۱^{۵۰} \overset{۲۲}{\equiv} ۲^{۵۰}$$

در نتیجه کافی است باقی‌مانده تقسیم $۲^{۵۰}$ را بر ۲۲ بیابیم:

$$۲^{۶} \overset{۲۲}{\equiv} ۶۴ \overset{۲۲}{\equiv} -۲ \rightarrow ۲^{۵۰} = (۲^{۶})^{۸} \times ۲^{۲} \overset{۲۲}{\equiv} (-۲)^{۸} \times ۲^{۲} = ۲^{۱۰} \overset{۲۲}{\equiv} ۲^{۶} \times ۲^{۴} \overset{۲۲}{\equiv} -۲ \times ۱۶ \overset{۲۲}{\equiv} -۳۲ \overset{۲۲}{\equiv} ۱۲$$

۱۶ - گزینه ۴

$$۸۱ = ۳^{۴} \Rightarrow ۸۱^{۱۴} = ۳^{۵۶}$$

پس بر 3^{56} بخش‌پذیر است.
$$231^{57} = (3\times 73)^{57} = 3^{57}\times 73^{57} = 3^{56}\times(3\times 7^{57})$$

۱۷ - گزینه ۱

ریشه عبارت سمت چپ را یافته و آن را در عبارت سمت راست رابطه قرار می دهیم.

$$n+2\,|\,n^2+4n+10$$

$$n+2=0\Rightarrow n=-2\Rightarrow n+2\,|\,6\Longrightarrow\begin{cases} n+2=\pm 1\Rightarrow n=-1,-3 & \text{غ ق ق}\\ n+2=\pm 2\Rightarrow n=0,-4 & \text{غ ق ق}\\ n+2=\pm 3\Rightarrow n=1,-5 \\ n+2=\pm 6\Rightarrow n=4,-8\end{cases}$$

دو مقدار صحیح و مثبت برای n وجود دارد.

۱۸ - گزینه ۳ توجه کنید که $7^2+2^2=53$. به‌ازای هر عدد زوج مانند k می‌دانیم:

$$7^2+2^2\,|\,(7^2)^k-(2^2)^k$$

پس n باید مضربی از ۴ باشد، در بین گزینه‌ها فقط ۱۶ این خاصیت را دارد.

۱۹ - گزینه ۱ وقتی a بر ۳ بخش‌پذیر نباشد عدد a به صورت $3k\pm 1$ است.

$$a=3k\pm 1\Rightarrow a^2=9k^2\pm 6k+1=3(3k^2\pm 2k)+1=3k'+1$$

نکته: اگر $a=bq+r$ باشد، $a^n=bq'+r^n$ است.

۲۰ - گزینه ۳ نکته: اگر a عددی فرد باشد:

$$a=2q+1\xrightarrow{\text{توان ۲}}a^2=4q^2+4q+1=4\underbrace{q(q+1)}_{2k}+1=8k+1$$

یعنی مربع هر عدد فرد بصورت $8k+1$ می‌باشد.

$$\text{فرد } a\xrightarrow{\text{نکته}}a^2=8k+1\Rightarrow\begin{cases}a^2+3=8k+4\\3a^2+5=24k+8\end{cases}$$
$$\Rightarrow\left(a^2+3\right)\left(3a^2+5\right)=(8k+4)(24k+8)=4\underbrace{(2k+1)}_{k'}\times 8\underbrace{(3k+1)}_{k''}=32q=2^5q$$

بنابراین بزرگ ترین مقدار ، برابر ۵ است.

۲۱ - گزینه ۱

نکته: $$(a,b)=d\xrightarrow{k\in\mathbb{Z}}(a,ka+b)=d$$

یعنی در محاسبه‌ی ب‌م‌م دو عدد، هر مضرب صحیحی از هر کدام از دو عدد را به دیگری می‌توان اضافه کرد.

$$\underbrace{(4n-5,9n+4)}_{\text{۲− برابر}}=\underbrace{(4n-5\,,\,n+14)}_{\text{۴− برابر}}=(-61,n+14)=d\xrightarrow{d|61}\begin{cases}d=1\\d=61\end{cases}$$

