پاسخنامه تشریحی

۱ - گزینه ۴ شرط آنکه سه خط در یک نقطه همدیگر را قطع کنند آن است که محل تلاقی دو خط در معادله‌ی خط سوم صدق کند.

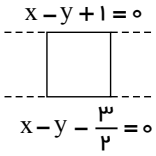
$$-\begin{cases} y+۲x=۰ \\ y+۳x=a \end{cases} \Rightarrow x=a\ ,\ y=-۲a$$

$$A\left|\begin{matrix} a \\ -۲a \end{matrix}\right. \xrightarrow[۲y+ax+۵=۰]{\text{صدق در خط سوم}} -۴a+a^۲+۵=۰ \Rightarrow a^۲-۴a+۵=۰$$

$\Delta=b^۲-۴ac=۱۶-۲۰=-۴<۰ \rightarrow$ ریشه‌ی حقیقی ندارد $\rightarrow$ این سه خط هیچگاه متقارب نیستند.

۲ - گزینه ۳

شیب هر دو خط یک می‌باشند یعنی این دو خط موازیند یعنی دو ضلع مقابل یک مربع هستند و فاصله‌ی بین این دو، ضلع مربع را می‌دهد.



(در محاسبه‌ی فاصله‌ی بین دو خط موازی حتماً ضرایب x و y در هر دو معادله‌ی خط باید یکسان باشند)

$$\text{ضلع مربع}=d=\frac{|c-c'|}{\sqrt{a^۲+b^۲}}=\frac{|۱-(-\frac{۳}{۲})|}{\sqrt{۱+۱}}=\frac{\frac{۵}{۲}}{\sqrt{۲}}=\frac{۵}{۲\sqrt{۲}}$$

$$S_{\text{مربع}}=(\text{ضلع})^۲=(\frac{۵}{۲\sqrt{۲}})^۲=\frac{۲۵}{۸}$$

برای محاسبه‌ی فاصله‌ی بین دو خط موازی به معادلات $ax+by+c=۰$ و $ax+by+c'=۰$ از رابطه‌ی $d=\frac{|c-c'|}{\sqrt{a^۲+b^۲}}$ استفاده می‌کنیم.

۳ - گزینه ۲ ابتدا شیب خط گذرنده از دو نقطه‌ی $A\left|\begin{matrix} ۲ \\ -۱ \end{matrix}\right.$ و $B\left|\begin{matrix} ۸ \\ ۳ \end{matrix}\right.$ را بدست می‌آوریم.

$$m_{AB}=\frac{y_A-y_B}{x_A-x_B}=\frac{-۱-۳}{۲-۸}=\frac{-۴}{-۶}=\frac{۲}{۳} \xrightarrow{\text{عمود}} m_{\text{دسته خط}}=-\frac{۳}{۲}$$

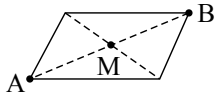
$$m_{\text{دسته خط}}=-\frac{۲k}{k+۱}=-\frac{۳}{۲} \rightarrow ۴k=۳k+۳ \rightarrow k=۳$$

$$k=۳ \xrightarrow[\text{معادله‌ی دسته خطوط}]{} ۴y+۶x-۲=۰ \xrightarrow{\div ۲} ۲y+۳x=۱$$

۴ - گزینه ۳

مختصات نقطه‌ی A در هیچ‌یک از معادلات دو خط صدق نمی‌کند پس نقطه A روی این دو خط قرار ندارد و چون این دو خط، موازی نیستند کافی است با این دو خط تشکیل دستگاه دهیم تا مختصات نقطه‌ی B بدست آید.

$$\begin{matrix} ۳ \\ -۲ \end{matrix}\begin{cases} ۲y-۳x=۱۱ \\ ۳y+۴x=۸ \end{cases} \rightarrow -۱۷x=۱۷ \Rightarrow x=-۱\ ,\ y=۴ \Rightarrow B\left|\begin{matrix} -۱ \\ ۴ \end{matrix}\right.$$



