پاسخنامه تشریحی

۱ - گزینه ۳ ابتدا با تعیین علامت، قدرمطلق را بر می‌داریم:

$$y=\begin{cases} x^{۲}-۲x & x\geq ۲ \\ -x^{۲}+۲x & x<۲ \end{cases}$$

برای تشخیص نزولی بودن از تابع مشتق گرفته کوچک‌تر از صفر قرار می‌دهیم.

$$x\geq ۲ : y=x^{۲}-۲x \to y'=۲x-۲<۰ \to ۲x<۲ \to x<۱ \xrightarrow{\text{اشتراک با شرط}} \varnothing$$

$$x<۲ : y=-x^{۲}+۲x \to y'=-۲x+۲<۰ \to -۲x<-۲ \to x>۱ \xrightarrow{\text{اشتراک با شرط}} ۱<x<۲$$

پس تابع در $(۱,۲)$ نزولی است حال ضابطه‌ی معکوس را پیدا می‌کنیم.

$$y=-x^{۲}+۲x \to y=-(x^{۲}-۲x) \to y=-((x-۱)^{۲}-۱) \to y=-(x-۱)^{۲}+۱$$

$$\to (x-۱)^{۲}=۱-y \to x-۱=\pm\sqrt{۱-y} \xrightarrow[\text{سمت چپ مثبت است}]{۱<x<۲} x-۱=\sqrt{۱-y} \to x=۱+\sqrt{۱-y}$$

$$\to f^{-۱}(x)=۱+\sqrt{۱-x}$$

روش دوم:

متوجه شدیم که تابع، $y=-x^{۲}+۲x$ $(۱<x<۲)$ است یک عدد دلخواه مثلاً $x=\frac{۳}{۲}$ در تابع قرار می‌دهیم.

$x=\frac{۳}{۲} \to y=\frac{۳}{۴} \to \left|\begin{matrix}\frac{۳}{۲}\\ \frac{۳}{۴}\end{matrix}\right. \in f \to \left|\begin{matrix}\frac{۳}{۴}\\ \frac{۳}{۲}\end{matrix}\right. \in f^{-۱} \to$ **فقط در گزینه‌ی سوم صدق می‌کند.**

۲ - گزینه ۲ ابتدا دامنه‌ی تعریف دو تابع g, f را بدست می‌آوریم.

$$f(x)=\frac{۱+x^{۲}}{۱-x^{۲}} \to D_f=R-\{-۱,۱\}$$

$$g(x)=\sqrt{x-x^{۲}} \to D_g : x-x^{۲}\geq ۰ \to x(۱-x)\geq ۰ \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} ۰\leq x\leq ۱$$

$$D_{gof}=\{x\in D_f\ ,\ f(x)\in D_g\}=\{\underbrace{x\neq ۱, x\neq -۱}_{I}\ \ ,\ \ ۰\leq\frac{۱+x^{۲}}{۱-x^{۲}}\leq ۱\}$$

$$\frac{\overbrace{۱+x^{۲}}^{+}}{۱-x^{۲}}\geq ۰ \to ۱-x^{۲}>۰ \to x^{۲}<۱ \to -۱<x<۱ \qquad (II)$$

$$\frac{۱+x^{۲}}{۱-x^{۲}}\leq ۱ \to \frac{۱+x^{۲}}{۱-x^{۲}}-۱\leq ۰ \to \frac{۱+x^{۲}-۱+x^{۲}}{۱-x^{۲}}\leq ۰ \to \frac{۲x^{۲}}{۱-x^{۲}}\leq ۰$$

$\to$

x	$-\infty$		-۱		۰		۱		$+\infty$
عبارت ≤ ۰		$-$	ت ن	$+$	۰	$+$	ت ن	$-$	

$$\to x<-۱ \quad \text{یا} \quad x>۱ \quad \text{یا} \quad x=۰ \qquad (III)$$

از اشتراک I و II و III به جواب $x=۰$ می‌رسیم.

۳ - گزینه ۲ تابع خطی به‌صورت $f(x)=ax+b$ نشان داده می‌شود.

