# پاسخنامه تشریحی

۱ - گزینه ۲

$$mx-3\sqrt{x}+m-2=0 \Rightarrow m(\sqrt{x})^2-3\sqrt{x}+m-2=0\ (I)$$

$$\xrightarrow{\sqrt{x}=t} mt^2-3t+m-2=0$$

اگر این معادله دارای یک ریشه‌ی مثبت و یک ریشه‌ی منفی باشد معادله‌ی $I$ فقط یک ریشه دارد (زیرا امکان ندارد $\sqrt{x}$ برابر یک مقدار منفی باشد) و شرط آن‌که یک معادله‌ی درجه‌ی دوم دارای دو ریشه‌ی متمایز مختلف‌العلامت باشد آن است که $\frac{c}{a}<0$ باشد.

$$\frac{c}{a}<0 \Rightarrow \frac{m-2}{m}<0 \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} 0<m<2$$

دقت کنید اگر معادله‌ی $mt^2-3t+m-2=0$ دارای یک ریشه‌ی مضاعف مثبت باشد، نیز معادله‌ی $I$ فقط یک جواب دارد.

$$\begin{cases} \Delta=0 \Rightarrow b^2-4ac=0 \Rightarrow 9-4m(m-2)=0 \Rightarrow 4m^2-8m-9=0 \begin{cases} m=\frac{2+\sqrt{13}}{2} \\ m=\frac{2-\sqrt{13}}{2} \end{cases} \\ \underset{\substack{\downarrow \\ \text{ریشه مضاعف}}}{\frac{-b}{2a}}>0 \Rightarrow \frac{3}{2m}>0 \Rightarrow m>0 \end{cases}$$

پس جواب می‌شود: $0<m<2 \cup \left\{\frac{2+\sqrt{13}}{2}\right\}$. بنابراین گزینه‌ی دوم می‌تواند صحیح باشد.

۲ - گزینه ۲ ابتدا با قرار دادن $x=2$ در معادله‌ی داده شده، $a$ را می‌یابیم:

$$x(ax^2-x-5)=2 \xrightarrow{x=2} 2(4a-2-5)=2 \Rightarrow 4a-7=1 \Rightarrow a=2$$

پس معادله به صورت $2x^3-x^2-5x-2=0$ می‌شود. حال با تقسیم معادله بر $x-2$ آن را به شکل زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$2x^3-x^2-5x-2=0 \Rightarrow (x-2)(2x^2+3x+1)=0$$

می‌دانیم مجموع دو ریشه‌ی دیگر که ریشه‌های معادله‌ی درجه دوم داخل پرانتز می‌باشند، برابر با $-\frac{b}{a}=-\frac{3}{2}$ می‌شود.

۳ - گزینه ۴

$$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=\frac{x_1+x_2}{x_1\cdot x_2}=\frac{-\frac{b}{a}}{\frac{c}{a}}=\frac{-(-m^2)}{m+2}=1$$

$$\Rightarrow m^2=m+2 \Rightarrow m^2-m-2=0 \Rightarrow (m-2)(m+1)=0 \Rightarrow m=-1,2$$

$$m=2 \to x^2-4x+4=0 \to (x-2)^2=0 \to x=2$$

بنابراین $m=2$ غیر قابل قبول است زیرا دو ریشه ی متمایز بدست نمی آید.

$$m=1 \to x^2-x+1=0 \to \Delta=1-4=-3<0$$

بنابراین $m=-1$ غیر قابل قبول است زیرا معادله، ریشه حقیقی ندارد.

