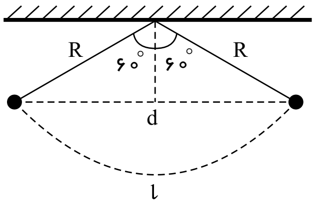
پاسخنامه تشریحی

۱ - گزینه ۲

باتوجه به شکل روبه‌رو مسافت طی شده و اندازهٔ جابه‌جایی گلوله را برحسب طول نخ (R) به دست می‌آوریم.



$$\begin{cases} l = (\frac{۱۲۰^\circ}{۳۶۰^\circ}) \times \text{محیط دایره مسیر حرکت} = \frac{۱}{۳} \times ۲\pi R = \frac{۲\pi}{۳}R \\ \sin ۶۰^\circ = \frac{(\frac{d}{۲})}{R} = \frac{d}{۲R} \Rightarrow d = ۲R\sin ۶۰^\circ = ۲R\frac{\sqrt{۳}}{۲} = \sqrt{۳}R \end{cases}$$

می‌دانیم نسبت تندی متوسط به اندازهٔ سرعت متوسط برابر نسبت مسافت به اندازهٔ جابه‌جایی است.

$$\frac{S_{av}}{v_{av}} = \frac{(\frac{l}{\Delta t})}{(\frac{d}{\Delta t})} = \frac{l}{d} = \frac{(\frac{۲\pi}{۳}R)}{\sqrt{۳}R} = \frac{۲\pi}{۳\sqrt{۳}} \Rightarrow S_{av} = \frac{۲\pi}{۳\sqrt{۳}}v_{av}$$

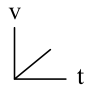
$$\Rightarrow S_{av} = \frac{۲\pi}{۳\sqrt{۳}} \times ۱٫۵\frac{m}{s} = \frac{\pi}{\sqrt{۳}}\ \frac{m}{s} = \frac{\sqrt{۳}}{۳}\pi\frac{m}{s}$$

پس پاسخ گزینهٔ ۲ است.

توجه: در این سؤال زمان حرکت گلوله و طول نخ در پاسخ بی‌اثر هستند. البته در راه‌حل دیگری می‌توان از زمان حرکت گلوله ابتدا جابه‌جایی، سپس طول نخ و در نهایت مسافت و تندی متوسط را محاسبه کرد.

۲ - گزینه ۱

$$V = ۳\sqrt{x} \rightarrow \begin{cases} V^۲ = ۹x \\ V^۲ - V_\circ^۲ = ۲a\Delta x \end{cases} \rightarrow \begin{cases} V_\circ = ۰ \\ a = ۴٫۵m/s^۲ \end{cases}$$

چون: $V_\circ = ۰$ و $a > ۰$ است بنابراین حرکت تُند شونده است: 

و چون $V > ۰$ است در جهت $+$ محور xها حرکت می‌کند.

۳ - گزینه ۳ به این موارد توجه می‌کنیم:

۱) خط مماس بر سهمی در لحظهٔ $t = ۴s$ منطبق بر نمودار مکان - زمان متحرک A است. بنابراین سرعت اتومبیل B در لحظهٔ $t = ۴s$ برابر $۳m/s$ است.

۲) حرکت متحرک A یکنواخت است بنابراین:

$$X_A = V_A t + X_{\circ A} = ۳t + X_{\circ A}$$

۳) حرکت متحرک B شتابدار با شتاب ثابت است. یعنی:

$$X = \frac{۱}{۲}a_B t^۲ + V_{\circ B} - t + X_{\circ B} = -t^۲ + ۱۱t$$

$$t = ۴s \rightarrow x_A = x_B \rightarrow ۳t + x_{\circ A} = -t^۲ + ۱۱t$$

$$\rightarrow ۳ \times ۴ + x_{\circ A} = -۴^۲ + ۱۱ \times ۴ = -۱۶ + ۴۴ = ۲۸$$

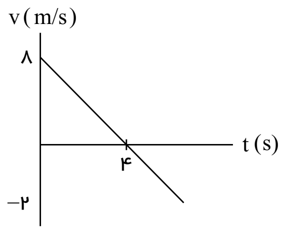
$$\rightarrow x_{\circ A} = ۲۸ - ۱۲ \rightarrow x_{\circ A} = ۱۶m$$

۴) و فاصلهٔ دو اتومبیل در مبدأ زمان:

$$x_{\circ A} - x_{\circ B} = ۱۶ - ۰ = ۱۶m$$

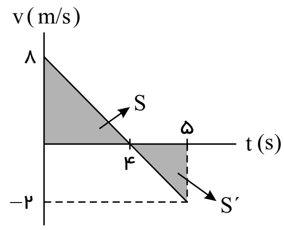
۴ - گزینه ۳ قدم اول: هنگامی که در مسأله‌ای یا تستی تندی متوسط یا مسافت طی شده خواسته می‌شود می‌بایستی خیلی حواسمون به تغییر جهت دادن یا ندادن جسم باشد، اگر به معادلهٔ ($v - t$) داده شده، خوب نگاه کنیم می‌فهمیم متحرک حتماً تغییر جهت داده است. کافی است نمودار ($v - t$) را رسم کنیم:

$$v=-۲t+۸ \to v=۰ \Rightarrow -۲t+۸ \Rightarrow \boxed{t=۴s}$$



در لحظهٔ $t=۴s$ متحرک تغییر جهت داده است.