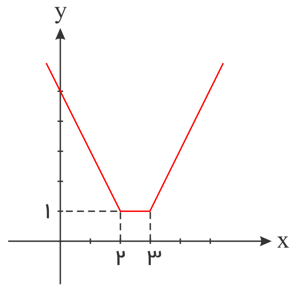
$$f(۳x-۱)+۳f(۱-x)=۴ \to a(۳x-۱)+b+۳\,(a(۱-x)+b)=۴$$

$$\to ۳ax-a+b+۳a-۳ax+۳b=۴ \to ۲a+۴b=۴ \to a+۲b=۲$$

$$f(۵)=۲ \to ۵a+b=۲ \Rightarrow \begin{cases} a+۲b=۲ \\ ۵a+b=۲ \end{cases} \to a=\frac{۲}{۹}, b=\frac{۸}{۹} \to f(x)=\frac{۲}{۹}x+\frac{۸}{۹}$$

$$\to f(۱۴)=\frac{۲۸}{۹}+\frac{۸}{۹}=\frac{۳۶}{۹}=۴$$

۴ - گزینه ۱ تابع داده شده یک تابع گلدانی است که در $x<۲$ اکیداً نزولی است.



$$y=|x-۲|+|x-۳| \xrightarrow{x<۲} y=-x+۲-x+۳ \to y=-۲x+۵$$

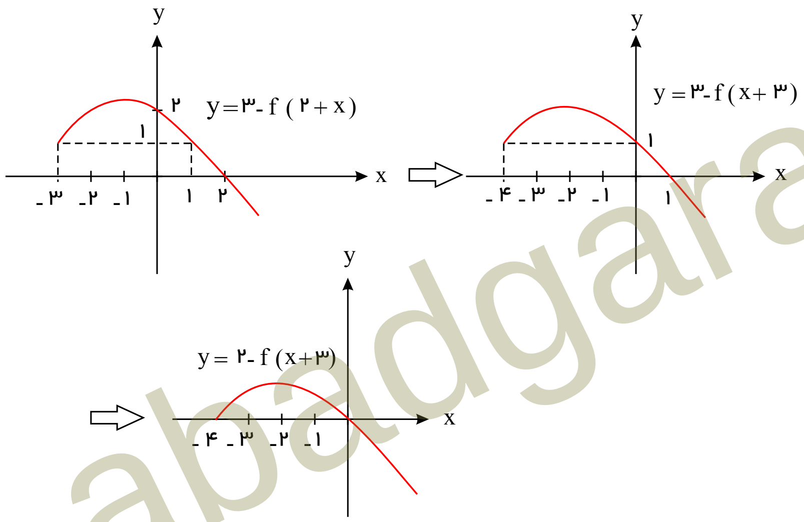
$$\begin{cases} f(x)=-۲x+۵ \\ g(x)=۲x^۲-x-۱۰ \end{cases} \xrightarrow{\text{تلاقی}} ۲x^۲-x-۱۰=-۲x+۵ \to ۲x^۲+x-۱۵=۰$$

$$\xrightarrow{\Delta=b^۲-۴ac=۱+۱۲۰=۱۲۱} \begin{cases} x=\dfrac{-۱+۱۱}{۴}=\dfrac{۵}{۲}(x<۲ \text{ غ ق ق (با توجه به}) \\ x=\dfrac{-۱-۱۱}{۴}=-۳ \quad \text{ق ق} \end{cases} \to \text{در یک نقطه مشترک هستند}$$

۵ – گزینه ۲

$$y=۳-f(۲-x) \xrightarrow[\text{قرینه نسبت به } y\text{ها}]{x\to -x} y=۳-f(۲+x) \xrightarrow[\text{۱ واحد انتقال به چپ}]{x\to x+۱} y=۳-f(۲+x+۱)$$

$$\Rightarrow y=۳-f(x+۳) \xrightarrow{\text{یک واحد انتقال به پایین}} y=۲-f(x+۳)$$



۶ – گزینه ۴ تابع خطی به‌صورت $f(x)=ax+b$ نشان داده می‌شود.

$$f(x)+f(\frac{۱}{x})=\frac{x^۲-۱۲x+۱}{۲x} \to ax+b+\frac{a}{x}+b=\frac{ax^۲+bx+a+bx}{x}$$

$$=\frac{ax^۲+۲bx+a}{x}=\frac{۲ax^۲+۴bx+۲a}{۲x}=\frac{x^۲-۱۲x+۱}{۲x} \xrightarrow{\text{مقایسه}} a=\frac{۱}{۲},\ ۴b=-۱۲\ ,\ b=-۳$$

بنابراین $f(x)=\frac{۱}{۲}x-۳ \to f(-۴)=-۲-۳=-۵$

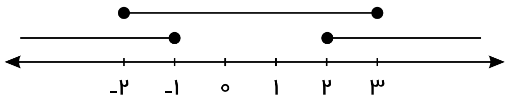
۷ – گزینه ۴ ابتدا xها را از کوچک به بزرگ مرتب می‌کنیم.