۴ - گزینه ۱ $\beta$ و $\alpha$ ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی دوم $13x^2-7x-1=0$ هستند پس در معادله صدق می‌کنند.

$$\alpha \xrightarrow{\text{صدق در معادله}} 13\alpha^2-7\alpha-1=0\ ,\quad \beta \xrightarrow{\text{صدق در معادله}} 13\beta^2-7\beta-1=0$$

$$\begin{cases} 13\alpha^2-8\alpha-1=\underbrace{13\alpha^2-7\alpha-1}_{0}-\alpha=-\alpha \\ 13\beta^2-8\beta-1=\underbrace{13\beta^2-7\beta-1}_{0}-\beta=-\beta \end{cases}$$

در حقیقت سوال گفته معادله‌ی درجه‌ی دوم جدیدی بنویسید که ریشه‌هایش قرینه‌ی ریشه‌های معادله‌ی فوق باشد که کافی است علامت $b$ را قرینه کنید یعنی معادله به صورت $13x^2+7x-1=0$ می‌باشد.

توجه کنید ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی دوم $ax^2-bx+c=0$، قرینه‌ی ریشه‌های معادله‌ی $ax^2+bx+c=0$ می‌باشند.



abadgaranedu.ir

**۵ - گزینه ۲**

دقت کنید $\alpha+\beta=-\frac{b}{a}=-5$ و $\alpha\beta=\frac{c}{a}=2$ می‌باشند.

$\alpha$ و $\beta$ ریشه‌های معادله هستند پس در معادله صدق می‌کنند.

$$\alpha \xrightarrow{\text{صدق}} \alpha^2+5\alpha+2=0 \Rightarrow 5\alpha+2=-\alpha^2$$
$$\beta \xrightarrow{\text{صدق}} \beta^2+5\beta+2=0 \Rightarrow 5\beta+2=-\beta^2$$

$$\frac{\alpha^3\beta^2}{5\alpha+2}+\frac{\beta^3\alpha^2}{5\beta+2}=\frac{\alpha^3\beta^2}{-\alpha^2}+\frac{\beta^3\alpha^2}{-\beta^2}=-\alpha\beta^2-\beta\alpha^2=-\alpha\beta(\alpha+\beta)=-(2)(-5)=10$$

**۶ - گزینه ۲**

کافی است ریشه‌های معادله‌ی $2x^2-3x-9=0$ را به دست آوریم.

$$\Delta=b^2-4ac=9-4(2)(-9)=9+72=81 \rightarrow x_1,x_2=\frac{3\pm 9}{4}=3,-\frac{3}{2}$$
$$x'_1=\frac{1}{x_1^2}-2=\frac{1}{9}-2=-\frac{17}{9} \quad \text{و} \quad x'_2=\frac{1}{x_2^2}-2=\frac{1}{\frac{9}{4}}-2=\frac{4}{9}-2=-\frac{14}{9}$$
$$x^2-Sx+P=0 \rightarrow x^2-\left(-\frac{17}{9}-\frac{14}{9}\right)x+\underbrace{\left(-\frac{17}{9}\right)\left(-\frac{14}{9}\right)}_{P}=0 \rightarrow x^2+\frac{31}{9}x+P=0$$

$$\xrightarrow{\times 9} 9x^2+31x+9P=0 \xrightarrow{\text{مقایسه با } 9x^2+ax+b=0} a=31$$

**۷ - گزینه ۴**

اگر $\alpha$ و $\beta$ ریشه‌های معادله‌ی $x^2+2x-5=0$ باشند، در این صورت:

$$\alpha+\beta=-\frac{b}{a}=-2\ ,\ \ \alpha\beta=\frac{c}{a}=-5$$

سوال، حاصلضرب $(\alpha+2)(\beta+2)$ را خواسته است بنابراین:

$$(\alpha+2)(\beta+2)=\alpha\beta+2\alpha+2\beta+4=\alpha\beta+2(\alpha+\beta)+4=\alpha\beta-4+4=\alpha\beta$$

پس به حاصلضرب مقداری اضافه نمی‌شود.