قدم دوم: مسافت طی شده را به کمک مجموع مساحت‌های بالا و زیر محور t می‌یابیم:



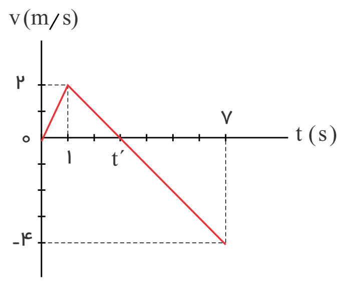
$$t=۵s \Rightarrow v=-۲\times ۵+۸ \Rightarrow \boxed{v=-۲m/s}$$

$$L=S+S'=\frac{۱}{۲}\times ۸\times ۴+\frac{۱}{۲}\times ۲\times ۱=۱۶+۱=۱۷m$$

$$S_{av}=\frac{L}{\Delta t}=\frac{۱۷}{۵}=۳/۴m/s$$

۵ ـ گزینه ۱

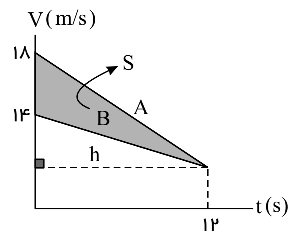
زمانی که تندی متحرک در حال کاهش است، حرکت متحرک کندشونده است. بنابراین مطابق نمودار از لحظهٔ $t=۱s$ تا t'، حرکت متحرک کندشونده است. برای محاسبهٔ با استفاده از تشابه مثلث‌ها داریم:



$$\frac{۲}{t'-۱}=\frac{۴}{۷-t'} \Rightarrow t'=۳s$$

در بازهٔ $t=۱s$ تا $t'=۳s$ یعنی به مدت $۲s$ حرکت متحرک کندشونده است.

۶ ـ گزینه ۳



$$S_A-S_B=S=\frac{۱}{۲}(۱۲)\underbrace{(۱۸-۱۴)}_{۴}=۲۴m$$

۷ ـ گزینه ۴

$$\frac{\text{تندی متوسط}}{\text{سرعت متوسط}}=\frac{\frac{\text{مسافت طی شده}}{\text{زمان کل}}}{\frac{\text{اندازه‌ی جابجایی کل}}{\text{زمان کل}}}=\frac{\text{مسافت طی شده}}{\text{اندازه‌ی جابجایی کل}}=\frac{۳۰۰+۲۰۰}{۳۰۰-۲۰۰}=۵$$

۸ ـ گزینه ۲

$$۷۲\frac{km}{h}\div ۳/۶=۲۰\frac{m}{s}$$

$$\text{سرعت متوسط}=\frac{\text{جابجایی}}{\text{زمان حرکت}}$$

$$\text{زمان حرکت}=\frac{\text{جابجایی}}{\text{سرعت حرکت}}$$

اگر مسافت برگشتی متحرک را با Δx نشان دهیم، داریم:

$$\text{جابه‌جایی}=۱۲۰۰-\Delta x$$

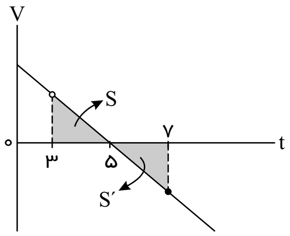
$$\text{زمان حرکت}=\frac{۱۲۰۰}{۲۰}+\frac{\Delta x}{۲۰}$$

$$\text{بزرگی سرعت متوسط} = ۸ = \frac{۱۲۰۰ - \Delta x}{\frac{۱۲۰۰}{۲۰} + \frac{\Delta x}{۲۰}} \Rightarrow ۴۸۰ + \frac{۲}{۵}\Delta x = ۱۲۰۰ - \Delta x$$

$$\Rightarrow \Delta x \cong ۵۱۵m$$

۹ - گزینه ۴ فرض کنید سرعت اوّلی و شتاب متحرک غیر هم علامت هستند و کافی است. نمودار سرعت - زمان آن را رسم کنیم، مثلاً: $V_\circ > \circ$ و $a < \circ$

۱) در بازهٔ زمانی ۳ تا ۵ ثانیه متحرک تغییر جهت داده ولی شتاب ثابت است.



۲) متحرک در بازه‌های زمانی ۳ تا ۵ ثانیه و ۵ تا ۷ ثانیه مسافت‌های یکسانی را طی می‌کنند.

۳) در بازهٔ زمانی ۳ تا ۵ ثانیه سرعت متوسط صفر است:

$$U_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{S' - S}{۷ - ۳} = \frac{\circ}{۴} = \circ$$

۱۰ - گزینه ۲ در بازهٔ زمانی که بردار مکان خلاف محور x است، $x < \circ$ است.

$$t^۲ - ۸t + ۱۵ < \circ \Rightarrow (t-۳)(t-۵) < \circ$$

$t(s)$		۳		۵	
x	+	۰	−	۰	+

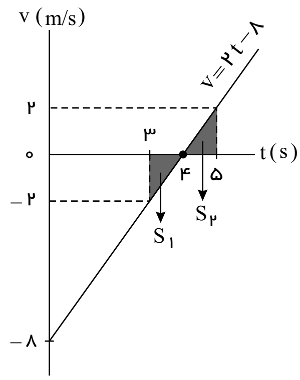
$$\left.\begin{array}{l} x = \frac{۱}{۲}at^۲ + v_\circ t + x_\circ \\ x = t^۲ - ۸t + ۱۵ \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{۱}{۲}a = ۱ \Rightarrow a = ۲m/s^۲ \;,\; v_\circ = -۸m/s$$

اکنون با استفاده از معادلهٔ سرعت - زمان در حرکت با شتاب ثابت، نمودار سرعت - زمان را رسم می‌کنیم:

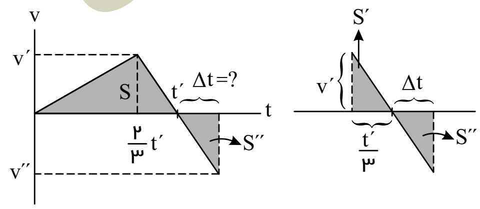
$$v = at + v_\circ \Rightarrow v = ۲t - ۸$$

$t(s)$	۰	۴
$v(m/s)$	−۸	۰

$$s_{av} = \frac{|s_۱| + |s_۲|}{۵ - ۳} = \frac{۱+۱}{۲} = ۱m/s$$



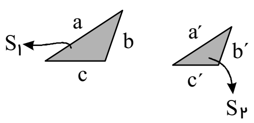
۱۱ - گزینه ۳



$$v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{S - S''}{\Delta t} = \circ \rightarrow S = S'' \Rightarrow S'' = \frac{۱}{۲}v't'$$

از طرفی ۲ مثلث با مساحت‌های S'' و S' متشابه هستند.