$$f:\{(-۴,۲),(۳,m^۲-m),(۴,m^۲-m),(۵,۶)\}$$

می‌دانیم در تابع صعودی اگر $x_۱<x_۲$ باشد آن‌گاه $f(x_۱)\le f(x_۲)$ است پس:

$$۲\le m^۲-m\le ۶ \to \begin{cases} m^۲-m\ge ۲ \to m^۲-m-۲\ge ۰ \to (m-۲)(m+۱)\ge ۰ \\ \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} m\le -۱ \text{ یا } m\ge ۲ \quad (I) \\ m^۲-m\le ۶ \to m^۲-m-۶\le ۰ \to (m-۳)(m+۲)\le ۰ \\ \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} -۲\le m\le ۳ \quad (II) \end{cases}$$

از اشتراک جواب‌های (I) و (II) داریم:



$\rightarrow m \in [-۲,۳] - (-۱,۲)$

۸ - گزینه ۳

دو نقطه‌ی داده شده را در تابع $f(x)=ab^x-۱$ صدق می‌دهیم.

$$A\left|\begin{matrix}-\frac{۱}{۲}\\ \frac{۱}{۲}\end{matrix}\right. \xrightarrow{\text{صدق}} \frac{۱}{۲}=ab^{-\frac{۱}{۲}}-۱ \Rightarrow \frac{۳}{۲}=\frac{a}{\sqrt{b}} \Rightarrow \frac{۹}{۴}=\frac{a^۲}{b} \rightarrow a^۲=\frac{۹}{۴}b \rightarrow a=\frac{۳}{۲}\sqrt{b}$$

$$B\left|\begin{matrix}۱\\ ۱۱\end{matrix}\right. \xrightarrow{\text{صدق}} ۱۱=ab-۱ \Rightarrow ab=۱۲ \Rightarrow \frac{۳}{۲}\sqrt{b}b=۱۲$$

$$\Rightarrow b\sqrt{b}=۸ \xrightarrow{\text{توان ۲}} b^۳=۶۴ \Rightarrow b=۴ \Rightarrow a=۳$$

پس: $f(x)=۳\times ۴^x-۱ \Rightarrow f(-۱)=۳\times ۴^{-۱}-۱=\frac{۳}{۴}-۱=-\frac{۱}{۴}$

۹ - گزینه ۲ تابع $f(x)=|۲x-۱|-|۲x+۶|$ را به صورت چند ضابطه‌ای می‌نویسیم:

$$f(x)=\begin{cases}-۲x+۱+۲x+۶ & x<-۳\\ -۲x+۱-۲x-۶ & -۳\le x\le \frac{۱}{۲}\\ ۲x-۱-۲x-۶ & x>\frac{۱}{۲}\end{cases}=\begin{cases}۷ & x<-۳\\ -۴x-۵ & -۳\le x\le\frac{۱}{۲}\\ -۷ & x>\frac{۱}{۲}\end{cases}$$

تابع با ضابطه‌ی $f(x)=-۴x-۵$ در بازه $\left[-۳,\frac{۱}{۲}\right]$ معکوس‌پذیر است.

$$y=-۴x-۵ \rightarrow ۴x=-y-۵ \rightarrow x=-\frac{y}{۴}-\frac{۵}{۴} \rightarrow f^{-۱}(x)=-\frac{۱}{۴}(x+۵)$$

دقت کنید که دامنه‌ی $f^{-۱}$ برابر برد تابع f است. پس کافی است برد تابع $y=-۴x-۵$ را در بازه‌ی $\left[-۳,\frac{۱}{۲}\right]$ بدست آوریم.

$$-۳\le x\le\frac{۱}{۲} \xrightarrow{\times(-۴)} ۱۲\ge -۴x\ge -۲ \xrightarrow{\text{با }(-۵)\text{ جمع می‌کنیم}} ۷\ge -۴x-۵\ge -۷$$

$$\rightarrow -۷\le y\le ۷ \rightarrow |y|\le ۷ \rightarrow D_{f^{-۱}}=|x|\le ۷$$

۱۰ - گزینه ۱ اگر نمودار تابع $y=f(۲x-۱)$ را یک واحد به چپ منتقل کنیم، نمودار تابع $y=f(۲(x+۱)-۱)=f(۲x+۱)$ به دست می‌آید. اگر این نمودار را نسبت به محور عرض‌ها قرینه کنیم، نمودار تابع $y=f(-۲x+۱)$ به دست می‌آید و اگر طول نقاط این نمودار را دو برابر کنیم یعنی به جای x جملهٔ $\frac{۱}{۲}x$ قرار می‌دهیم. نمودار تابع $y=f(-x+۱)$ به دست می‌آید.

