

پاسخنامه تشریحی

۱ - گزینه ۱ نکته: در سهمی به معادله $y = ax^2 + bx + c$ نقطه‌ای به طول $x = \frac{-b}{2a}$ رأس سهمی است. خطی که از این رأس سهمی به موازات محور عرض‌ها رسم شود، محور تقارن سهمی است.

طبق فرض $x = -1$ طول رأس سهمی $y = -2x^2 + bx + c$ است، پس با استفاده از نکته بالا داریم:

$$-\frac{b}{2a} = -1 \Rightarrow -\frac{b}{2 \times (-2)} = -1 \Rightarrow \frac{b}{4} = -1 \Rightarrow b = -4$$

۲ - گزینه ۳

$$f(0) = 3 \Rightarrow \boxed{c = 3}$$

$$f(2) = 1 \xrightarrow{c=3} 4a + 2b + c = 1 \rightarrow 4a + 2b = -2$$

$$f(1) = 4 \Rightarrow a + b + 3 = 4 \rightarrow a + b = 1$$

$$\begin{cases} 4a + 2b = -2 \\ a + b = 1 \end{cases} \xrightarrow{\times(-2)} \begin{cases} 4a + 2b = -2 \\ 2a + 2b = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a = -4 \rightarrow \boxed{a = -2} \\ -2 + b = 1 \rightarrow \boxed{b = 3} \end{cases}$$

$$\text{حاصل: } a + b + c \xrightarrow{a=-2 \text{ و } b=3 \text{ و } c=3} -2 + 3 + 3 = 4$$

۳ - گزینه ۳ طول رأس سهمی $y = ax^2 + bx + c$ برابر $x_S = -\frac{b}{2a}$ است. ابتدا رأس سهمی $y = -x^2 + 4x + 5$ را به دست می‌آوریم:

$$x_S = -\frac{4}{-2} = 2$$

$$x_S = 2 \Rightarrow y_S = -2^2 + 4(2) + 5 = -4 + 8 + 5 \Rightarrow y_S = 9$$

پس مختصات رأس سهمی $(2, 9)$ می‌باشد، لذا داریم:

$$a + b = 2 + 9 = 11$$

۴ - گزینه ۳

هزینه - درآمد = سود

$$P(x) = R(x) - C(x) = \left(\frac{-1}{6}x^2 + 25x\right) - (15x + 30) = \frac{-1}{6}x^2 + 10x - 30$$

$$x_{Max} = \frac{-b}{2a} = \frac{-10}{\frac{-1}{3}} = 30$$

چون بیشترین سود از ما خواسته شده است، این مقدار را در تابع سود جایگذاری می‌کنیم.

$$P(30) = \frac{-1}{6}(30)^2 + 10(30) - 30 = 120$$

۵ - گزینه ۲

$$\begin{matrix} \text{تابع هزینه} & \text{تابع درآمد} & \text{تابع سود} \\ \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ P(x) = R(x) - C(x) \end{matrix}$$

$$P(x) = 28x - x^2 - 30 - 8x = -x^2 + 20x - 30$$

$$x_{max} = \frac{-b}{2a} = \frac{-20}{2(-1)} = 10$$

$$\Rightarrow P_{max} = -(10)^2 + 20(10) - 30 = -100 + 200 - 30 = 70 \Rightarrow \text{هفتاد میلیون تومان}$$

۶ - گزینه ۱

$$\text{محور تقارن سهمی} = \frac{-b}{2a} \rightarrow 2 = \frac{4k}{2 \times 10} \Rightarrow 4k = 40 \Rightarrow k = 10$$

$$\text{ضابطه سهمی} \xrightarrow{x=1} f(x) = 10x^2 - 40x - 3 \xrightarrow{x=1} y = 10 \times (1)^2 - 40 \times (1) - 3 = -33$$

پس نقطه $(1, -33)$ روی نمودار تابع قرار دارد.