**۸ - گزینه ۲**

$$S=\alpha+\beta=\frac{-b}{a}=12\ ,\ \ P=\alpha\cdot\beta=\frac{c}{a}=8m^2$$

فرض : $\alpha=\beta^2 \xrightarrow{\alpha+\beta=12} \beta^2+\beta=12 \Rightarrow \beta^2+\beta-12=0 \Rightarrow (\beta+4)(\beta-3)=0$

$$\rightarrow \begin{cases} \beta=-4 \xrightarrow{\text{صدق در معادله}} 16+48+8m^3=0 \rightarrow 8m^3=-64 \rightarrow m^3=-8 \rightarrow m=-2 \\ \beta=3 \xrightarrow{\text{صدق در معادله}} 9-36+8m^3=0 \rightarrow 8m^3=27 \rightarrow m^3=\frac{27}{8} \rightarrow m=\frac{3}{2} \end{cases}$$

هر دو $m$ بدست آمده، باعث منفی شدن $\Delta$ نمی‌شوند و هر دوی آنها قابل قبول هستند بنابراین:

$$-2+\frac{3}{2}=-\frac{1}{2}$$

**۹ - گزینه ۱** از عبارت‌های $\alpha^2+5\alpha$ و $\beta^2+5\beta$ و $x^2+5x$ متوجه می‌شویم که باید ریشه‌های معادله را در معادله صدق دهیم.

$$\alpha \xrightarrow{\text{صدق در معادله}} \alpha^2+5\alpha-1=0 \rightarrow \alpha^2+5\alpha=1$$
$$\beta \xrightarrow{\text{صدق در معادله}} \beta^2+5\beta-1=0 \rightarrow \beta^2+5\beta=1$$

در ضمن $\alpha+\beta=-\frac{b}{a}=-5$ و $\alpha\beta=\frac{c}{a}=-1$ می‌باشد.

$$\frac{\alpha^3\beta+\alpha\beta^3}{(\alpha^2+5\alpha+4)(\beta^2+5\beta+7)}=\frac{\alpha\beta(\alpha^2+\beta^2)}{(1+4)(1+7)}$$

$$=\frac{\alpha\beta((\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta)}{(5)(8)}=\frac{-1(25+2)}{40}=\frac{-27}{40}$$

**۱۰ - گزینه ۲** اگر ریشه‌های معادله‌ی $x^2-3x+k=0$ را $\alpha$ و $\beta$ در نظر بگیریم در این صورت ریشه‌های معادله‌ی $x^2-5x-5=0$ برابر $\alpha^2-1$ و $\beta^2-1$ می‌باشند.

$$\alpha+\beta=-\frac{b}{a}=3\ ,\ \ \alpha\cdot\beta=\frac{c}{a}=k$$



abadgaranedu.ir

$$\underbrace{\alpha^2-1+\beta^2-1}_{\substack{\text{جمع ریشه‌های معادله‌ی}\\ x^2-5x-5=0}}=-\frac{b}{a}\to(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta-2=5\to 9-2k-2=5\to 2k=2\to k=1$$

دقت کنید که $a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$ است.

۱۱ - گزینه ۳ توجه کنید که: $\alpha+\beta=\frac{-b}{a}=1$ و $\alpha\beta=\frac{c}{a}=-1$ است.

$$\alpha\beta^{-1}+\beta\alpha^{-1}=\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}=\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha\beta}=\frac{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta}{\alpha\beta}=\frac{1-2(-1)}{-1}=-3$$

توجه کنید که $a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$ است.

۱۲ - گزینه ۲

معادله‌ی درجه‌ی دومی که ریشه‌هایش $k$ واحد بیشتر از ریشه های معادله‌ی $ax^2+bx+c=0$ می باشد به صورت زیر است:

$$a(x-k)^2+b(x-k)+c=0$$

پس کافی است $x$ را به $x-1$ تبدیل کنیم.

$$3(x-1)^2+7(x-1)+1=0\Rightarrow 3x^2-6x+3+7x-7+1=0\Rightarrow 3x^2+x-3=0$$

برای مقایسه با $x^2+ax+b=0$ معادله را بر ۳ تقسیم می کنیم.

$$x^2+\frac{1}{3}x-1=0\to a=\frac{1}{3}\ ,\ b=-1$$

۱۳ - گزینه ۱ اگر دو ریشه، معکوس یکدیگر باشند حاصل ضربشان یک است.