۱۱ - گزینه ۲ چون نمودار تابع و معکوسش فقط یک‌جا همدیگر را قطع می‌کنند آن‌جا حتماً روی نیمساز ناحیه‌ی اول و سوم است پس کافی است معادله‌ی $f(x)=x$ را حل کنیم.

$$f(x)=x \rightarrow |x-۲|+۳x=x \rightarrow |x-۲|=-۲x \xrightarrow{\text{چون جواب قدر مطلق نا منفی است پس } x<۰ \text{ است}} -x+۲=-۲x$$

$$\Rightarrow x=-۲ \xrightarrow{\text{تابع}} y=-۲ \rightarrow A\left|\begin{matrix}-۲\\ -۲\end{matrix}\right.$$

حال فاصله‌ی نقطه‌ی $A\left|\begin{matrix}-۲\\ -۲\end{matrix}\right.$ را از مبدأ مختصات حساب می‌کنیم: $AO=\sqrt{۴+۴}=\sqrt{۸}=۲\sqrt{۲}$

۱۲ - گزینه ۳

$$f(x)=\sqrt{x} \xrightarrow{\text{قرینه نسبت به محور }y\text{ها}} g(x)=\sqrt{-x} \xrightarrow[\text{مثبت}]{\text{دو واحد به طرف }x\text{های}} h(x)=\sqrt{-(x-۲)}=\sqrt{-x+۲}$$

$$\begin{cases}h(x)=\sqrt{-x+۲}\\ y=x\end{cases} \xrightarrow{\text{تلاقی}} \sqrt{-x+۲}=x \xrightarrow{\text{توان ۲}} -x+۲=x^۲ \rightarrow x^۲+x-۲=۰$$

$$\rightarrow (x+۲)(x-۱)=۰ \rightarrow \begin{cases}x=-۲ & \text{غ‌ق (در معادله صدق نمی‌کند)}\\ x=۱ & \text{ق‌ق}\end{cases}$$

۱۳ - گزینه ۳ می دانیم: $\boxed{a^۳+b^۳=(a+b)^۳-۳ab(a+b)}$

$$f(x+\frac{۱}{x})=x^۳+\frac{۱}{x^۳} \rightarrow f(x+\frac{۱}{x})=(x+\frac{۱}{x})^۳-۳x(\frac{۱}{x})(x+\frac{۱}{x})$$

$$\rightarrow f(x+\frac{۱}{x})=(x+\frac{۱}{x})^۳-۳(x+\frac{۱}{x})$$

$$\xrightarrow{x+\frac{۱}{x}=t} f(t)=t^۳-۳t \rightarrow f(\sqrt{۵})=(\sqrt{۵})^۳-۳\sqrt{۵}=۵\sqrt{۵}-۳\sqrt{۵}=۲\sqrt{۵}$$

بی نام

۱۴ - گزینه ۱ از تساوی f و g نتیجه می‌گیریم که $b = -۲$. برای انتخاب a باید حواسمان به دامنهٔ دو تابع باشد. دامنهٔ تابع f را در دو حالت زیر به‌دست می‌آوریم:

۱) $a \geq -۲$

x	$-\infty$		$b=-۲$		a		$+\infty$
$(x-a)^۲(x-b)$		$-$	۰	$+$	۰	$+$	

$\rightarrow D_f = [-۲, +\infty)$

۲) $a < -۲$

x	$-\infty$		a		$b=-۲$		$+\infty$
$(x-a)^۲(x-b)$		$-$	۰	$-$	۰	$+$	

$\rightarrow D_f = \{a\} \cup [-۲, +\infty)$

از طرفی چون $D_g = [-۲, +\infty)$ است، پس برای آن‌که $D_f = D_g$ باشد، باید $a \in [-۲, +\infty)$ باشد، پس:

$$a \geq -۲ \xrightarrow{+b} a + b \geq \underbrace{-۲ + b}_{-۴} \Rightarrow a + b \geq -۴$$