۷ - گزینه ۱

عرض رأس سهمی = بیشترین مقدار تابع

$$\rightarrow y = -4x^2 + 2x + \frac{3}{4} \rightarrow \begin{cases} a = -4 \\ b = 2 \\ c = \frac{3}{4} \end{cases}$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (2)^2 - 4(-4)\left(\frac{3}{4}\right) = 16$$

$$y_{\text{رأس سهمی}} = \frac{-\Delta}{4a} \rightarrow y = \frac{-16}{4(-4)} = 1$$

۸ - گزینه ۲

برای بررسی نقطه تقاطع با محور $x = 0$ بگذاریم:

$$f(x) = x^2 - 1 \xrightarrow{x=0} y = -1$$

$$g(x) = (x - 1)^2 \xrightarrow{x=0} y = 1$$

پس هر دو سهمی محور y را قطع می کنند \Leftarrow الف نادرست است.

در هر دو سهمی a یا ضریب x^2 مثبت است. \Leftarrow هر دو سهمی \min دارند. \Leftarrow ب درست است.

اگر $x = 1$ را در هر دو سهمی بگذاریم: $g(1) = (1 - 1)^2 = 0$ و $f(1) = 1^2 - 1 = 0$ پس هر دو سهمی از نقطه $(1, 0)$ می گذرند. \Leftarrow پ درست است.

دامنه هر دو تابع \mathbb{R} است. ولی برد f برابر $-1 \leq y$ و برد g ، $y \geq 0$ است. \Leftarrow ت نادرست است.

۹ - گزینه ۱ ابتدا تابع درآمد شرکت را به دست می آوریم:

$$R(x) = \text{تعداد واحد کالا} \times \text{قیمت هر واحد کالا} = (2000 - x) \times x = -x^2 + 2000x$$

از طرفی تابع هزینه شرکت برابر است با:

$$C(x) = 800x + 50000$$

حال تابع سود شرکت را می یابیم:

$$P(x) = R(x) - C(x) \Rightarrow P(x) = -x^2 + 2000x - (800x + 50000) \Rightarrow P(x) = -x^2 + 1200x - 50000$$

مختصات رأس سهمی تابع سود را می یابیم:

$$x_s = \frac{-b}{2a} = \frac{-1200}{2 \times (-1)} = \frac{-1200}{-2} = 600$$

پس به ازای تولید ۶۰۰ کالا ما کسب سود نصیب شرکت می شود:

$$P(600) = -(600)^2 + 1200 \times 600 - 50000 = -360000 + 720000 - 50000 = 310000$$

۱۰ - گزینه ۱ چون در صورت سؤال گفته که تابع $f(x)$ دارای بیشترین مقدار در $x = -2$ است، لذا رأس سهمی تابع $f(x)$ ، نقطه $(-2, -1)$ است و از طرفی دو تابع f و g یکدیگر را در

$x = 1$ قطع کرده اند، یعنی $f(1) = g(1)$ است، حال داریم:

$$f(x) = -ax^2 + 2bx - c$$

$$\text{طول رأس سهمی} = \frac{-2b}{2 \times (-a)} = \frac{b}{a} = -2 \Rightarrow b = -2a \quad (1)$$

$$f(-2) = -4a - 4b - c = -1 \xrightarrow{(1)} 4a - c = -1 \quad (2)$$

$$f(1) = g(1) \Rightarrow -a + 2b - c = -2 \xrightarrow{(1)} -5a - c = -2 \quad (3)$$

$$\xrightarrow{(2),(3)} a = \frac{1}{9}, b = \frac{-2}{9}, c = \frac{13}{9}$$

۱۱ - گزینه ۴ چون دهانه سهمی به طرف پایین باز می شود، لذا ضریب x^2 باید منفی باشد، پس گزینه (1) یا (4) صحیح می باشد.

از طرفی سهمی محور عرض ها را در نقطه ای با عرض -1 قطع کرده است یعنی به ازای $x = 0$ مقدار عرض سهمی باید -1 باشد که تنها در گزینه (4) ، این شرط برقرار است، پس ضابطه سهمی

گزینه (4) ، مربوط به نمودار می باشد.