$$x'x''=1\to\frac{c}{a}=1\to\frac{m^2}{2-m}=1\to m^2+m-2=0\xrightarrow{a+b+c=0}\begin{cases}m=1\\ m=\frac{c}{a}=-2\end{cases}$$

$$m=1\xrightarrow{\text{معادله}}x^2+3x+1=0\quad:\quad\Delta=b^2-4ac=9-4>0\quad:\quad\text{ق ق}$$

$$m=-2\xrightarrow{\text{معادله}}4x^2+3x+4=0\quad:\quad\Delta=b^2-4ac=9-64<0\quad:\quad\text{غ ق ق}$$

۱۴ - گزینه ۲ زمانی یک معادله‌ی درجه‌ی دوم ریشه‌ی مضاعف دارد که در آن $\Delta=0$ باشد.

$$x^2-x-m=0\xrightarrow{\Delta=b^2-4ac}\Delta=(-1)^2-4(1)(-m)=1+4m=0\Rightarrow m=-\frac{1}{4}$$

۱۵ - گزینه ۳ معادله را به صورت $2x^2+(m-1)x-1=0$ مرتب می‌کنیم.

$$x'+x''=-\frac{b}{a}=\frac{1-m}{2}\quad,\quad x'x''=\frac{c}{a}=-\frac{1}{2}$$

$$x'^2+x''^2=\frac{13}{4}\to(x'+x'')^2-2x'x''=\frac{13}{4}\to\frac{(1-m)^2}{4}+1=\frac{13}{4}$$

$$\to\frac{(1-m)^2}{4}=\frac{9}{4}\to(1-m)^2=9\to\begin{cases}1-m=3\to m=-2\\ 1-m=-3\to m=4\end{cases}$$

چون $\frac{c}{a}$ منفی است دلتای معادله‌ی درجه‌ی دوم همواره مثبت است و هر دو جواب قابل قبول هستند.

۱۶ - گزینه ۱

$$x^2-4x+m=5\Rightarrow x^2-4x+m-5=0$$

این معادله‌ی درجه‌ی دوم نباید ریشه حقیقی داشته باشد.

$$\Delta<0\to b^2-4ac<0\to\Delta=16-4(m-5)<0\Rightarrow 4m>36\Rightarrow m>9$$

۱۷ - گزینه ۳ ریشه‌های معادله‌ی $ax^2+bkx+ck^2=0$، $k$ برابر ریشه‌های معادله‌ی $ax^2+bx+c=0$ می باشند،

و ریشه‌های معادله‌ی $a(x-k)^2+b(x-k)+c=0$، $k$ واحد بیشتر از ریشه‌های معادله‌ی $ax^2+bx+c=0$ می باشند.

روش اول:

$$2x^2+bx+2=0\xrightarrow[\text{در } b\text{ ۲ و } c\text{ در ۲}^2]{\text{دو برابر}}2x^2+2bx+8=0\Rightarrow x^2+bx+4=0$$

$$\xrightarrow[x\to x-1]{\text{یک واحد بیشتر}}(x-1)^2+b(x-1)+4=0\Rightarrow x^2+1-2x+bx-b+4=0$$

$$\Rightarrow x^2+(b-2)x-b+5=0\quad\text{مقایسه با}\quad x^2-7x+c=0$$

پس: $b-2=-7\Rightarrow b=-5\ ,\ -b+5=c\Rightarrow c=10\to b-c=-15$

روش دوم:

اگر $y$، ریشه‌ی جدید و $x$ ریشه‌ی قدیم باشد داریم:

$$y=2x+1\Rightarrow x=\frac{y-1}{2}$$



abadgaranedu.ir

$$\xrightarrow{\text{در معادله قرار می دهیم}} ۲(\frac{(y-۱)^۲}{۴})+b(\frac{y-۱}{۲})+۲=۰ \to \frac{y^۲-۲y+۱}{۲}+\frac{by-b}{۲}+۲=۰$$

$$y^۲-۲y+۱+by-b+۴=۰ \to y^۲+(b-۲)y-b+۵=۰$$

ادامه‌ی حل مسئله مشابه روش اول است.