نکته: می‌دانیم در دو مثلث متشابه

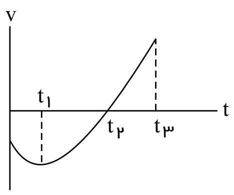


$$\frac{S_۱}{S_۲} = (\frac{a}{a'})^۲ = (\frac{b}{b'})^۲ = (\frac{c}{c'})^۲$$

$$\frac{S''}{S'}=\left(\frac{\Delta t}{\frac{t'}{۳}}\right)^۲ \xrightarrow[S'=\frac{۱}{۲}v'\times\frac{t'}{۳}]{S''=S=\frac{۱}{۲}v't'} \frac{\frac{۱}{۲}v't'}{\frac{۱}{۶}v't'}=\left(\frac{\Delta t}{\frac{t'}{۳}}\right)^۲ \rightarrow ۳=\left(۳\frac{\Delta t}{t'}\right)^۲ \rightarrow \Delta t=\frac{\sqrt{۳}}{۳}t'$$

۱۲ - گزینه ۴

در بازهٔ صفر تا $t_۲$ متحرک در خلاف جهت محور x حرکت می‌کند، چون سرعت در این بازه منفی است.



با توجه به این‌که در این بازه سرعت تغییر علامت نمی‌دهد و متحرک روی خط راست حرکت می‌کند، پس اندازهٔ جابه‌جایی و مسافت طی شده طی این بازه برابر است.

شیب خط واصل دو نقطه در نمودار سرعت – زمان برابر با شتاب متوسط است. از لحظهٔ صفر تا $t_۲$ شیب خط واصل مثبت است، پس شتاب متوسط مثبت است.

از صفر تا $t_۱$ چون شیب خط مماس بر نمودار منفی است، شتاب منفی و از $t_۱$ تا $t_۲$ شیب خط مماس بر نمودار مثبت است، پس شتاب مثبت است. (در لحظهٔ $t_۱$ جهت شتاب عوض شده است.) پس گزینهٔ «۴» نادرست است.

۱۳ - گزینه ۳ برای محاسبهٔ سرعت متوسط از روی نمودار مکان – زمان، شیب خط واصل دو نقطهٔ مورد نظر را می‌یابیم. در t ثانیهٔ دوم حرکت داریم:

$$v_{av}=\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{x_۱-x_۰}{۲t-t}=\frac{x_۱-x_۰}{t} \quad (*)$$

در $۲t$ ثانیهٔ اول حرکت داریم:

$$v'_{av}=\frac{\Delta x'}{\Delta t'}=\frac{x_۱-x_۰}{۲t-۰}=\frac{x_۱-x_۰}{۲t} \quad (**)$$

بنابراین:

$$\xrightarrow{(*),(**)} \frac{v_{av}}{v'_{av}}=\frac{\frac{x_۱-x_۰}{t}}{\frac{x_۱-x_۰}{۲t}}=۲$$

۱۴ - گزینه ۱ مکان متحرک در لحظه‌های صفر، $۱s$، $۳s$ و $۴s$ را به‌دست می‌آوریم.

$$\begin{cases} t=۰ \Rightarrow x_۰=۰^۳-۲۰\times۰+۸=۸m \\ t=۱s \Rightarrow x_۱=۱^۳-۲۰\times۱+۸=-۱۱m \\ t=۳s \Rightarrow x_۳=۳^۳-۲۰\times۳+۸=-۲۵m \\ t=۴s \Rightarrow x_۴=۴^۳-۲۰\times۴+۸=-۸m \end{cases}$$

حال اندازهٔ سرعت متوسط را در بازه‌های زمانی مورد نظر حساب می‌کنیم:

$$۰\,s<t<۱\,s \Rightarrow |v_{av۱}|=\left|\frac{x_۱-x_۰}{۱-۰}\right|=\left|\frac{(-۱۱)-(+۸)}{۱}\right|=۱۹m/s$$

$$۰\,s<t<۴s \Rightarrow |v_{av۲}|=\left|\frac{x_۴-x_۰}{۴-۰}\right|=\left|\frac{(-۸)-(+۸)}{۴}\right|=۴m/s$$

$$۱s<t<۴s \Rightarrow |v_{av۳}|=\left|\frac{x_۴-x_۱}{۴-۱}\right|=\left|\frac{(-۸)-(-۱۱)}{۳}\right|=۱m/s$$

$$۳s<t<۴s \Rightarrow |v_{av۴}|=\left|\frac{x_۴-x_۳}{۴-۳}\right|=\left|\frac{(-۸)-(-۲۵)}{۱}\right|=۱۷m/s$$

پس پاسخ گزینهٔ ۱ است.

۱۵ - گزینه ۳ ابتدا مدت زمان حرکت به سوی جلو را حساب می‌کنیم.

$$S_۱=\frac{l_۱}{\Delta t_۱} \Rightarrow \Delta t_۱=\frac{l_۱}{S_۱}=\frac{۵۰۰m}{۲۰\,m/s}=۲۵\,s$$

باتوجه به این که ربات $۱۵s$ در این مسیر بازگشته است، ۴۰ ثانیه آغاز حرکت همان کل زمان حرکت می‌شود.

حالا مسافتی را که ربات در این مسیر مستقیم بازگشته است را به دست می‌آوریم:

$$S_۲=\frac{l_۲}{\Delta t_۲} \Rightarrow l_۲=S_۲\Delta t_۲=۱۲m/s\times۱۵s=۱۸۰\,m$$

بنابراین ربات در مسیر مستقیم و در مدت $۴۰s$ مسافت $۵۰۰m$ را رفته است و مسافت $۱۸۰m$ را بازگشته است و داریم:

اندازهٔ جابه‌جایی $=d=l_۱-l_۲=۵۰۰m-۱۸۰m=۳۲۰m$

$\Rightarrow$ اندازهٔ سرعت متوسط $=v_{av}=\dfrac{d}{\Delta t}=\dfrac{۳۲۰m}{۴۰\,s}=۸m/s$

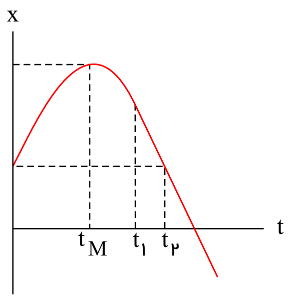
پس پاسخ گزینهٔ ۳ است.

