

پاسخنامه تشریحی

۱ - گزینه ۱

$$a(a+2) + 4b(b+1) + 4ab = a^2 + 2a + 4b^2 + 4b + 4ab$$

باتوجه به فرض مسأله که مقدار $a+2b$ را داده است، بنابراین عبارت را باید طوری تجزیه کنیم که اتحادی حاصل شود که شامل عبارت $a+2b$ باشد:

$$\underbrace{a^2 + 4ab + 4b^2}_{\text{اتحاد مربع کامل}} + \underbrace{2a + 4b}_{\text{فاکتور از ۲}} = (a+2b)^2 + 2(a+2b) \stackrel{a+2b=3}{=} (3)^2 + 2(3) = 9 + 6 = 15$$

۲ - گزینه ۱

$$4x^2 - 6x + \frac{1}{4} \quad \text{و} \quad (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$4x^2 \xrightarrow{\text{جذر}} 2x$$

عبارت $6x$ برابر است با حاصل ضرب ۲ برابر جمله‌ی اول در جمله‌ی دوم. پس از عبارت اولی جذر می‌گیریم:

یعنی جمله‌ی اول اتحاد، $2x$ بوده است و حال اگر عبارت دوم را A در نظر بگیریم خواهیم داشت:

$$2(2x)(A) = 6x \xrightarrow{\text{حذف } x \text{ از طرفین}} 4A = 6 \Rightarrow A = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

یعنی جمله‌ی دوم اتحاد، $\frac{3}{2}$ بوده است. پس اتحاد دو جمله‌ای به صورت $(2x - \frac{3}{2})^2$ بوده است:

$$(2x - \frac{3}{2})^2 = 4x^2 - 6x + \frac{9}{4}$$

حال باید دید به $\frac{1}{4}$ چه قدر اضافه کنیم تا برابر $\frac{9}{4}$ گردد:

$$\frac{9}{4} - \frac{1}{4} = \frac{8}{4} = 2$$

۳ - گزینه ۳

$$\underbrace{x^2 - 3x^2 + 8x - 24}_{\text{فاکتور از } x^2} = x^2(x-3) + 8(x-3) \stackrel{\text{فاکتور از } (x-3)}{=} (x-3)(x^2+8) = (x-3)(x+2)(x^2-2x+4)$$

پس باتوجه به گزینه‌ها تنها، عامل $(x+2)$ وجود دارد.

۴ - گزینه ۴ روش اول:

هر عبارت را جداگانه ساده می‌کنیم.

$$\frac{4x^2 + 4x + 1}{2x^2 + x} = \frac{(2x+1)^2}{x(2x+1)} = \frac{2x+1}{x}$$

$$x-2 - \frac{x^2+1}{x} = \frac{x(x-2) - (x^2+1)}{x} = \frac{x^2 - 2x - x^2 - 1}{x} = \frac{-2x-1}{x} = \frac{-(2x+1)}{x}$$

پس: $\frac{4x^2 + 4x + 1}{2x^2 + x} \div (x-2 - \frac{x^2+1}{x}) = \frac{2x+1}{x} \div (\frac{-(2x+1)}{x}) = \frac{2x+1}{x} \times \frac{x}{-(2x+1)} = -1$

روش دوم: کافی است یک عدد دلخواه مثلاً $x=2$ را در عبارت قرار دهیم.

$$x=2 \rightarrow \frac{16+8+1}{8+2} \div (2-2 - \frac{4+1}{2}) = \frac{25}{10} \div (-\frac{5}{2}) = \frac{25}{10} \times (-\frac{2}{5}) = -1$$

بنابراین گزینه‌ی چهارم صحیح است.

۵ - گزینه ۲

$$\boxed{(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2} \quad \text{می‌دانیم:}$$

$$2A^2 + 2B^2 - 4AB = 2(A^2 + B^2 - 2AB) = 2(A-B)^2$$

$$\Rightarrow 2(A-B)^2 = 2((5x^2 + 5) - (5x^2 - 1))^2 = 2(5x^2 + 5 - 5x^2 + 1)^2 = 2(6)^2 = 2 \times 36 = 72$$

۶ - گزینه ۲ می‌دانیم:

$$11^2 = (10+1)^2 = 100 + 2 \times 10 \times 1 + 1 = 121$$

$$11^3 = (10+1)^3 = 1000 + 3 \times 10^2 \times 1 + 3 \times 10 \times 1^2 + 1^3$$

$$= 1000 + 300 + 30 + 1 = 1331$$

$$12 \times 1331 = 15972$$

$$(x + b)(x + c) = x^2 + (b + c)x + bc$$

باتوجه به این که باید مجموع دو عدد مورد نظر ۶- و حاصل ضرب آن دو عدد ۸ شود، گزینه‌ی ۳ درست است.