۱۸ - گزینه ۴ شرط آنکه در یک معادله‌ی درجه‌ی دوم، یک ریشه‌ی معادله، $k$ برابر ریشه‌ی دیگر باشد آن است که داشته باشیم: $\frac{b^۲}{ac}=\frac{(k+۱)^۲}{k}$

$$\frac{۶۴m^۲}{۴m+۸}=\frac{۱۶}{۳} \to \frac{۴m^۲}{۴m+۸}=\frac{۱}{۳} \to ۱۲m^۲=۴m+۸ \to ۱۲m^۲-۴m-۸=۰$$

$$\xrightarrow{a+b+c=۰} \begin{cases} m=۱ \\ m=\frac{c}{a}=\frac{-۸}{۱۲}=\frac{-۲}{۳} \end{cases}$$

هر دو جواب بدست آمده قابل قبول هستند چون به ازای آنها $\Delta>۰$ است.

۱۹ - گزینه ۳ اگر ریشه‌های معادله‌ی $۲x^۲-x-۲=۰$ را $\alpha$ و $\beta$ در نظر بگیریم در این صورت ریشه‌های معادله‌ی $۸x^۲-mx-۸=۰$ برابر $\alpha^۳$ و $\beta^۳$ هستند.

$$S=\alpha+\beta=-\frac{b}{a}=\frac{۱}{۲} \quad , \quad P=\alpha\beta=\frac{c}{a}=-۱$$

داریم: $\alpha^۳+\beta^۳=(\alpha+\beta)^۳-۳\alpha\beta(\alpha+\beta)=\frac{۱}{۸}+\frac{۳}{۲}=\frac{۱۳}{۸}$

$$\alpha^۳\cdot\beta^۳=(\alpha\cdot\beta)^۳=(-۱)^۳=-۱$$

معادله‌ی درجه‌ی دوم: $x^۲-Sx+P=۰ \to x^۲-\frac{۱۳}{۸}x-۱=۰ \to ۸x^۲-۱۳x-۸=۰$

$$\xrightarrow{\text{مقایسه با } ۸x^۲-mx-۸=۰} m=۱۳$$

۲۰ - گزینه ۱ مجموع ریشه‌های این معادله، برابر $-\frac{b}{a}=۶$ و حاصل‌ضرب ریشه‌های این معادله، برابر $\frac{c}{a}=۳$ است. بنابراین هر دو ریشه‌ی این معادله مثبت هستند.

$$\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}+\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}=\frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}}+\frac{\sqrt{\beta}}{\sqrt{\alpha}}=\frac{\alpha+\beta}{\sqrt{\alpha\beta}}=\frac{۶}{\sqrt{۳}}\times\frac{\sqrt{۳}}{\sqrt{۳}}=\frac{۶\sqrt{۳}}{۳}=۲\sqrt{۳}$$

۲۱ - گزینه ۳ $\alpha$ و $\beta$ ریشه‌های معادله‌ی $x^۲-۳x+۱=۰$ هستند پس $\alpha+\beta=-\frac{b}{a}=۳$ و $\alpha\beta=\frac{c}{a}=۱$ است.

$$\text{مجموع ریشه‌ها}=\alpha\sqrt{\beta}+\beta\sqrt{\alpha}=-\frac{b}{a}=-\frac{a}{۳}\xrightarrow{\text{توان ۲}}\alpha^۲\beta+\beta^۲\alpha+۲\alpha\beta\sqrt{\alpha\beta}=\frac{a^۲}{۹}$$

$$\to \alpha\beta(\alpha+\beta+۲\sqrt{\alpha\beta})=\frac{a^۲}{۹}\to ۱(۳+۲\sqrt{۱})=\frac{a^۲}{۹}\to a^۲=۴۵\to a=\pm۳\sqrt{۵}$$

چون $\alpha$ و $\beta$ مثبت هستند پس $\alpha\sqrt{\beta}+\beta\sqrt{\alpha}$ که برابر $-\frac{a}{۳}$ است باید مثبت باشد یعنی $a$ باید منفی باشد پس $a=-۳\sqrt{۵}$ است.