۱۶ - گزینه ۴ در بازهٔ زمانی ۰ تا $t_۱$، جابه‌جایی و سرعت متوسط مثبت و در بازهٔ زمانی ۰ تا $t_۲$، جابه‌جایی و سرعت متوسط صفر هستند. در نتیجه سرعت متوسط در بازهٔ زمانی ۰ تا $t_۱$ از سرعت

فیزیک دوازدهم

متوسط در بازهٔ زمانی ۰ تا $t_۲$ بزرگ‌تر است و داریم: $V_{av} > V'_{av}$.

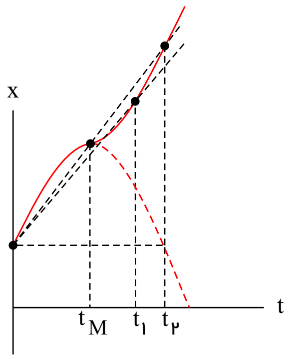
در نمودار مکان – زمان مشاهده می‌شود که جهت حرکت در لحظهٔ t_M تغییر کرده است. برای مقایسهٔ تندی متوسط در دو بازهٔ زمانی مختلف، فرض می‌کنیم متحرک در لحظهٔ t_M تغییر جهت ندهد و حرکت خود را پس از توقف در همان جهت قبلی ادامه دهد، که در این صورت نمودار مکان – زمان آن به‌صورت شکل روبه‌رو (شکل دوم) می‌شود (به بیان دیگر شکل روبه‌رو نمودار مسافت – زمان این حرکت است).



در این نمودار شیب خطی که از لحظهٔ ۰ و $t_۱$ عبور می‌کند برابر تندی متوسط در بازهٔ زمانی ۰ تا $t_۱$ و شیب خطی که از ۰ و $t_۲$ عبور می‌کند برابر تندی متوسط در بازهٔ زمانی ۰ تا $t_۲$ است.

با توجه به نمودار و شیب این دو خط نتیجه می‌گیریم که تندی متوسط در بازهٔ زمانی ۰ تا $t_۱$ از تندی متوسط در بازهٔ زمانی ۰ تا $t_۲$ کوچک‌تر است و داریم: $S_{av} < S'_{av}$.

بنابراین پاسخ گزینهٔ ۴ است.



۱۷ – گزینهٔ ۲ بررسی گزینه‌ها:

گزینهٔ «۱» نادرست است. متحرک در بازهٔ زمانی $۳s$ تا $۱۰s$ در جهت مثبت محور x و در بازهٔ زمانی $۱۴s$ تا $۱۸s$ در جهت منفی محور حرکت می‌کند. بنابراین در لحظهٔ $۸s$ به‌سوی مثبت و در لحظهٔ $۱۶s$ به سوی منفی در حرکت است و تغییر جهت نمی‌دهد.

گزینهٔ «۲» درست است. متحرک در بازهٔ زمانی صفر تا $۳s$ و $۱۴s$ تا $۱۸s$ و در مجموع به مدت $۷s$ در خلاف جهت محور x حرکت نموده است.

گزینهٔ «۳» نادرست است. در بازهٔ زمانی $۱۰s$ تا $۱۴s$ و به مدت ۴ ثانیه متحرک ساکن و در نتیجه سرعت آن صفر بوده است.

گزینهٔ «۴» نادرست است. تندی متوسط برابر مسافت طی‌شده تقسیم بر بازهٔ زمانی است. چون برای جسم در حال حرکت، هیچ‌وقت مسافت طی‌شده صفر نمی‌شود، لذا تندی متوسط نیز صفر نخواهد شد.

دقت کنید، در بازهٔ زمانی صفر تا ۱۶ ثانیه چون جابه‌جایی متحرک صفر می‌باشد، سرعت متوسط آن صفر خواهد شد.

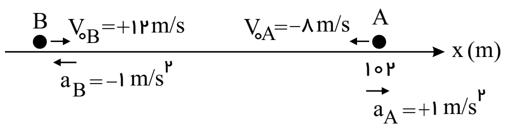
۱۸ – گزینهٔ ۳ مطابق با نمودار، متحرک A در لحظهٔ $t = ۵s$ از مبدأ مکان عبور می‌کند. معادلهٔ مکان – زمان متحرک A را نوشته و مکان متحرک A را در لحظهٔ $t = ۱۰s$ که متحرک B از مبدأ مکان عبور می‌کند، محاسبه می‌کنیم:

$$v_A = (v_{av})_A = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{۰ - (-۲۰)}{۵ - ۰} \Rightarrow (v_{av})_A = ۴m/s$$

$$x_A = v_A t + x_۰ \Rightarrow x_A = ۴t - ۲۰ \xrightarrow{t=۱۰s} x_A = ۴ \times ۱۰ - ۲۰ \Rightarrow x_A = ۲۰m$$

۱۹ – گزینهٔ ۳ ۱) الزاماً با برابر قرار دادن X ها نمی توانیم به زمان مورد نظر برسیم. چون ممکن است در این مدت یکی از دو متحرک قبل از رسیدن متحرک دوم به آن، توقف نموده باشد.

۲) از یک محور x استفاده می نماییم. مکان اولیه متحرک سمت چپ را صفر می گیریم (در این جا تفاوتی ندارد کدام در کدام سو قرار گیرند.)



۳) معادلات مکان – زمان ۲ متحرک را می نویسیم:

$$B: X_B = \frac{۱}{۲}a_B t^۲ + V_{۰B}t + V_{۰B} \to X_B = \frac{۱}{۲}(-۱)t^۲ + ۱۲t + ۰ \to X_B = -\frac{۱}{۲}t^۲ + ۱۲t$$

$$A: X_A = \frac{۱}{۲}a_A t^۲ + V_{۰A} = \frac{۱}{۲}(+۱)t^۲ + (-۸)t + ۱۰۲ \to X_A = \frac{۱}{۲}t^۲ - ۸t + ۱۰۲$$

۴) اگر بخواهیم زمان به هم رسیدن دو متحرک را از برابر قرار دادن معادلات مکان – زمان دو متحرک بیابیم:

$$X_A = X_B \to -\frac{۱}{۲}t^۲ + ۱۲t = \frac{۱}{۲}t^۲ - ۸t + ۱۰۲ \to t^۲ - ۲۰t + ۱۰۲ = ۰$$

$$\to \Delta = (-۲۰)^۲ - ۴(۱)(۱۰۲) = -۸ < ۰$$

یعنی باید نتیجه بگیریم که به هم برخورد نمی کنند یعنی گزینهٔ «۴» ...