۱۲ - گزینه ۴

$$y = 2(x + a)^2 + b$$

رأس سهمی : $S(-a, b) = S(-2, 3)$

$$\Rightarrow \begin{cases} -a = -2 \Rightarrow a = 2 \\ b = 3 \end{cases}$$

$a + b = 5$

بنابراین:

۱۳ - گزینه ۴

$6P = 180 - x \Rightarrow P = 30 - \frac{1}{6}x$

$R(x) = x(30 - \frac{1}{6}x) = 30x - \frac{1}{6}x^2$

تعداد کالا در ماکزیم درآمد : $x = -\frac{b}{2a} = -\frac{30}{2(-\frac{1}{6})} = 90$

تومان $P = 30 - \frac{1}{6} \times 90 = 30 - 15 = 15$ قیمت هر واحد کالا

۱۴ - گزینه ۲ محور تقارن سهمی $y = ax^2 + bx + c$ خط $x = -\frac{b}{2a}$ است. در نتیجه:

$-\frac{-(k+1)}{2 \times 4} = -1 \Rightarrow k+1 = -8 \Rightarrow k = -9$

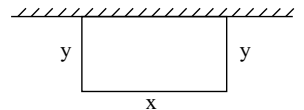
$y = 4x^2 + 8x - c \xrightarrow{(0, -3)} -3 = 4 \times 0 + 0 - c \Rightarrow c = 3$

$\Rightarrow y = 4x^2 + 8x - 3$

چون دهانه سهمی رو به بالا باز می شود، کم ترین مقدار سهمی روی محور تقارن سهمی (رأس سهمی) قرار دارد. بنابراین:

$x=-1 \rightarrow y = 4 \times (-1)^2 + 8(-1) - 3 = 4 - 8 - 3 = -7$

۱۵ - گزینه ۳ طول مستطیل را x و عرض آن را y در نظر می گیریم:



$2y + x = 56$

$\Rightarrow x = 56 - 2y$ (1)

مساحت = $S = xy$

(1) $\rightarrow S = (56 - 2y)y \Rightarrow S = 56y - 2y^2 \rightarrow S_{\max} = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-(56^2 - 0)}{4(-2)} = 392$

۱۶ - گزینه ۳

هزینه - درآمد = سود

سود = $-\frac{1}{3}x^2 + 28x - 16x - 55 = -\frac{1}{3}x^2 + 12x - 55 \rightarrow x_{\max} = -\frac{b}{2a} = -\frac{12}{2(-\frac{1}{3})}$

$x_{\max} = 18 \xrightarrow{\text{جایگذاری در تابع سود}} \text{ماکزیم مقدار سود} = -\frac{1}{3}(18)^2 + 12(18) - 55 = 53$

۱۷ - گزینه ۴ گزینه ۱: مربوط به $y = x$ که در آن $n = 1$

گزینه ۲: مربوط $y = x^n$ می باشد که در آن n عدد طبیعی زوج است.

گزینه ۳: مربوط به تابع $y = x^n$ که n عدد طبیعی فرد است.

۱۸ - گزینه ۲

$f(3) = 7 \Rightarrow f(3) = 9a + \frac{14}{3} = 7 \rightarrow 9a = -7 \rightarrow a = \frac{-7}{9}$

$f(-3) = \frac{-7}{9} \times (-3)^2 + 4(-3) + 2 = \frac{-7}{9} \times 9 - 12 + 2$

$= -7 - 12 + 2 = -17$

۱۹ - گزینه ۲

اگر ریشه‌های معادله مورد نظر را α و β در نظر بگیریم:

$$\alpha = \frac{-1}{\beta} \Rightarrow \alpha\beta = -1 \Rightarrow \frac{c}{a} = -1 \Rightarrow c = -a$$

پس باید معادله‌ای بیابیم که در آن a و c دو عدد قرینه باشند.