۲۲ - گزینه ۲ چون $\alpha+\beta=-\frac{b}{a}=۶$ و $\alpha\beta=\frac{c}{a}=۱$ است بنابراین هر دو ریشه‌ی معادله، مثبت هستند بنابراین $|\alpha|=\alpha$ , $|\beta|=\beta$ است.

$$|\alpha|\sqrt{\beta}+|\beta|\sqrt{\alpha}=\alpha\sqrt{\beta}+\beta\sqrt{\alpha}=\sqrt{(\alpha\sqrt{\beta}+\beta\sqrt{\alpha})^۲}=\sqrt{\alpha^۲\beta+\beta^۲\alpha+۲\alpha\beta\sqrt{\alpha\beta}}$$

$$=\sqrt{\alpha\beta(\alpha+\beta+۲\sqrt{\alpha\beta})}=\sqrt{۱(۶+۲)}=\sqrt{۸}=۲\sqrt{۲}$$

۲۳ - گزینه ۴

ریشه‌های قدیم: $\alpha,\beta$ و ریشه های جدید: $\alpha^۲,\beta^۲$

$$S_{\text{قدیم}}=\alpha+\beta=\frac{-b}{a}=-۴ \quad \text{و} \quad P_{\text{قدیم}}=\alpha\cdot\beta=\frac{c}{a}=-۱$$

$$S_{\text{جدید}}=\alpha^۲+\beta^۲=(\alpha+\beta)^۲-۲\alpha\beta=(-۴)^۲-۲(-۱)=۱۶+۲=۱۸$$

$$P_{\text{جدید}}=\alpha^۲\cdot\beta^۲=(\alpha\cdot\beta)^۲=(-۱)^۲=۱$$

$$x^۲-Sx+P=۰\to x^۲-۱۸x+۱=۰$$

۲۴ - گزینه ۳ ابتدا معادله‌ی داده شده را مرتب می‌کنیم.

$$x^۳+mx^۲+m+۲x-m=۰\to x^۳+mx^۲+۲x=۰$$

$$\to x(x^۲+mx+۲)=۰\to\begin{cases}x=۰\\x^۲+mx+۲=۰\end{cases}$$

چون یک ریشه‌ی معادله برابر صفر است، بنابراین مجموع مربعات ریشه‌های معادله‌ی $x^۲+mx+۲=۰$ برابر ۱۲ است پس اگر $x'$ و $x''$ ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی دوم فوق باشند. داریم:

$$x'+x''=\frac{-b}{a}=-m\,,\ x'x''=\frac{c}{a}=۲$$



abadgaranedu.ir

مجموع مربعات ریشه‌ها $= ۱۲ \to x'^۲ + x''^۲ = ۱۲ \to (x' + x'')^۲ - ۲x'x'' = ۱۲$

$\to m^۲ - ۴ = ۱۲ \to m^۲ = ۱۶ \to m = \pm ۴$

هر دو جواب بدست آمده قابل قبول هستند زیرا دلتای معادله‌ی درجه‌ی دوم را منفی نمی‌کنند.

۲۵ - گزینه ۴ اگر ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی دوم داده شده را $\alpha$ و $\beta$ بنامیم باید معادله‌ی درجه‌ی دوم جدیدی بنویسیم که ریشه‌هایش $\alpha^۲$ و $\beta^۲$ باشند.