اما ممکن است این نتیجه گیری سریع، اشتباه باشد. متحرک A بعد از گذشت ۸s (مفهوم شتاب) متوقف می شود و در این لحظه مکان متحرک A:

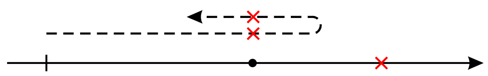
$$X_A = \frac{1}{2}t^2 - 8t + 102 = \frac{1}{2} \times 8^2 - 8 \times +102 = 70$$

۵) حال ببینیم متحرک B پس از چه مدت به این مکان می‌رسد:

$$X_B = -\frac{1}{2}t^2 - 12t \rightarrow 70 = -\frac{1}{2}t^2 + 12t \rightarrow t^2 - 24t + 140 = 0$$

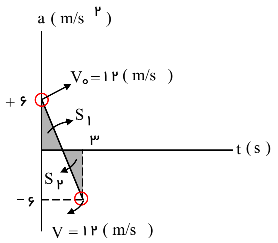
$$\begin{cases} t = \frac{24 \pm \sqrt{16}}{2(1)} = \frac{24 \pm 4}{2} \begin{cases} t_1 = 14s \\ t_2 = 10s \end{cases} \\ \Delta = (-24)^2 - 4(1)(140) = 576 - 560 = 16 \end{cases}$$

۶) حال کدام لحظه را انتخاب کنیم اگر اتومبیل ترمز نکرده بود و به فرض خلاص بود و توسط یک نیروی ثابت در خلاف جهت حرکت آن به شتاب کُند شوندهٔ $1m/s^2$ می‌دادیم آنگاه اتومبیل B، ۲ بار از کنار اتومبیل A عبور می‌کرد:



۲۰ ـ گزینه ۱

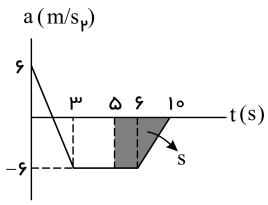
از لحظهٔ $t = 0$ تا t=۳s تغییر سرعت نداریم چون مساحت سطح زیر نمودار در بازهٔ زمانی $t = 0$ تا $t = 3s$ برابر است با:



$$\Delta V = S_1 - S_2 = 0 \rightarrow V_{(t=3s)} = V_{(t=0)} = 12m/s$$

با توجه به مفهوم شتاب، پس از $t = 3s$، $2s$ طول می‌کشد تا سرعت متحرک $V = 0$ شود یعنی در $t = 5s$ و از این پس سرعت منفی خواهد بود یعنی در بازهٔ زمانی $3s \leq t \leq 10s$ حال کافی است به کمک مساحت زیر نمودار ΔV را در این بازهٔ زمانی بیابیم.

در بازهٔ زمانی $t_1 = 5s$ تا $t_2 = 10s$ داریم:



$$\Delta V = 0 - S = -S = -\frac{1}{2} \times 6 \times \underbrace{(5+1)}_{6} \rightarrow \Delta V = -18m/s$$

$$a_{av} = \frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{-18}{10-5} = -\frac{18}{5} = -\frac{36}{10} \rightarrow a_{av} = -3{,}6m/s^2$$

۲۱ ـ گزینه ۳

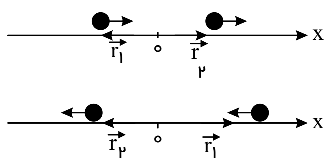
$V_{av} = \frac{V' + 0}{2} = \frac{V'}{2}$: در بازهٔ زمانی صفر تا t_1

$V = V' =$ ثابت $\rightarrow V_{av} = V' =$ ثابت : دربازهٔ زمانی t_1 تا t_2

$V_{av} = \frac{V' + V''}{2} < \frac{V' + V'}{2} = V'$: در بازهٔ زمانی t_2 تا t_3

۲۲ ـ گزینه ۱

بردار مکان متحرکی که بر خط راست روی محور X ها حرکت می‌کند زمانی تغییر جهت می‌دهد که : $X = 0$ شده و X تغییر علامت دهد؛ مانند:



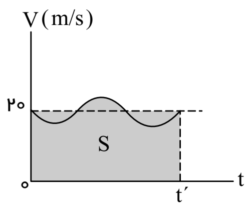
$$X = t^2 - 8t + 16 = (t-4)^2 = 0 \Rightarrow t = 4s$$

اما همواره $X = (t-4)^2 \geq 0$ و تغییر علامت نمی‌دهد پس بردار مکان تغییر جهت نمی‌دهد.

۲۳ ـ گزینه ۲

$$\begin{cases} V_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{S}{t' - 0} = \frac{S}{t'} \quad (1) \\ S < 20t' \quad (2) \end{cases}$$

$\xrightarrow{(۱),(۲)} V_{av} < ۲۰m/s$



متحرک تغییر جهت نداده و پیوسته $v > ۰$ (علی‌رغم اینکه مقدار تندی جسم تغییر کرده و نوسان داشته!)