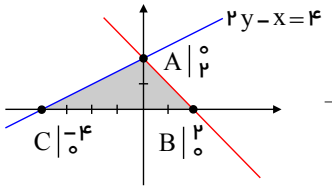
می‌دانیم نقطه‌ی M وسط پاره‌خط AB قرار دارد یعنی:

$$x_M=\frac{x_A+x_B}{۲}=\frac{۷-۱}{۲}=۳\ \ ,\ \ y_M=\frac{y_A+y_B}{۲}=\frac{۶+۴}{۲}=۵$$

۵ - گزینه ۲ ابتدا محل برخورد این خطوط را با محورهای مختصات پیدا می‌کنیم.

$$y+x=۲ \rightarrow \begin{cases} x=۰ \rightarrow y=۲ \\ y=۰ \rightarrow x=۲ \end{cases}\ ,\ ۲y-x=۴ \rightarrow \begin{cases} x=۰ \rightarrow y=۲ \\ y=۰ \rightarrow x=-۴ \end{cases}$$

سپس با رسم این خطوط، مساحت مثلث را بدست می‌آوریم.



$$\rightarrow S=\frac{۶\times ۲}{۲}=۶$$

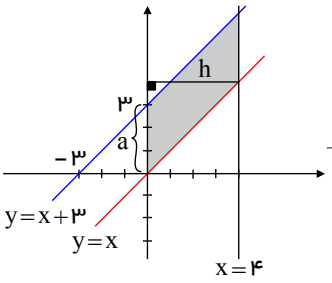
۶ - گزینه ۲ نقطه‌ی $A\left|\begin{matrix}\alpha\\ \alpha-۱\end{matrix}\right.$ را روی خط $y=x-۱$ در نظر گرفته و فاصله‌ی آن را از خط $۲x-۳y=۵$ بدست آورده و مساوی $\sqrt{۱۳}$ قرار می‌دهیم.

$$\begin{cases} A\left|\begin{matrix}\alpha\\ \alpha-۱\end{matrix}\right. \\ ۲x-۳y-۵=۰ \end{cases} \rightarrow AH=\frac{|۲\alpha-۳\alpha+۳-۵|}{\sqrt{۴+۹}}=\frac{|-\alpha-۲|}{\sqrt{۱۳}}=\sqrt{۱۳} \rightarrow |-\alpha-۲|=۱۳$$

$$-\alpha-۲=۱۳\rightarrow\alpha=-۱۵\ ,\ -\alpha-۲=-۱۳\rightarrow\alpha=۱۱$$

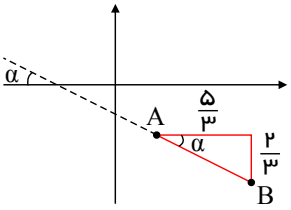
توجه کنید فاصله‌ی نقطه‌ی $A\left|\begin{matrix}\alpha\\ \beta\end{matrix}\right.$ ازخط به معادله‌ی $ax+by+c=۰$ از رابطه‌ی $AH=\frac{|a\alpha+b\beta+c|}{\sqrt{a^۲+b^۲}}$ به‌دست می‌آید.

۷ - گزینه ۲ بهترین روش برای حل این تست رسم شکل است.

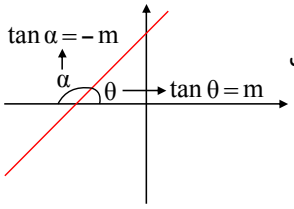


$$\rightarrow S=a\times h=۳\times۴=۱۲$$

۸ - گزینه ۳



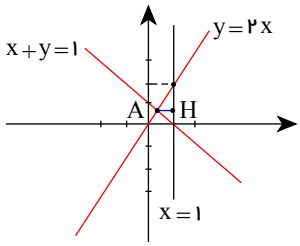
شیب خط عبارت است از تانژانت زاویه‌ای که خط با سمت راست محور طول‌ها تشکیل می‌دهد.