$S_{\text{قدیم}} = \alpha + \beta = \dfrac{-b}{a} = ۵ \ , \ P_{\text{قدیم}} = \alpha \cdot \beta = \dfrac{c}{a} = -۲$

$S_{\text{جدید}} = \alpha^۲ + \beta^۲ = (\alpha + \beta)^۲ - ۲\alpha\beta = ۲۵ - ۲(-۲) = ۲۹$

$P_{\text{جدید}} = \alpha^۲ \cdot \beta^۲ = (\alpha \cdot \beta)^۲ = (-۲)^۲ = ۴$

می‌دانیم که اگر مجموع $(S)$ و حاصل‌ضرب دو ریشه $(P)$ را داشته باشیم معادله‌ی درجه‌ی دوم مطلوب به صورت $x^۲ - Sx + P = ۰$ است پس معادله‌ی مطلوب به صورت $x^۲ - ۲۹x + ۴ = ۰$ است.

۲۶ - گزینه ۴ شرط آنکه یک معادله‌ی درجه‌ی دوم دارای دو ریشه‌ی متمایز مثبت باشد آن است که $\Delta > ۰$ و $\dfrac{c}{a} > ۰$ و $-\dfrac{b}{a} > ۰$ باشد.

$\Delta > ۰ \to b^۲ - ۴ac > ۰ \to ۴(a - ۲)^۲ - ۴(۱۴ - a) > ۰ \to (a - ۲)^۲ - (۱۴ - a) > ۰$

$\to a^۲ + ۴ - ۴a - ۱۴ + a > ۰ \to a^۲ - ۳a - ۱۰ > ۰ \to (a - ۵)(a + ۲) > ۰ \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} a < -۲ \ \text{یا} \ a > ۵ : I$

$\dfrac{c}{a} > ۰ \to ۱۴ - a > ۰ \to a < ۱۴ \quad : II$

$-\dfrac{b}{a} > ۰ \to ۲(a - ۲) > ۰ \to a - ۲ > ۰ \to a > ۲ \quad : III$

از اشتراک $I$ و $II$ و $III$ به جواب $۵ < a < ۱۴$ می‌رسیم.

۲۷ - گزینه ۲ یعنی باید معادله‌ی درجه‌ی دوم جدیدی بنویسیم که ریشه‌هایش $-۲$ برابر ریشه‌های معادله‌ی قدیم است برای این منظور $b$ را در $-۲$ و $c$ را در $(-۲)^۲$ ضرب می‌کنیم.

$$x^۲ - ۳x + ۱ = ۰ \xrightarrow[c \text{ ضربدر } (-۲)^۲]{b \text{ ضربدر } -۲} x^۲ + ۶x + ۴ = ۰$$

توجه کنید ریشه‌های معادله‌ی $ax^۲ + bkx + ck^۲ = ۰$، $k$ برابر ریشه‌های معادله‌ی $ax^۲ + bx + c = ۰$ هستند.

۲۸ - گزینه ۴ می‌دانیم $a^۳ + b^۳ = (a + b)^۳ - ۳ab(a + b)$ و $a^۲ + b^۲ = (a + b)^۲ - ۲ab$ است.

$x_۲$ ریشهٔ معادله است، پس در معادله صدق می‌کند:

$$x_۲ \xrightarrow{\text{صدق}} x_۲^۲ + x_۲ = ۳$$

پس: $x_۱^۳ + x_۱^۲ + ۳x_۲ = x_۱^۳ + x_۱^۲ + (x_۲^۲ + x_۲)x_۲ = x_۱^۳ + x_۱^۲ + x_۲^۳ + x_۲^۲ = (x_۱^۳ + x_۲^۳) + (x_۱^۲ + x_۲^۲)$

$$= (x_۱ + x_۲)^۳ - ۳x_۱x_۲(x_۱ + x_۲) + (x_۱ + x_۲)^۲ - ۲x_۱x_۲ \xrightarrow[x_۱x_۲ = \frac{c}{a} = -۳]{x_۱ + x_۲ = -\frac{b}{a} = -۱} (-۱)^۳ - ۳(-۳)(-۱) + (-۱)^۲ - ۲(-۳) = -۱ - ۹ + ۱ + ۶ = -۳$$

۲۹ - گزینه ۱ می‌دانیم معادله‌ی درجه دومی که مجموع ریشه‌های آن $S$ و حاصل‌ضرب ریشه‌های آن $P$ باشد به صورت $x^۲ - Sx + P = ۰$ است.