۱۵ - گزینه ۳

به ترتیب اعمال مورد نظر را انجام می‌دهیم:

$$f(x) = x^۲ \xrightarrow{\text{انتقال ۴واحد به طرف } x\text{های منفی}} f_۱(x) = (x+۴)^۲ \xrightarrow{\text{قرینه نسبت به محور } x\text{ها}} f_۲(x) = -(x+۴)^۲$$

$$\xrightarrow{\text{دو برابر کردن برد}} f_۳(x) = -۲(x+۴)^۲ \xrightarrow{\text{انتقال ۳واحد به طرف } y\text{های منفی}} f_۴(x) = -۲(x+۴)^۲ - ۳$$

$$f_۴(x) = -۲(x^۲ + ۸x + ۱۶) - ۳ \rightarrow y = -۲x^۲ - ۱۶x - ۳۵$$

۱۶ - گزینه ۲ ابتدا وارون تابع داده شده را پیدا کرده و آن را با تابع اصلی تلاقی می‌دهیم و می‌دانیم برای پیدا کردن تابع وارون کافی است که x را برحسب y به‌دست آورده و سپس جای x و y را عوض می‌کنیم.

$$y = \frac{x+۴}{x-۲} \rightarrow xy - ۲y = x + ۴ \rightarrow xy - x = ۲y + ۴ \rightarrow x(y-۱) = ۲y + ۴ \rightarrow x = \frac{۲y+۴}{y-۱}$$

$$\rightarrow f^{-۱}(x) = \frac{۲x+۴}{x-۱}$$

تلاقی: $f(x) = f^{-۱}(x) \rightarrow \dfrac{x+۴}{x-۲} = \dfrac{۲x+۴}{x-۱} \rightarrow ۲x^۲ - ۴x + ۴x - ۸ = x^۲ - x + ۴x - ۴$

$$\rightarrow x^۲ - ۳x - ۴ = ۰ \xrightarrow{a+c=b} \begin{cases} x = -۱ \\ x = -\dfrac{c}{a} = ۴ \end{cases}$$

۱۷ - گزینه ۱ اگر تابع f اکیداً نزولی و $f(a) \geq f(b)$، آنگاه $a \leq b$ است.

$$g(x) = \sqrt{f(|x+۳|) - f(|x-۲|)} \Rightarrow f(|x+۳|) - f(|x-۲|) \geq ۰$$

$$\Rightarrow f(|x+۳|) \geq f(|x-۲|) \Rightarrow |x+۳| \leq |x-۲|$$

برای حل این نوع نامعادلات، طرفین را به توان ۲ می‌رسانیم.

$$(x+۳)^۲ \leq (x-۲)^۲ \Rightarrow x^۲ + ۶x + ۹ \leq x^۲ - ۴x + ۴$$

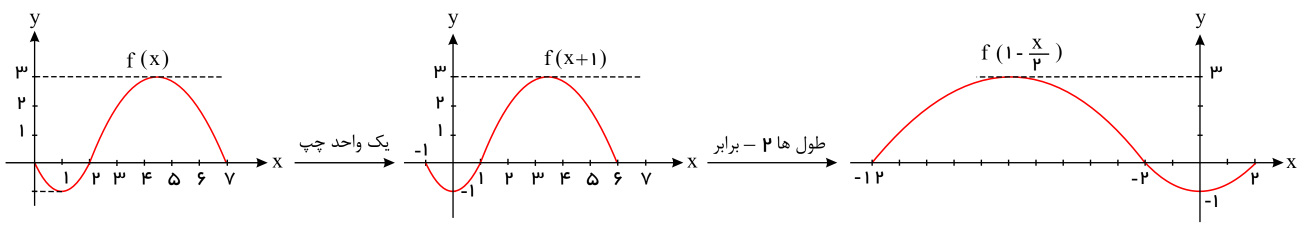
$$\Rightarrow ۱۰x \leq -۵ \Rightarrow x \leq -\frac{۱}{۲} \Rightarrow D_g = (-\infty, -\frac{۱}{۲}]$$

۱۸ - گزینه ۲

$$g^{-۱}(۶) = a \Rightarrow g(a) = ۶$$

$$g(a) = f(a) + \sqrt{f(a)} \Rightarrow ۶ = f(a) + \sqrt{f(a)} \Rightarrow f(a) = ۴ \Rightarrow f^{-۱}(۴) = a \Rightarrow \sqrt[۳]{۸} = a \rightarrow a = ۲$$

۱۹ - گزینه ۱ نمودار $f(x+۲)$ را دو واحد به راست منتقل می‌کنیم تا نمودار $f(x)$ حاصل شود.