$$x^2 - 6x + 8 = (x - 2)(x - 4)$$

می‌دانیم که $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ است.

$$x + \frac{1}{x} = 5 \xrightarrow{\text{توان ۲}} (x + \frac{1}{x})^2 = 25 \Rightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} + 2x(\frac{1}{x}) = 25 \Rightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} = 23$$

$$\Rightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} - 20 = 23 - 20 = 3$$

می‌دانیم که $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$ است.

$$b = a - 2 \Rightarrow a - b = 2$$

$$a^2 - b^2 = 6 \Rightarrow (a - b)(a + b) = 6 \Rightarrow 2(a + b) = 6 \Rightarrow a + b = 3$$

$$\begin{cases} a - b = 2 \\ a + b = 3 \end{cases} \Rightarrow 2a = 5 \Rightarrow a = 2,5 \xrightarrow{a+b=3} 2,5 + b = 3 \Rightarrow b = 0,5$$

$$\text{پس: } a + 2b = 2,5 + 2(0,5) = 2,5 + 1 = 3,5$$

ابتدا در هر یک از پرانتزها مخرج مشترک می‌گیریم:

$$(x + \frac{2}{x-3}) \times (1 - \frac{1}{x-2}) = (\frac{x(x-3)+2}{x-3}) \times (\frac{x-2-1}{x-2})$$

اتحاد جمله‌ی مشترک

$$= \frac{x^2 - 3x + 2}{x-3} \times \frac{x-3}{x-2} = \frac{(x-1)(x-2)}{(x-3)} \times \frac{x-3}{x-2} = x-1$$

روش دوم: یک عدد دلخواه مثلا $x = 1$ را در عبارت جایگزین می‌کنیم.

$$x = 1 \rightarrow (1 + \frac{2}{-2})(1 - \frac{1}{-1}) = (1 - 1)(1 + 1) = 0$$

تنها در گزینه‌ی اول است که اگر به جای x عدد یک را قرار دهید حاصل صفر می‌شود.

$$\boxed{(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2} \quad \text{۱۱ - گزینه ۳ می‌دانیم:}$$

$$5x - \frac{3}{2x} = 4 \xrightarrow{\text{دو طرف را به توان ۲ می‌رسانیم}} (\frac{5x - \frac{3}{2x}}{2x})^2 = (\frac{4}{2x})^2 \Rightarrow (\frac{5x}{2x})^2 - 2(\frac{5x}{2x})(\frac{3}{2x}) + (\frac{3}{2x})^2 = 16$$

$$\rightarrow 25x^2 - 15 + \frac{9}{4x^2} = 16 \rightarrow 25x^2 + \frac{9}{4x^2} = 16 + 15 = 31$$

۱۲ - گزینه ۳ طبق اتحاد $(a + b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3$ داریم:

$$(2x + 1)(4x^2 - 2x + 1) = 8x^3 + 1 \xrightarrow{x = \sqrt[3]{2}} 8(\sqrt[3]{2})^3 + 1 = 8(2) + 1 = 17$$

ابتدا هر یک از پرانتزها را ساده می‌کنیم:

$$1 - \frac{6}{x+2} = \frac{x+2-6}{x+2} = \frac{x-4}{x+2}$$

$$\frac{5x-2}{x-4} + x = \frac{5x-2+x(x-4)}{x-4} = \frac{5x-2+x^2-4x}{x-4} = \frac{x^2+x-2}{x-4}$$

تجزیه‌ی صورت از طریق اتحاد جمله‌ی مشترک

$$\frac{(x+2)(x-1)}{x-4}$$

حال دو عبارت ساده شده را در هم ضرب می‌کنیم:

$$\frac{x-4}{x+2} \times \frac{(x+2)(x-1)}{x-4} = \frac{x-1}{1} = x-1$$

یک عدد دلخواه، مثلا $x = 1$ را در عبارت جایگزین می‌کنیم.

$$x = 1 \rightarrow (1 - \frac{6}{3})(\frac{3}{-3} + 1) = (1 - 2)(-1 + 1) = (-1)(0) = 0$$

$$a = \frac{b}{2} \rightarrow A = \left(\frac{b}{2}\right)^6 - 2b^6 = \frac{b^6}{64} - 2b^6 = \frac{b^6 - 128b^6}{64} = \frac{-127b^6}{64}$$

$$b = 2a \rightarrow A = a^6 - 2(2a)^6 = a^6 - 128a^6 = -127a^6$$

۲۲ - گزینه ۳ با توجه به اتحاد جمله‌ی مشترک داریم:

$$(x^2 - 3)(x^2 + 7) = x^4 + \boxed{(7-3)x^2 + 7(-3)} = x^4 + 4x^2 - 21 = x^4 + \boxed{4x^2 - 21}$$