طبق صورت سوال بایستی $d=61$ باشد از آنجا که ب‌م‌م هر دو عدد را می‌شمارد باید $d\,|n+14$ یعنی:

$$61\,|n+14\Rightarrow n+14=61k\Rightarrow n=61k-14$$

برای محاسبهٔ k مناسب بزرگترین عدد ۳ رقمی یعنی ۹۹۹ را بر ۶۱ تقسیم می‌کنیم: $k=\left[\frac{999}{61}\right]=16$ بنابراین:

$$n=61\times 16-14=\underbrace{962}_{\substack{\text{بزرگترین مقدار}\\ n\text{ ۳ رقمی}}}\rightarrow n\text{ جمع ارقام }=17$$

۲۲ - گزینه ۲ نکته: اگر $a\overset{m}{\equiv}b$، آنگاه به ازای هر $k\in\mathbb{Z}$ داریم:

$$a\overset{m}{\equiv}b+mk$$

نکته: اگر $a\overset{m}{\equiv}b$ و $a\overset{n}{\equiv}b$، آنگاه: $a\overset{[m,n]}{\equiv}b$

فرض کنیم $x\in[5]_8\cap[2]_7$؛ در این صورت داریم:

$$x\in[5]_8\Rightarrow x\overset{8}{\equiv}5\Rightarrow x\overset{8}{\equiv}5+4(8)\Rightarrow x\overset{8}{\equiv}37$$

$$x\in[2]_7\Rightarrow x\overset{7}{\equiv}2\Rightarrow x\overset{7}{\equiv}2+5(7)\Rightarrow x\overset{7}{\equiv}37$$

پس $x\overset{[7,8]}{\equiv}37$؛ یعنی $x\overset{56}{\equiv}37$. بنابراین: $x=56k+37$

حال تعداد kهایی را که به‌ازای آن‌ها x سه‌رقمی می‌شود به‌دست می‌آوریم:

$$100\le x\le 999\Rightarrow 100\le 56k+37\le 999\Rightarrow 63\le 56k\le 962\xrightarrow{k\in\mathbb{Z}}2\le k\le 17$$

بنابراین ۱۶ عدد سه رقمی در مجموعهٔ داده شده قرار دارد.

۲۳ ـ گزینه ۲

با استفاده از تقسیم چند جمله‌ای‌ها داریم:

$$y=\frac{2n^3+3n^2+10n+17}{n^2+n+4}=2n+1+\frac{n+13}{n^2+n+4}$$

برای اینکه حاصل y مقداری صحیح شود؛ کافی است:

$$n^2+n+4 \mid n+13$$

می توان با کمک خواص بخش‌پذیری نتیجه گرفت:

$$|n^2+n+4| \le |n+13|$$

چون $n\in\mathbb{N}$ لذا $n^2+n+4\le n+13$ پس $n^2\le 9$، از این نامساوی $n=1\ ,\ n=2\ ,\ n=3$ به‌دست می‌آید که تنها $n=3$ در رابطهٔ اصلی صدق می‌کند.

۲۴ ـ گزینه ۴ فرض کنید $(a\ ,\ b)=d$ می‌توان نوشت:

$$\left.\begin{matrix} d|a \\ d|b \end{matrix}\right\} \to d|3a+7b \to d|25$$

بنابراین گزینهٔ (۴) درست نیست.

۲۵ ـ گزینه ۴

$$7^{160} \overset{17}{\equiv} 5\times 8^{17!}+a$$

طبق قضیهٔ فرما اگر $(a\ ,\ 17)=1$ باشد، $a^{16}\overset{17}{\equiv}1$، پس 7^{16} و 8^{16} در پیمانهٔ ۱۷ با ۱ همنهشت‌اند. بنابراین 7^{160} و $8^{17!}$ نیز با ۱ همنهشت‌اند. (چون ۱۶۰ و !۱۷ مضرب ۱۶ هستند.)

$$7^{160} \overset{17}{\equiv} 5\times 8^{17!}+a \Rightarrow 5\times 1+a\overset{17}{\equiv}1 \Rightarrow a\overset{17}{\equiv}-4 \Rightarrow a=17k-4 \xrightarrow{k=1} a_{\min}=13$$

۲۶ ـ گزینه ۴

$$11^{2}\overset{19}{\equiv}-8 \xrightarrow{\text{توان دو}} 11^2\overset{19}{\equiv}64\overset{19}{\equiv}7 \Rightarrow 11^3=11\times 11^2\overset{19}{\equiv}-8\times 7\overset{19}{\equiv}-56\overset{19}{\equiv}1$$
$$\Rightarrow 11^3\overset{19}{\equiv}1 \xrightarrow{\text{طرفین به توان } k} 11^{3k}\overset{19}{\equiv}1$$