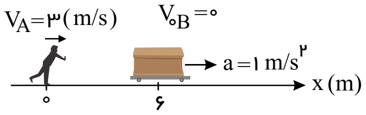
بنابراین: $S_{av} = v_{av} < ۲۰$

$$S_{av} = \frac{\overbrace{\ell}^{\text{مسافت طی شده}}}{\Delta t} = \frac{\overbrace{S}^{\text{مساحت}}}{\Delta t} = \frac{S}{t'} \xrightarrow{S<۲۰t'} S_{av} < ۲۰m/s$$

۲۴ - گزینه ۱ شخصی را با A و اتوبوس را با B نشان می‌دهیم:

چون شخص با سرعت ثابت $۳m/s$ حرکت می‌کند، اگر مکان شخص را وقتی به فاصلهٔ ۶ متری اتوبوس می‌رسد $X_{\circ A} = ۰$ فرض کنیم:

و حرکت اتوبوس یک حرکت شتابدار با شتاب ثابت می‌باشد: $X_A = V_A t + X_{\circ A} \to X_A = ۳t$



$$X_B = \frac{۱}{۲}a_B t^۲ + \cancel{V_{\circ B}}\,t + X_{\circ B} = \frac{۱}{۲}(۱)(t^۲) + ۶ = \frac{۱}{۲}t^۲ + ۶ \to X_B = \frac{۱}{۲}t^۲ + ۶$$

ابتدا فاصلهٔ اتوبوس و شخص را می‌یابیم:

$$\Delta X = X_B - X_A = (\frac{۱}{۲}t^۲ + ۶) - ۳t \to \Delta X = \frac{۱}{۲}t^۲ - ۳t + ۶$$

این تابع ΔX (چون ضریب $t^۲$ مثبت است.) دارای min است. برای یافتن min این تابع:

$$t = -\frac{b}{۲a} = -\frac{(-۳)}{۲\frac{۱}{۲}} = \frac{۳}{۱} = ۳s$$

$$\Delta X_{min} = \frac{۱}{۲}(۳)^۲ - ۳(۳) + ۶ = ۴{,}۵ - ۹ + ۶ \to \Delta X_{min} = ۱{,}۵m$$

۲۵ - گزینه ۴ در حرکت با سرعت ثابت، جابه‌جایی متناسب با زمان است.

$$x = v\Delta t + x_\circ \Rightarrow \Delta x = v\Delta t \Rightarrow \frac{\Delta x_۱}{\Delta x_۲} = \frac{\Delta t_۱}{\Delta t_۲}$$

با توجه به این‌که اندازهٔ جابه‌جایی متحرک در بازهٔ زمانی $t_۱ = ۳s$ تا $t_۲ = ۸s$ برابر با $|\Delta x| = |-۱۴ - ۵| = ۱۹m$ است، بنابراین در هر بازهٔ زمانی ۵ ثانیه‌ای دیگر نیز اندازهٔ جابه‌جایی آن برابر با $۱۹m$ خواهد بود.

۲۶ - گزینه ۱ اندازهٔ بردار جابه‌جایی همواره کوچک‌تر یا مساوی مسافت طی شده است و تنها در حرکت بر خط راستی که در یک سو و بدون تغییر جهت انجام می‌شود، اندازهٔ بردار جابه‌جایی با مسافت طی شده برابر می‌شود.

پس هنگامی که در حرکت روی محور x، اندازهٔ بردار جابه‌جایی کوچک‌تر از مسافت طی شده است، نتیجه می‌گیریم جهت حرکت حداقل یک بار تغییر کرده است و گزینهٔ ۱ پاسخ است.

باتوجه به این که اندازهٔ جابه‌جایی کوچک‌تر از مسافت است، اندازهٔ سرعت متوسط کوچک‌تر از اندازهٔ تندی متوسط است و گزینهٔ ۳ درست نمی‌باشد.

از کوچک‌تر بودن اندازهٔ جابه‌جایی نسبت به مسافت نمی‌توان نتیجه‌ای در مورد جهت بردار مکان یا بردار جابه‌جایی گرفت و در نتیجه در مورد درستی یا نادرستی گزینه‌های ۲ و ۴ نمی‌توان اظهارنظر کرد.

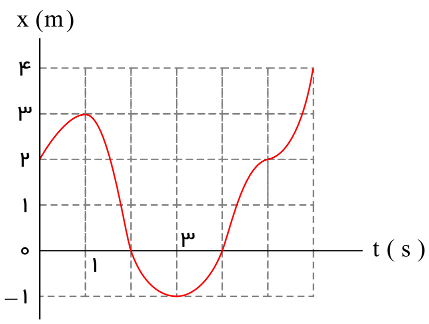
۲۷ - گزینه ۱ سرعت متحرک در هر لحظه برابر شیب خط مماس بر منحنی $x - t$ در آن لحظه است. در نمودار $x - t$ متحرک، خط مماس بر منحنی در لحظهٔ $t = ۸\,\text{min}$ از نقاط $(۲\,\text{min}\,,\,۰\,m)$ و $(۸\,\text{min}\,,\,۱۲m)$ عبور می‌کند. بنابراین:

$$\text{سرعت در لحظه } ۸\,\text{min} = \text{شیب خط مماس} = \frac{۱۲m - ۰m}{۸\,\text{min} - ۲\,\text{min}} = \frac{۱۲m}{۶\,\text{min}} = \frac{۱۲m}{۳۶۰s} = \frac{۱}{۳۰}\,\frac{m}{s}$$

پس پاسخ گزینهٔ ۱ است.

۲۸ - گزینه ۲

با توجه به نمودار $x-t$ در شکل روبه‌رو متحرک در مدت ۶ ثانیه، دو بار و در لحظه‌های $۱s$ و $۳s$ تغییر جهت داده است. برای محاسبهٔ مسافت و تندی متوسط، حرکت را در بازه‌های زمانی $(۰\,s\,,\,۱\,s)$ و $(۱\,s\,,\,۳s)$ و $(۳s\,,\,۶s)$ بررسی می‌کنیم.



$$\begin{cases} ۰\,s<t<۱\,s \Rightarrow \ \Delta x_۱ = ۳m-۲m=+۱m \\ ۱\,s<t<۳s \ \Rightarrow \ \Delta x_۲ = (-۱m)-۳m=-۴m \\ ۳s<t<۶s \ \Rightarrow \ \Delta x_۳ = (+۴m)-(-۱m)=+۵m \end{cases}$$

در ۶ ثانیهٔ اول $\Rightarrow l=|\Delta x_۱|+|\Delta x_۲|+|\Delta x_۳|=۱۰\,m \ \Rightarrow \ S_{av}=\frac{l}{\Delta t}=\frac{۱۰m}{۶s}=\frac{۵}{۳}m/s$