۲۳ - گزینه ۴ چون $4x^2 + 5$ هیچ وقت صفر نمی‌شود. این عبارت گویا همواره تعریف شده است و هیچ مقداری آن را تعریف نشده نمی‌کند.

$$x \rightarrow x^2 > 0 \rightarrow 4x^2 > 0 \rightarrow 4x^2 + 5 > 0$$

۲۴ - گزینه ۲ راه حل اول: ابتدا مخرج کسر اول را تجزیه کنیم:

$$x^3 + 1 = (x+1)(x^2 - x + 1)$$

$$x^4 + x \xrightarrow{\text{از } x \text{ فاکتور می‌گیریم}} x(x^3 + 1) = x(x+1)(x^2 - x + 1)$$

با فرض این که کسرها تعریف شده باشند طرفین وسطین می‌کنیم:

$$\square (x+1) = 2(x^2 + x)$$

$$\square = \frac{2(x^2 + x)}{(x+1)}$$

$$\square = \frac{(2)(x^2 + x)}{x+1} = \frac{(2)(x)(\cancel{x+1})(x^2 - x + 1)}{\cancel{x+1}} = (2)(x)(x^2 - x + 1) = 2x^3 - 2x^2 + 2x$$

۲۵ - گزینه ۲ به الگوی زیر دقت کنید:

$$(a+b)^0 = 1$$

$$(a+b)^1 = a+b$$

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

⋮

در هر سطر تعداد جملات از مقدار توان، ۱ واحد بیش‌تر است. پس حاصل عبارت $(a+b)^{15}$ دارای $15 + 1 = 16$ جمله می‌باشد.

نکته: به طور کلی در بسط دو جمله‌ای تعداد جملات $(a+b)^n$ برابر $n + 1$ است.

۲۶ - گزینه ۱

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b) \Rightarrow \text{اتحاد مزدوج}$$

$$16 - t^2 \xrightarrow{\text{مزدوج}} (4 - t^2)(4 + t^2) \xrightarrow{\text{مزدوج}} \underbrace{(2-t)(2+t)}_{\text{اتحاد مزدوج}} (4 + t^2)$$

ابتدا عبارت داده شده را به کمک اتحاد مزدوج تجزیه می‌کنیم:

بنابراین گزینه‌ی ۱ در ساده‌شده‌ی این عبارت وجود ندارد.

۲۷ - گزینه ۳ برای بررسی حدود x در عبارات گویا، مخرج کسر را تجزیه می‌کنیم: (و با صورت کسر برای محاسبه‌ی دامنه کاری نداریم!)

$$x(x^2 + x - 12) = x(x-3)(x+4) \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x - 3 = 0 \rightarrow x = 3 \\ x + 4 = 0 \rightarrow x = -4 \end{cases}$$

مخرج سه ریشه صحیح دارد. پس عبارت به ازای ۳ عدد صحیح ۳، ۰، -۴ تعریف نمی‌شود.

۲۸ - گزینه ۳

$$x^6 + x^3 + 1 = (x^3 + 1) + x^3 = (x^3 + 1)^2 - 2x^3 + x^3 = (x^3 + 1)^2 - x^3$$

$$(x^3 + 1 - x)(x^3 + 1 + x) = (x^3 - x + 1)(x^3 + x + 1)$$

۲۹ - گزینه ۴

$$\left. \begin{aligned} \underbrace{a^2 - b^2}_{\text{مزدوج}} = 12 &\Rightarrow (a-b)(a+b) = 12 \\ b - a = 3 &\Rightarrow a - b = -3 \end{aligned} \right\} \Rightarrow -3(a+b) = 12 \Rightarrow (a+b) = -4$$

$$A = \underbrace{a^2 + b^2 + 2ab}_{\text{مربع دو جمله‌ای}} - a + b + 1 = (a+b)^2 - (a-b) + 1$$

$$= (-4)^2 - (-3) + 1 = 16 + 3 + 1 = 20$$

۳۰ - گزینه ۲

$$3x - \frac{7}{2x} = 5 \xrightarrow{\text{طرفین به توان ۲}} \left(3x - \frac{7}{2x}\right)^2 = 5^2$$

$$\Rightarrow 9x^2 + \frac{49}{4x^2} - 2(3x)\left(\frac{7}{2x}\right) = 25 \Rightarrow 9x^2 + \frac{49}{4x^2} = 25 + 21 = 46$$