بنابراین $n=3k$ پس:

$$9<n=3k\le 99 \Rightarrow n\ \text{مقدار}=[\frac{99}{3}]-[\frac{9}{3}]=30$$

۲۷ ـ گزینه ۳

مربع هر عدد صحیح فرد به صورت $8k+1$ و توان چهارم هر عدد صحیح فرد به صورت $16k+1$ می باشد.

$$(1)\begin{cases} m^2=8k+1 \\ n^2=8k'+1 \end{cases} \Rightarrow m^2-n^2=8q$$

$$(2)\begin{cases} m^4=16q+1 \\ n^4=16q'+1 \end{cases} \Rightarrow m^4-n^4=16q''=8k$$

$$(3)\begin{cases} m^2=8k+1 \\ n^2=8k'+1 \end{cases} \Rightarrow m^2+n^2+2=8q+4=4q' \Rightarrow \text{پس بر ۸ بخش‌پذیر نیست.}$$

$$(4)\begin{cases} m^4=16q+1 \\ n^4=16q'+1 \end{cases} \Rightarrow m^4+n^4-2=16q''=8k$$

۲۸ ـ گزینه ۴ نکته: اگر a عددی فرد باشد مربع آن به فرم $8k+1$ می‌باشد و توان چهارم آن بفرم $16k_1+1$ $(k,k_1\in \mathrm{z})$ می‌باشد.

$$a=2q+1 \to a^2=8k+1 \xrightarrow{\text{توان ۲}} a^2=\underbrace{64k^2+16k}+1=16(\underbrace{4k^2+k}_{k_1})+1=16k_1+1$$

$$a^4-b^4=(16k_1+1)-(16k_2+1)=16k_1-16k_2=16(k_1-k_2)=16k_3\ (k_1,k_2,k_3\in \mathrm{z})$$

۲۹ ـ گزینه ۳ به n یک عدد دلخواه زوج مثلاً ۲ نسبت می‌دهیم

$$14^n+5=14^2+5=196+5=201$$

گزینه‌های (۱) و (۲) و (۴) رد می‌شوند گزینه‌ی (۳) صحیح است.

۳۰ ـ گزینه ۲

$$2xy-y-9x+11=0 \Rightarrow y(2x-1)=9x-11$$

$$\Rightarrow y=\frac{9x-11}{2x-1}\in\mathbb{Z} \Rightarrow \text{صورت باید مضرب مخرج باشد}$$

$$\left.\begin{matrix} \text{پس}:\ 2x-1|9x-11 \Rightarrow 2x-1|18x-22 \\ \text{از طرفی}:\ 2x-1|2x-1 \Rightarrow 2x-1|18x-9 \end{matrix}\right\} \Rightarrow 2x-1|13$$

$$\begin{cases} ۲x-۱=۱ \Rightarrow x=۱ \Rightarrow y=-۲ \text{ غ ق ق} \\ ۲x-۱=-۱ \Rightarrow x=۰ \text{ غ ق ق} \\ ۲x-۱=۱۳ \Rightarrow x=۷ \Rightarrow y=۴ \\ ۲x-۱=-۱۳ \Rightarrow x=-۶ \text{ غ ق ق} \end{cases}$$

تنها یک جفت عدد طبیعی برای x, y به دست آمده است.

۳۱ - گزینه ۱

ریشه عبارت سمت چپ را یافته و آن را در عبارت سمت راست رابطه قرار می دهیم.

$$n+۵=۰ \Rightarrow n=-۵ \Rightarrow n+۵ \mid (-۵)^۲-۳(-۵)+۴ \Rightarrow n+۵ \mid ۴۴$$

$$n+۵ \mid ۴۴ \Longrightarrow \begin{cases} n+۵=\pm ۱ \Rightarrow n=-۶,-۴ \text{ غ ق ق} \\ n+۵=\pm ۲ \Rightarrow n=-۳,-۷ \text{ غ ق ق} \\ n+۵=\pm ۴ \Rightarrow n=-۱,-۹ \text{ غ ق ق} \\ n+۵=\pm ۱۱ \Rightarrow n=۶,-۱۶ \\ n+۵=\pm ۲۲ \Rightarrow n=-۲۷,۱۷ \\ n+۵=\pm ۴۴ \Rightarrow n=۳۹,-۴۹ \end{cases}$$

پس ۳ مقدار طبیعی برای n به‌دست می‌آید.