در ۳ ثانیهٔ دوم $\Rightarrow \ \Delta x=\Delta x_۳=+۵m \Rightarrow v_{av}=\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{+۵m}{۳s}=+\frac{۵}{۳}\ m/s$

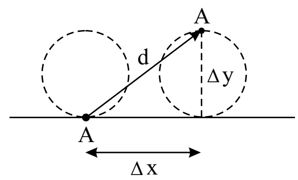
$\Rightarrow \dfrac{\text{تندی متوسط در ۶ ثانیهٔ اول}}{\text{بزرگی سرعت متوسط در ۳ ثانیهٔ دوم}}=\dfrac{S_{av}}{|v_{av}|}=۱$

۲۹ - گزینه ۴ در بازهٔ زمانی $۱۰s<t<۱۵s$ نمودار سرعت – زمان خط راست است و شیب ثابتی دارد. پس در تمام لحظه‌های این بازهٔ زمانی شتاب ثابت و برابر شیب این خط است که نقاط ابتدا و انتهای آن به ترتیب $(۱۰s\,,\,۳۰m/s)$ و $(۱۵s\,,\,۰\,m/s)$ هستند. بنابراین:

$$a(۱۳s)=\frac{۰\,m/s-۳۰\,m/s}{۱۵s-۱۰s}=\frac{-۳۰\,m/s}{۵s}=-۶\,m/s^۲$$

پس پاسخ گزینهٔ ۴ است.

۳۰ - گزینه ۲ با توجه به شکل ابتدا جابه‌جایی این نقطه را حساب می‌کنیم.



$$\left.\begin{aligned} &d=\sqrt{\Delta x^۲+\Delta y^۲} \\ &\Delta x=\frac{۱}{۲}(۲\pi r)=\pi r=۲۵\pi cm \\ &\Delta y=۲r=۵۰cm \end{aligned}\right\}$$

$$\Rightarrow d=\sqrt{(۲۵\pi)^۲+(۵۰)^۲}=\sqrt{(۲۵)^۲(\pi^۲+۴)}=۲۵\sqrt{۱۴}cm$$

با توجه به رابطه محاسبه سرعت متوسط داریم:

$$v_{av}=\frac{d}{\Delta t}=\frac{۲۵\sqrt{۱۴}}{۵}=۵\sqrt{۱۴}cm/s$$

۳۱ - گزینه ۴

مسافت = نصف محیط دایره

مسافت $=\dfrac{۲\times ۱۰\times ۳}{۲}=۳۰\ (m)$

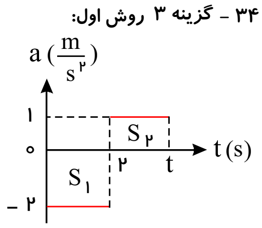
تندی متوسط $=\dfrac{\text{مسافت}}{\text{زمان}}$

تندی مسافت $=\dfrac{۳۰\ m}{۲۰\ s}=۱/۵$ متر بر ثانیه

۳۲ - گزینه ۳ اگر تندی در طول مسیر حرکت متحرک تغییر نکند، تندی متوسط و لحظه‌ای با هم برابرند، اما چون دربارهٔ جهت حرکت متحرک اطلاعاتی نداریم، مسیر حرکت می‌تواند خط راست یا دایره‌ای باشد و به همین دلیل نیز نمی‌توان دربارهٔ شتاب حرکت اظهارنظر قطعی کرد، زیرا حرکت در مسیرهای دایره‌ای حتی با تندی ثابت، حتماً شتاب‌دار است.

۳۳ - گزینه ۱ می دانیم شیبِ خط مماس بر نمودار سرعت زمان درهر لحظه برابر شتاب حرکت در همان لحظه می باشد و هنگامی که شیب خط مماس مثبت است، شتاب نیز مثبت (در جهت مثبت محور) می باشد که در بازه‌های (۰ تا $t_۱$) و ($t_۳$ تا $t_۴$) این چنین است.

۳۴ - گزینه ۳ روش اول:

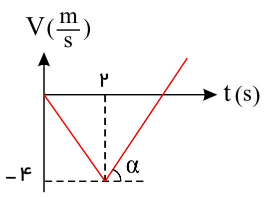


$$S_۱=\Delta V_۱=-۲\times ۲=-۴\frac{m}{s}$$

$$V_۲-V_۰=-۴\frac{m}{s}\Rightarrow V_۲=-۴\frac{m}{s}$$

$$\Delta V_۲=V_t-V_۲=S_۲\Rightarrow ۰-(-۴)=۱\times(t-۲)\Rightarrow t=۶s$$

در لحظه‌ای که سرعت متحرک برابر صفر می شود جهت آن تغییر می کند.



روش دوم: رسم نمودار $V-t$ از روی نمودار $a-t$: $a=+1=\tan\alpha=$ شیب نمودار درقسمت دوم
شیب نمودار در مرحله‌ی دوم همان شتاب متحرک است، بنابراین نمودار پس از ۴ ثانیه مجدداً از سرعت ۴− به صفر می‌رسد ⇐ لحظه‌ی تغییر جهت $t=6$ می باشد.

۳۵ - گزینه ۲

$$\bar{V}=\frac{\Delta x_1+\Delta x_2}{\Delta t_1+\Delta t_2}$$

$$\bar{V}=\frac{\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}x}{\frac{\frac{1}{2}x}{12}+\frac{\frac{1}{2}x}{8}}=\frac{x}{\frac{x}{24}+\frac{x}{16}}=\frac{x}{\frac{40x}{24\times16}}=\frac{24\times16}{40}=9/6$$

۳۶ - گزینه ۱

$$\bar{V}=\frac{x_1+x_2}{t_1+t_2}=\frac{\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}x}{\frac{\frac{1}{3}x}{20}+\frac{\frac{2}{3}x}{30}}=\frac{x}{\frac{1}{60}x+\frac{2}{90}x}=\frac{1}{\frac{1}{60}+\frac{2}{90}}=\frac{1}{\frac{3+4}{180}}\Rightarrow\bar{V}=\frac{180}{7}\frac{m}{s}$$

۳۷ - گزینه ۲ در بازه زمانی ذکر شده، سرعت مثبت است، پس جهت حرکت در جهت محور x است. یعنی در خلاف جهت محور x نیست.