$S = ۳ - \sqrt{۹ - a} + ۳ + \sqrt{۹ - a} = ۶$

$P = (۳ - \sqrt{۹ - a})(۳ + \sqrt{۹ - a}) = ۹ - (۹ - a) = a$

$x^۲ - Sx + P = ۰ \Rightarrow x^۲ - ۶x + a = ۰$

۳۰ - گزینه ۳ چون $x + ۲ = ۰$ یک ریشه $x = -۲$ دارد.

کافی است $x^۲ - ۲x + ۴ + m = ۰$ دو ریشه‌ی حقیقی داشته باشد.

$x^۲ - ۲x + ۴ + m = ۰ \xrightarrow{\Delta \geq ۰} \Delta = b^۲ - ۴ac = (-۲)^۲ - ۴(۱)(۴ + m) \geq ۰$

$\Rightarrow ۴ - ۱۶ - ۴m \geq ۰ \Rightarrow -۴m \geq ۱۲ \Rightarrow m \leq -۳$

توجه کنید اگر گفته شده بود سه ریشهٔ حقیقی متمایز در آن صورت $\Delta > ۰$ را منظور می‌کردیم.

۳۱ - گزینه ۴

برای داشتن دو ریشه‌ی حقیقی متمایز باید $\Delta > ۰$ باشد. $(b^۲ - ۴ac > ۰)$

$\Delta = ۱۶ - ۴k > ۰ \Rightarrow k < ۴ \Rightarrow x'x'' = \dfrac{c}{a} = k \Rightarrow x'x'' < ۴$

۳۲ - گزینه ۱

اگر بخواهیم دو ریشه ی متمایز داشته باشیم $\Delta$ باید بزرگتر از صفر باشد پس داریم:

$۲x^۲ + ax + a - \dfrac{۳}{۲} = ۰$

$\Delta = b^۲ - ۴ac = a^۲ - ۸a + ۱۲ > ۰ \Rightarrow (a - ۲)(a - ۶) > ۰$

abadgaranedu.ir

| $a$ | $-\infty$ | | ۲ | | ۶ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| عبارت>0 | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |

$$\Rightarrow \begin{cases} a > 6 \\ a < 2 \end{cases}$$

**۳۳ - گزینه ۴** با توجه به صورت سؤال $(x-a)(x-b)=-1$، خط $y=-1$ منحنی $y=(x-a)(x-b)$ را در دو نقطه قطع می کند پس هر خط بالای $y=-1$ منحنی را در دو نقطه قطع می کند. با توجه به گزینه‌ها گزینه‌ی چهار، خط $y=2$ منحنی را در دو نقطه قطع می کند.

**۳۴ - گزینه ۳** باید $\Delta < 0$ باشد:

$$\Delta = b^2 - 4ac = m^2 - 4(1)(m) = m^2 - 4m < 0$$

حال عبارت $m^2 - 4m$ را تعیین علامت کرده و نواحی مورد نظر را مشخص می‌کنیم:

| $m$ | $-\infty$ | | $0$ | | $4$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $m^2 - 4m < 0$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |

$$\Rightarrow 0 < m < 4$$

**۳۵ - گزینه ۴** باید $\Delta > 0$ باشد: $(b^2 - 4ac > 0)$

$$\Delta = (-m)^2 - 4(m-1) > 0 \Rightarrow m^2 - 4m + 4 > 0 \Rightarrow (m-2)^2 > 0$$

این نامساوی همواره برقرار است به غیر از حالتی که $m = 2$ باشد.

**۳۶ - گزینه ۱**

$$S = x_1 + x_2 = 2 + \sqrt{4-a} + 2 - \sqrt{4-a} = 4$$
$$P = x_1 \times x_2 = (2 + \sqrt{4-a})(2 - \sqrt{4-a}) = 4 - (4-a) = a$$
$$x^2 - Sx + P = 0 \Rightarrow x^2 - 4x + a = 0$$

abadgaranedu.ir

بی نام