برای تعیین دامنهٔ $\sqrt{xf(۱-\frac{x}{۲})}$ باید نامعادلهٔ زیر را حل کنیم.

$$xf(۱-\frac{x}{۲}) \geq ۰$$

x	-12		-2		0		2
x		$-$		$-$	0	$+$	
$f(1-\frac{x}{2})$	0	$+$	0	$-$		$-$	0
$xf(1-\frac{x}{2})$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0

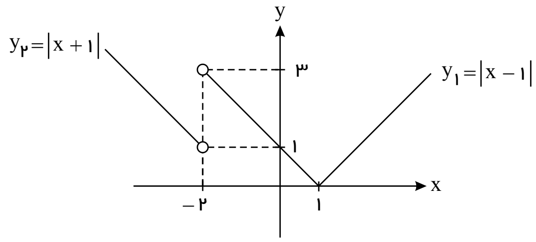
$$\longrightarrow D_f=[-2,0]\cup\{-12,2\}$$

۲۰ - گزینه ۳ ابتدا در مرحله‌ی اول، نمودار f را در راستای محور yها، با ضریب $\frac{1}{2}$ منقبض کرده و در مرحله دوم، آن را نسبت به محور xها قرینه می‌کنیم. در مرحله‌ی سوم، نمودار را سه واحد به چپ منتقل می‌کنیم:

$$y=f(x)\xrightarrow{(1)}y=\frac{f(x)}{2}\xrightarrow{(2)}y=\frac{-f(x)}{2}\xrightarrow{(3)}y=\frac{-f(x+3)}{2}$$

۲۱ - گزینه ۲ با شرط‌های $x>-2$, $x<-2$ قدر مطلق داخل را از بین می‌بریم:

$$f(x)=|\frac{x+2}{|x+2|}-x|=\begin{cases}|1-x|\ ;\ x>-2\\ |1+x|\ ;\ x<-2\end{cases}$$



با رسم نمودار این تابع دو ضابطه‌ای معلوم می‌شود:

این تابع خط $y=1$ را در دو نقطه قطع کرده است.

این تابع در بازهٔ $(-2\ ,\ -1)$ اکیداً نزولی است.

این تابع در بازهٔ $(-\infty\ ,\ -2)$، یک به یک و لذا وارون‌پذیر است.

این تابع در بازهٔ $(-4\ ,\ -1)$ اکیداً یکنوا نیست.

۲۲ - گزینه ۳

$fog(x)$ را تشکیل داده و بدون ساده کردنش دامنه را پیدا می‌کنیم.

$$fog(x)=\frac{\sqrt{1-\tan^2 x}}{\tan x}$$

$$\begin{cases}1-\tan^2 x\geq 0\Rightarrow \tan^2 x\leq 1\Rightarrow -1\leq \tan x\leq 1\Rightarrow -\frac{\pi}{4}\leq x\leq \frac{\pi}{4} & \text{(از روی دایره‌ی مثلثاتی)}\\ \tan x\neq 0\Rightarrow \frac{\sin x}{\cos x}\neq 0\Rightarrow \sin x\neq 0\Rightarrow x\neq k\pi\Rightarrow x\neq 0,\ \pi,2\pi,\cdots\end{cases}$$

$$D_{fog}=[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}]-\{0\}=[\frac{-\pi}{4},0)\cup(0,\frac{\pi}{4}]$$

۲۳ - گزینه ۲ دو حالت وجود دارد.

الف) مخرج عبارتی درجه اول باشد یعنی $m=1$ که داریم:

$$f(x)=\frac{1-x}{3x+1}\Rightarrow 3x+1=0\Rightarrow x=-\frac{1}{3}\Rightarrow D_f=\mathbb{R}-\left\{-\frac{1}{3}\right\}$$

ب) مخرج ریشه مضاعف داشته باشد یعنی:

$$(m-1)x^2+3x+1=0\Rightarrow \Delta=0\Rightarrow 9-4(m-1)=0\Rightarrow 9-4m+4=0\Rightarrow m=\frac{13}{4}$$

بنابراین برای m دو مقدار ۱ و $\frac{13}{4}$ وجود دارد.

۲۴ - گزینه ۴ دو تابع f و g را برابر می‌نامیم، هرگاه:

الف) دامنهٔ f و دامنهٔ g با هم برابر باشد.