۳۲ - گزینه ۴

تذکر ۱: عددی بر ۹ بخشپذیر است که مجموع ارقام آن بر ۹ بخشپذیر باشد.

تذکر ۲: عددی بر ۱۱ بخشپذیر است که اگر ارقام آن را از سمت راست یکی درمیان مثبت و منفی کنیم، حاصل بر ۱۱ بخشپذیر باشد.

دقت: $۱ \leq a \leq ۹ \ , \ ۰ \leq b \leq ۹ \Rightarrow ۱ \leq a+b \leq ۱۸$

$$\overline{a۶۳b۲۹} \overset{۹۹}{\equiv} ۰ \Rightarrow \begin{cases} \overline{a۶۳b۲۹} \overset{۹}{\equiv} ۰ & (۱) \\ \overline{a۶۳b۲۹} \overset{۱۱}{\equiv} ۰ & (۲) \end{cases}$$

$$(۱) \Rightarrow ۹+۲+b+۳+۶+a \overset{۹}{\equiv} ۰ \Rightarrow a+b \overset{۹}{\equiv} -۲ \Rightarrow a+b=-۲ \text{ یا } ۷ \text{ یا } ۱۶ \text{ یا } ۲۳ \text{ غ ق ق}$$

$$(۲) \Rightarrow ۹-۲+b-۳+۶-a \overset{۱۱}{\equiv} ۰ \Rightarrow b-a+۱۰ \overset{۱۱}{\equiv} ۰ \Rightarrow b-a \overset{۱۱}{\equiv} ۱ \Rightarrow b-a=-۱۰ \text{ یا } ۱ \text{ یا } ۱۲$$

$$\begin{cases} a+b=۷ \\ b-a=۱ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b=۴ \\ a=۳ \end{cases} \quad , \quad \begin{cases} a+b=۱۶ \\ b-a=۱ \end{cases} \Longrightarrow b=\frac{۱۷}{۲} \text{ غ ق ق}$$

۳۳ - گزینه ۳ $۳-a$ مقسوم‌علیه ۱۰۸ است. پس باید تعداد مقسوم‌علیه‌های طبیعی ۱۰۸ را به‌دست آوریم:

$۱۰۸=۲^۲ \times ۳^۳ \Rightarrow$ تعداد مقسوم‌علیه‌های ۱۰۸ برابر ۱۲ است

$۳-a$، ۱۲ مقدار طبیعی دارد که به‌ازای تمامی آنها a مقداری طبیعی اختیار می‌کند. به‌علاوه، به‌ازای $a-۳=-۱$ و $a-۳=-۲$ دو مقدار طبیعی برای a به‌دست می‌آید پس در مجموع ۱۴ مقدار طبیعی برای a به‌دست می‌آید.

۳۴ - گزینه ۴

قضیه فرما: اگر p اول باشد و $(a,p)=۱$ آنگاه $a^{p-۱} \overset{p}{\equiv} ۱$

$$\text{فرما}: ۷^{۱۸} \overset{۱۹}{\equiv} ۱ \xrightarrow{\text{توان } ۱۱} ۷^{۱۹۸} \overset{۱۹}{\equiv} ۱ \overset{\times ۷^۲}{\Rightarrow} ۷^{۲۰۰} \overset{۱۹}{\equiv} ۴۹ \Rightarrow ۷^{۲۰۰}+a \overset{۱۹}{\equiv} ۴۹+a \overset{۱۹}{\equiv} ۰ \Rightarrow \min(a)=۸$$

۳۵ - گزینه ۴

$$۱! \overset{۵}{\equiv} ۱ \quad , \quad ۲! \overset{۵}{\equiv} ۲ \quad , \quad ۳! \overset{۵}{\equiv} ۱ \quad , \quad ۴! \overset{۵}{\equiv} ۴ \quad , \quad ۵! \overset{۵}{\equiv} ۰$$

$$۶! \overset{۵}{\equiv} ۶ \times ۵! \overset{۵}{\equiv} ۰ \quad \Rightarrow \quad k! \overset{۵}{\equiv} ۰ \quad , \quad (k \geq ۵)$$

$$(۱+۲+۱+۴+۰+\cdots+۰)^۲ \overset{۵}{\equiv} ۸^۲ \overset{۵}{\equiv} ۴$$

تذکر: باقی ماندهٔ تقسیم اعداد فاکتوریل دار از !۵ به بعد بر ۵ و ۱۰، صفر است.