۳۱ - گزینه ۲

$$\frac{B}{C} = \frac{A}{1} \xrightarrow{\text{طرفین وسطین}} B = AC \rightarrow C = \frac{B}{A} = B \div A$$

$$C = B \div A = \frac{x^2 + 3x + 2}{x^2 + x} \div \frac{x^2 - 4}{x^2 - 2x} \xrightarrow{\text{تقسیم به ضرب تبدیل می شود کسر دوم معکوس می شود}} \frac{x^2 + 3x + 2}{x^2 + x} \times \frac{x^2 - 2x}{x^2 - 4}$$

اتحاد جمله مشترک
فاکتور از x

$$= \frac{(x+1)(x+2)}{x(x+1)} \times \frac{x(x-2)}{(x-2)(x+2)} = \frac{x(x+2)}{x(x-2)(x+2)} = \frac{x-2}{x-2}$$

۳۲ - گزینه ۱

$$a(a-2)(a-3) - 4a + 8 = a(a-2)(a-3) - 4(a-2)$$

$$\xrightarrow{\text{فاکتور از } (a-2)} (a-2)[a(a-3) - 4] = (a-2)(a^2 - 3a - 4)$$

$$\xrightarrow{\text{اتحاد یک جمله مشترک}} (a-2)(a-4)(a+1)$$

۳۳ - گزینه ۳

روش اول:

$$\text{عبارت اول: } \frac{x-5}{1} + \frac{6}{x+2} = \frac{(x+2)(x-5) + 6}{x+2} = \frac{x^2 - 5x + 2x - 10 + 6}{x+2} = \frac{x^2 - 3x - 4}{x+2} = \frac{(x+1)(x-4)}{x+2}$$

$$\text{عبارت دوم: } 1 - \frac{1}{x+2} = \frac{x+2-1}{x+2} = \frac{x+1}{x+2}$$

$$\text{جواب} = \frac{(x+1)(x-4)}{x+2} \times \frac{x+2}{x+1} = x-4$$

برای محاسبه ی عبارت داده شده کافی است که عبارت اول را در عکس عبارت دوم ضرب کنیم.

روش دوم:

عددی دلخواه مانند $x = 0$ در عبارت جایگزین می کنیم.

$$x = 0 \rightarrow (0 - 5 + \frac{6}{2}) \div (1 - \frac{1}{2}) = (-5 + 3) \div (\frac{1}{2}) = (-2) \times 2 = -4$$

فقط گزینه ی سوم است که اگر $x = 0$ را در آن جایگزین کنیم حاصل برابر -4 می شود.

۳۴ - گزینه ۳ $(1 + \frac{1}{3})$ را از چپ در طرفین رابطه A ضرب می کنیم. داریم:

$$(1 + \frac{1}{3})A = (1 + \frac{1}{3})(1 - \frac{1}{3})(1 + \frac{1}{9})(1 + \frac{1}{81}) =$$

$$(1 - \frac{1}{9})(1 + \frac{1}{9})(1 + \frac{1}{81}) = (1 - \frac{1}{81})(1 + \frac{1}{81})$$

$$\rightarrow (1 + \frac{1}{3})A = 1 - (\frac{1}{81})^2 \rightarrow A = (1 - \frac{1}{81^2}) \div (1 + \frac{1}{3})$$

$$\rightarrow A = B \rightarrow \frac{A}{B} = 1$$

۳۵ - گزینه ۳ در طرفین تساوی $(2-1)$ را از چپ ضرب می کنیم:

$$(2-1)A = (2-1)(2+1)(2^2+1)(2^4+1) \dots (2^{64}+1)$$

$$\xrightarrow{\text{اتحاد مزدوج}} (2-1)A = \underbrace{(2^2-1)}_1 (2^2+1)(2^4+1) \dots (2^{64}+1)$$

$$\rightarrow A = ((2^2)^2 - 1)(2^4+1) \dots (2^{64}+1) \rightarrow A = (2^4-1)(2^4+1) \dots (2^{64}+1)$$

و به همین ترتیب اتحاد مزدوج را به کار می بریم و ادامه می دهیم:

اتحاد مزدوج

$$A = (2^{32} - 1)(2^{32} + 1)(2^{64} + 1) \rightarrow A = (2^{64} - 1)(2^{64} + 1) = (2^{64})^2 - 1$$
$$= 2^{2 \times 64} - 1 = 2^{128} - 1$$

abadgaranedu.ir