ب) برای هر x از این دامنهٔ یکسان داشته باشیم: $f(x)=g(x)$

تابع $f(x)=\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1}$ دارای دامنهٔ $[0,+\infty]$ و ضابطهٔ $f(x)=1$ است.

حال به بررسی تک‌تک گزینه‌ها می‌پردازیم:

گزینهٔ ۱: این تابع دارای دامنهٔ $[0,+\infty]$ و ضابطهٔ $g(x)=1$ است.

گزینهٔ ۲: این تابع دارای دامنهٔ $[0,+\infty]$ و ضابطهٔ $h(x)=1$ است. $(|x|\overset{x>0}{=\!=\!=}x)$

گزینهٔ ۳: این تابع دارای دامنهٔ $[0,+\infty]$ و ضابطهٔ $s(x)=1$ است.

گزینهٔ ۴: این تابع دارای دامنهٔ $[0,+\infty)-\{4\}$ و ضابطهٔ $t(x)=1$ است.

دامنهٔ تابع گزینهٔ ۴ با دامنهٔ $f(x)$ متفاوت است بنابراین $f(x)$ با $t(x)$ برابر نیست.

۲۵ - گزینه ۱

روش اول:

$$x-3=t\to x=t+3$$

$$f(x-3)=x^2-4x+5\to f(t)=(t+3)^2-4(t+3)+5\to f(1+x)$$

$= (۱ - x + ۳)^۲ - ۴(۱ - x + ۳) + ۵ \to f(۱ - x) = (۴ - x)^۲ - ۴(۴ - x) + ۵ \to f(۱ - x)$

$= ۱۶ + x^۲ - ۸x - ۱۶ + ۴x + ۵ \to f(۱ - x) = x^۲ - ۴x + ۵$

روش دوم:

باید $x - ۳$ را تبدیل به $۱ - x$ کنیم با کمی دقت متوجه می‌شویم در $x - ۳$ اگر x را به $۴ - x$ تبدیل کنیم این اتفاق می‌افتد.

$x \to -x + ۴ \Rightarrow f(۱ - x) = (-x + ۴)^۲ - ۴(-x + ۴) + ۵$

$= x^۲ + ۱۶ - ۸x + ۴x - ۱۶ + ۵ = x^۲ - ۴x + ۵$

۲۶ - گزینه ۲ برای این‌که دو تابع باهم مساوی باشند اولاً باید دامنه‌ی آن‌ها برابر باشد ثانیاً ضابطه‌ی آن‌ها باید برابر باشد.

$$۱ - \begin{cases} f(x) = |x|\sqrt{x^۲ - ۱} \\ g(x) = \sqrt{x^۴ - x^۲} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} D_f : x^۲ - ۱ \geq ۰ \Rightarrow x^۲ \geq ۱ \Rightarrow x \geq ۱, x \leq -۱ \\ D_g : x^۴ - x^۲ \geq ۰ \Rightarrow x^۲(x^۲ - ۱) \geq ۰ \Rightarrow D_g : (-\infty, -۱] \cup x = ۰ \cup [۱, +\infty) \end{cases}$$

$D_f \neq D_g \Rightarrow$ باهم برابر نیستند.

$$۲ - \begin{cases} f(x) = \sqrt{\frac{x}{x-۱}} \\ g(x) = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x-۱}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} D_f : \dfrac{x}{x - ۱} \geq ۰ \Rightarrow D_f : (-\infty, ۰] \cup (۱, +\infty) \\ D_g : \begin{cases} x \geq ۰ \\ x - ۱ > ۰ \end{cases} \xrightarrow{\text{اشتراک}} x > ۱ \end{cases}$$

$\Rightarrow D_f \neq D_g \Rightarrow$ توابع باهم مساوی نیستند.

$$۳ - \begin{cases} f(x) = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{۲-x}} \\ g(x) = \sqrt{\frac{x}{۲-x}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} D_f : \begin{cases} x \geq ۰ \\ ۲ - x > ۰ \end{cases} \xrightarrow{\text{اشتراک}} ۰ \leq x < ۲ \\ D_g : \dfrac{x}{۲ - x} \geq ۰ \Rightarrow D_g : [۰, ۲) \end{cases} \Rightarrow D_f = D_g$$

$f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{۲ - x}} = \sqrt{\dfrac{x}{۲ - x}} = g(x) \to$ باتوجه به یکی بودن دامنه‌ها، دو تابع برابر هستند

$$۴ - \begin{cases} f(x) = \frac{x}{|x|} \\ g(x) = \frac{|x|}{x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} D_f = \mathbb{R} - \{۰\} \\ D_g = \mathbb{R} - \{۰\} \end{cases} \Rightarrow D_f = D_g$$

$x > ۰ \to f(x) = \dfrac{x}{x}\ ,\ g(x) = \dfrac{x}{x}$

$\to$ باتوجه به یکی بودن دامنه‌ها، دو تابع برابر هستند

$x < ۰ \to f(x) = \dfrac{x}{-x}\ ,\ g(x) = \dfrac{x}{-x}$

پس دو جفت از این توابع مساوی هستند.