۲۰ - گزینه ۲

چون مجموع ضرایب صفر است، یکی از ریشه‌ها برابر یک است و ریشه دیگر برابر است با:

$$\frac{c}{a} = \frac{115}{35} = \frac{23}{7}$$

اختلاف ریشه‌ها: $\frac{23}{7} - 1 = \frac{16}{7}$

۲۱ - گزینه ۳

$$\begin{cases} f(1) = 2 \rightarrow A = (1, 2) \\ f(-1) = 3 \rightarrow B = (-1, 3) \end{cases} \Rightarrow m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{3 - 2}{-1 - 1} = \boxed{\frac{-1}{2}}$$

۲۲ - گزینه ۳

$$\text{محور تقارن: } \frac{-b}{2a}, y = -\frac{1}{2}x^2 + 2x + \frac{5}{2} \Rightarrow \begin{cases} a = -\frac{1}{2} \\ b = 2 \\ c = \frac{5}{2} \end{cases} \Rightarrow \text{محور تقارن: } x = \frac{-2}{2(-\frac{1}{2})} = \boxed{2}$$

۲۳ - گزینه ۴ به طور کلی، رأس سهمی به معادله $y = a(x - \alpha)^2 + \beta$ نقطه (α, β) است.

رأس سهمی $= (3, -1)$

۲۴ - گزینه ۲

$$y = -\frac{1}{2}x^2 + 4x - 1 \Rightarrow \begin{cases} x_S = \frac{-b}{2a} = \frac{-4}{2 \times (-\frac{1}{2})} = \boxed{4} \\ y_S \Rightarrow \text{جایگذاری} \Rightarrow y_S = -8 + 16 - 1 = \boxed{7} \end{cases}$$

چون $a < 0$ پس سهمی ماکزیمم دارد و $f(0) = -1$ پس نمودار گزینه ۲، مینیمم است.

۲۵ - گزینه ۱ ابتدا مقدار y را برحسب x از رابطه $2x + 3y = 24$ بدست آورده و در $6xy$ قرار می‌دهیم:

$$2x + 3y = 24 \Rightarrow 3y = -2x + 24 \xrightarrow{\div 3} y = \frac{-2}{3}x + 8$$

$$\text{عبارت مطلوب} \Rightarrow 6x(-\frac{2}{3}x + 8) = -4x^2 + 48x \Rightarrow x_S = \frac{-b}{2a} = \frac{-48}{2(-4)} = \boxed{6}$$

جایگذاری در عبارت $\rightarrow 6xy = \text{مکسیمم مقدار عبارت} = -4 \times (6)^2 + 48 \times (6) = -144 + 288 = \boxed{144}$

۲۶ - گزینه ۳ ابتدا باید معادله خط را به دست آوریم، سپس با مساوی قرار دادن ضابطه‌های دو تابع، طول نقاط برخورد بدست می‌آید:

$$A(-4, 0), B(0, 2) \Rightarrow m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{2 - 0}{0 - (-4)} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$y - y_1 = m(x - x_1) \Rightarrow y - 0 = \frac{1}{2}(x + 4) \Rightarrow y = \frac{1}{2}x + 2$$

$$x^2 + 1 = \frac{1}{2}x + 2 \Rightarrow x^2 - \frac{1}{2}x - 1 = 0 \Rightarrow S = \frac{-b}{a} = \frac{-(-\frac{1}{2})}{(1)} = \frac{1}{2}$$

دقت کنید مجموع طول نقاط برخورد برابر مجموع ریشه‌های معادله $x^2 - \frac{1}{2}x - 1 = 0$ است که از رابطه $-\frac{b}{a}$ به دست می‌آید.

۲۷ - گزینه ۲ اگر بخواهیم کمترین مقدار $f(x) = x^2 - 2x + k$ را به دست آوریم ابتدا x رأس سهمی را به دست می‌آوریم:

$$x = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-2)}{2(1)} = 1$$

سپس $x = 1$ را در معادله جایگزین می‌کنیم:

$$(1)^2 - 2(1) + k = 3 \Rightarrow \boxed{k = 4}$$

در معادله $g(x)$ جایگزین می‌کنیم:

$$g(x) = -x^2 - 2x + 4$$

$$x = \frac{-(-2)}{2(-1)} = -1 \xrightarrow{\text{جایگزین در } g(x)} -(-1)^2 - 2(-1) + 4 = -1 + 2 + 4 = 5$$