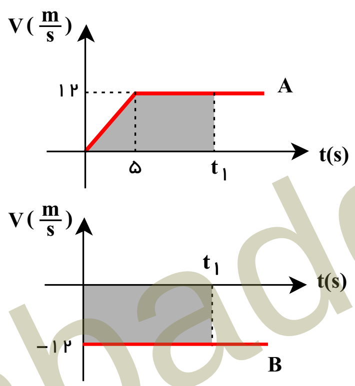
۳۸ - گزینه ۱ سطح زیر نمودار شتاب - زمان، برابر با تغییر سرعت است.

$$S=\Delta V=V_{25}-\cancel{V_0}^{\,0}\Rightarrow\Delta V=(2\times10)+(25-10)(-1)=20-15=5\frac{m}{s}$$

سرعت اولیه صفر است. پس سرعت در لحظه $t=25s$ برابر $5\frac{m}{s}$ است.

۳۹ - گزینه ۱

در لحظه‌ای که به هم می‌رسند، $x_A=x_B$.



$$x_A=\frac{t_1+(t_1-5)}{2}\times12=(2t_1-5)\times6=12t_1-30$$

$$x_B=-12t_1+450$$

$$x_A=x_B\Rightarrow12t_1-30=-12t_1+450\Rightarrow24t_1=480\Rightarrow t_1=20s$$

$$\Rightarrow x_B=x_A=12\times20-30=210m$$

۴۰ - گزینه ۲ مسافت طی شده توسط جسم در مدت ۹ ثانیه برابر است با:

$$l=3\times10=30m$$

با استفاده از رابطهٔ محاسبهٔ تندی متوسط داریم:

$$S_{av}=\frac{l}{\Delta t}=\frac{30}{9}=\frac{10}{3}m/s$$

۴۱ - گزینه ۳ مطابق نمودار داریم:

$$a_{t=10s}=\frac{16-0}{10-6}=4\,m/s^2$$

$$(a_{av})_{5s-12s}=\frac{v_{t=12s}-v_{t=5s}}{12-5}=\frac{v_{t=12s}-8}{7}$$

$$\xrightarrow{a_{t=10s}=(a_{av})_{5s-12s}=4m/s^2}4=\frac{v_{t=12s}-8}{7}\Rightarrow v_{t=12s}=36m/s$$

دو ثانیهٔ ششم یعنی بازهٔ زمانی بین لحظات $t_1=10s$ تا $t_2=12s$:

$$(a_{av})_{10s-12s}=\frac{36-16}{12-10}=10\,m/s^2$$

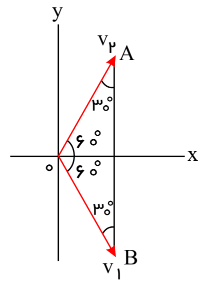
۴۲ - گزینه ۳ بردار تغییرات سرعت توپ را رسم می‌کنیم. مثلث ایجادشده متساوی‌الساقین است. در این صورت $AH=BH$ می‌باشد.

پس می‌توان نوشت:

$$O\overset{\Delta}{A}H : \sin 60^\circ = \frac{AH}{v} \Rightarrow AH = 4 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$$

$$AB = 2AH = 4\sqrt{3} \Rightarrow \Delta v = 4\sqrt{3}m/s$$

$$a_{av} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{4\sqrt{3}}{0/1} = 40\sqrt{3}m/s^2$$



۴۳ ـ گزینه ۲

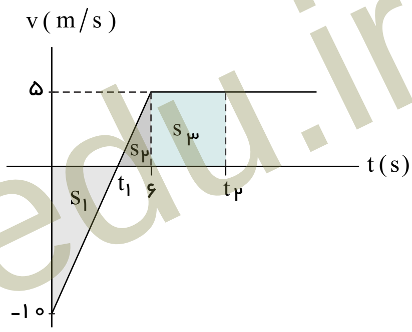
$$v_{av} = \frac{\Delta d}{\Delta t} \Rightarrow 4 = \frac{R\sqrt{2}}{\frac{3T}{4}} \Rightarrow R = \frac{3T}{\sqrt{2}}$$

$$s_{av} = \frac{d}{t} = \frac{\frac{3}{4}(2\pi R)}{\frac{3T}{4}} = \frac{2\pi R}{T} = \frac{2\pi}{T} \times \frac{3T}{\sqrt{2}} = 3\pi\sqrt{2} = 9\sqrt{2}m/s$$

۴۴ ـ گزینه ۱

$$\frac{t_1}{10} = \frac{6 - t_1}{5} \Rightarrow t_1 = 12 - 2t_1 \Rightarrow t_1 = 4$$

$$\left.\begin{array}{l} S_1 = \dfrac{-10 \times 4}{2} = -20 \\ S_2 = \dfrac{2 \times 5}{2} = 5 \end{array}\right. \Rightarrow S_1 + S_2 = -15$$



$$\Delta x = 0 \Rightarrow S_3 + S_1 + S_2 = 0 \Rightarrow S_3 = 15 \Rightarrow 15 = (t_2 - 6) \times 5$$

$$t_2 - 6 = 3 \Rightarrow t_2 = 9s$$

۴۵ ـ گزینه ۴

برای نیمهٔ اول مسیر: $\Delta x = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t \Rightarrow 60 = \frac{1}{2}a \times (1)^2 + v_0 \times 1$

$$60 = \frac{1}{2}a + v_0$$

برای ۴ ثانیهٔ اول: $120 = \frac{1}{2}a \times 16 + v_0 \times 4 \Rightarrow 120 = 8a + 4v_0$

$$30 = 2a + v_0$$

$$\begin{cases} v_0 + \frac{1}{2}a = 60 \\ v_0 + 2a = 30 \end{cases} \Rightarrow -\frac{3}{2}a = 30 \Rightarrow a = -20m/s^2$$