۲۷ - گزینه ۱ چون fog از درجهٔ اول است، پس f و g توابعی از درجهٔ اول هستند. اگر فرض کنیم $f(x) = ax + b$ خواهیم داشت:

$f(x) + g(x) = ۴ \Rightarrow g(x) = ۴ - ax - b$

$f(g(x)) = ۷ - ۴x \Rightarrow ag(x) + b = ۷ - ۴x \Rightarrow a(۴ - ax - b) + b = ۷ - ۴x$

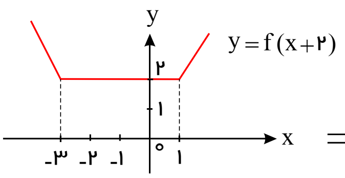
$$\Rightarrow -a^۲x + ۴a - ab + b = ۷ - ۴x \Rightarrow \begin{cases} -a^۲ = -۴ \Rightarrow a \pm ۲ \\ ۴a - ab + b = ۷ \end{cases}$$

$$\Rightarrow \left.\begin{cases} a = ۲ \Rightarrow b = ۱ \Rightarrow g(x) = -۲x + ۳ \Rightarrow g(۲) = -۱ \\ a = -۲ \Rightarrow b = ۵ \Rightarrow g(x) = ۲x - ۱ \Rightarrow g(۲) = ۳ \end{cases}\right\} \xrightarrow{\text{جمع}} ۲$$

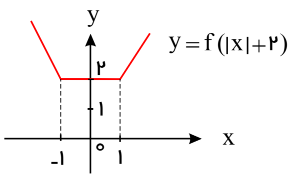
۲۸ - گزینه ۳

$$y = f(x) \xrightarrow[\text{۲ واحد به چپ}]{x \to x+۲} y = f(x + ۲) \xrightarrow{x \to |x|} y = f(|x| + ۲)$$

در نمودار $y = f(x + ۲)$ سمت چپ محور y ها را حذف کرده و قرینهٔ سمت راست محور y ها را نسبت به محور y ها یافته و به شکل اضافه می‌کنیم تا نمودار $y = f(|x| + ۲)$ حاصل شود.



$\Longrightarrow$



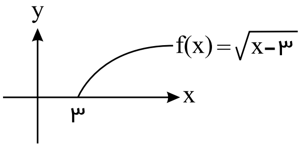
بزرگ‌ترین بازه‌ای که تابع $y = f(|x| + ۲)$ در آن بازه صعودی است بازهٔ $[-۱, +\infty)$ است.

۲۹ ـ گزینه ۴

$$g(x)=f(2x-1)\xrightarrow[x\to\frac{1}{2}x]{\text{طول‌ها دو برابر}} g_1(x)=f(x-1)\xrightarrow[x\to x+3]{\text{سه واحد چپ}} g_2(x)=f(x+2)\xrightarrow[x\to\frac{1}{3}x]{\text{طول‌ها } \frac{1}{3} \text{ برابر}} h(x)=f(\frac{1}{3}x+2)$$

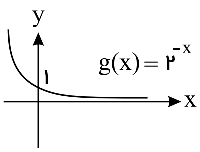
پس: $-1\le x\le 3\xrightarrow{\text{طول‌ها دو برابر}} -2\le x\le 6\xrightarrow{\text{سه واحد چپ}} -5\le x\le 3\xrightarrow{\text{طول‌ها } \frac{1}{3} \text{ برابر}} -\frac{5}{3}\le x\le 1$

۳۰ ـ گزینه ۳



$\Rightarrow$ f اکیداً صعودی

$g(x)=2^{-x}=(\frac{1}{2})^x \Rightarrow$



$\Rightarrow$ g اکیداً نزولی

چون f اکیداً صعودی است، پس $-f$ اکیداً نزولی است و می‌دانیم مجموع دو تابع اکیداً نزولی تابعی اکیداً نزولی است. پس تابع $g+(-f)=g-f$ اکیداً نزولی است.