باتوجه به نمودار x رأس سهمی ۱ است:

$$\frac{-b}{2(-2)} = 1 \Rightarrow b = 4$$

$$y = -2x^2 + 4x + c$$

از طرفی نمودار محور x ها را در نقطه -1 قطع کرده است، پس اگر به جای x عدد -1 را قرار دهیم به صفر می‌رسیم:

$$-2(-1)^2 + 4(-1) + c = 0 \Rightarrow -2 - 4 + c = 0 \Rightarrow c = 6$$

۲۹ - گزینه ۲ نیمساز ناحیه اول و سوم $y = x$ است که مختصات رأس سهمی در آن صدق می‌کند. ابتدا مختصات رأس سهمی را به دست می‌آوریم:

$$x_S = \frac{-(-4k)}{2(-k)} = -2$$

$$y_S = -k(-2)^2 - 4k(-2) + 2k - 1 = -4k + 8k + 2k - 1 \Rightarrow y_S = 6k - 1$$

$$S(-2, 6k - 1) \xrightarrow{y=x} 6k - 1 = -2 \rightarrow 6k = -1 \rightarrow k = -\frac{1}{6}$$

۳۰ - گزینه ۴ نمودار تابع که از ۲ نقطه $A(1, -1)$ و $B(-1, 1)$ می‌گذرد؛ داریم:

$$f(x) = ax + b \Rightarrow \begin{cases} f(1) = -1 \Rightarrow a + b = -1 & (1) \\ f(-1) = 1 \Rightarrow -a + b = 1 & (2) \end{cases}$$

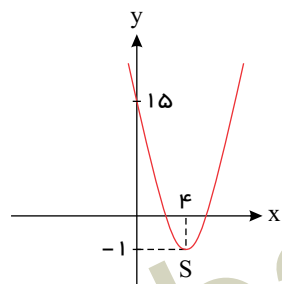
$$\xrightarrow{(1),(2)} b = 0, a = -1 \Rightarrow -2a + 3b = -2 \times (-1) + (3 \times 0) = 2$$

۳۱ - گزینه ۲

$$y = x^2 - 8x + 15 \xrightarrow{\text{مقایسه با فرم استاندارد}} \begin{cases} a = 1 \\ b = -8 \\ c = 15 \end{cases}$$

$$\Rightarrow x_S = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-8)}{2(1)} = 4 \xrightarrow{\text{در تابع قرار می‌دهیم}} y = 4^2 - 8(4) + 15 = -1$$

مختصات رأس سهمی $S(4, -1)$



از طرفی دهانه سهمی رو به بالاست، چون ضریب x^2 مثبت است. با رسم نمودار سهمی، ملاحظه می‌کنیم که سهمی از ناحیه سوم نمی‌گذرد. (اگر در معادله سهمی به جای x صفر قرار دهیم، به جواب $y = 15$ می‌رسیم؛ یعنی سهمی محور y ها را در نقطه‌ای به عرض ۱۵ قطع می‌کند.)

۳۲ - گزینه ۳ طول رأس سهمی $y = ax^2 + bx + c$ برابر $x_S = -\frac{b}{2a}$ می‌باشد، داریم:

$$x_S = -\frac{b}{2a} = -\frac{3}{4} \Rightarrow \frac{b}{2a} = \frac{3}{4} \Rightarrow \frac{b}{a} = \frac{3}{2}$$

وقتی $\frac{b}{a} = \frac{3}{2}$ است یعنی نسبت ضریب x به ضریب x^2 باید برابر $\frac{3}{2}$ باشد که در گزینه‌های ۲ و ۳ درست است، از طرفی نقطه $(0, -4)$ روی سهمی قرار دارد. پس:

$$\xrightarrow{\text{سهمی } (0,4)} c = -4 \rightarrow \text{یعنی محل برخورد سهمی با محور } y \text{ ها } (-4) \text{ است}$$

باتوجه به دو شرط فوق تنها گزینه‌ی «۳» می‌تواند صحیح باشد.

۳۳ - گزینه ۲ تابع را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$y = x^2 - 4x = x^2 - 4x + 4 + 3 = (x^2 - 4x + 4) + 3 \Rightarrow y = (x - 2)^2 + 3$$

برای رسم تابع مورد نظر، تابع x^2 را دو واحد به راست و سه واحد به بالا منتقل می‌کنیم.