پس : $\tan\alpha=-m=\frac{\text{مقابل}}{\text{مجاور}}=\frac{\frac{۲}{۳}}{\frac{۵}{۳}}=\frac{۲}{۵}\rightarrow m=-\frac{۲}{۵}$

۹ - گزینه ۱ سه خط داده شده را رسم می‌کنیم.

$$y=۲x\rightarrow\left|\begin{matrix}۰\\ ۰\end{matrix}\right.\ ,\ \left|\begin{matrix}۱\\ ۲\end{matrix}\right. \quad \text{و} \quad x+y=۱\ \left|\begin{matrix}۰\\ ۱\end{matrix}\right.\ ,\ \left|\begin{matrix}۱\\ ۰\end{matrix}\right.\rightarrow$$



کوچک‌ترین ارتفاع مثلث ABC پاره‌خط AH می‌باشد که معادله‌اش $y=\frac{۲}{۳}$ است زیرا اگر با دو خط $x+y=۱$ و $y=۲x$ تشکیل دهیم داریم:

$$\begin{cases} x+y=۱ \\ y=۲x \end{cases} \Rightarrow x=\frac{۱}{۳}\ ,\ y=\frac{۲}{۳}$$

یعنی مختصات نقطه‌ی A به‌صورت $A\left|\begin{matrix}\frac{۱}{۳}\\ \frac{۲}{۳}\end{matrix}\right.$ است پس معادله‌ی ارتفاع AH به‌صورت $y=\frac{۲}{۳}$ است.

۱۰ - گزینه ۴ معادله‌ی خط نیمساز ناحیه‌ی اول و سوم $y=x$ است که شیب آن یک می‌باشد و چون خط باید با نیمساز ناحیه‌ی اول و سوم موازی باشد پس شیب خط مطلوب هم، یک می‌باشد. چون این خط ،نیمساز ناحیه‌ی دوم و چهارم $(y=-x)$ را در نقطه‌ای به طول ۲ قطع می‌کند پس عرض آن ۲- است.

$$A\left|\begin{matrix}۲\\ -۲\end{matrix}\right., m=۱\rightarrow y-(-۲)=۱(x-۲)\rightarrow y+۲=x-۲\rightarrow y-x=-۴$$

۱۱ - گزینه ۳

$$d_۱ : mx + (m+۱)y = ۳ \to m_۱ = -\frac{m}{m+۱}$$

$$d_۲ : (m^۲ - ۱)x + m(m+۲)y = ۴ \to m_۲ = -\frac{m^۲ - ۱}{m(m+۲)}$$

$$\text{دو خط بر هم عمود} \to m_۱ \cdot m_۲ = -۱ \to \frac{-m}{m+۱} \times \frac{-(m^۲ - ۱)}{m(m+۲)} = -۱$$

$$\to \frac{m}{(m+۱)} \cdot \frac{(m+۱)(m-۱)}{m(m+۲)} = -۱ \xrightarrow{m \neq ۰,-۱,-۲} \frac{m-۱}{m+۲} = -۱$$

$$m - ۱ = -m - ۲ \to ۲m = -۱ \to \boxed{m = -\frac{۱}{۲}}$$

$$m = ۰ \to \begin{cases} d_۱ : y = ۳ \\ d_۲ : x = -۴ \end{cases} \text{ دو خط بر هم عمودند} \to \boxed{m = ۰}$$

$$m = -۱ \to \begin{cases} d_۱ : x = -۳ \\ d_۲ : y = -۴ \end{cases} \text{ دو خط بر هم عمودند} \to \boxed{m = -۱}$$

$$m = -۲ \to \begin{cases} d_۱ : -۲x - y = ۳ \\ d_۲ : ۳x = ۴ \end{cases} \text{ دو خط بر هم عمود نیستند}$$

$$\text{مجموع مقادیر } m = -\frac{۱}{۲} + ۰ + (-۱) = -\frac{۳}{۲}$$

۱۲ - گزینه ۱ ابتدا نقطهٔ برخورد دو خط $y = ۳x + ۱$ و $۲x + ۳y = ۱۴$ را به‌دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} ۲x + ۳y = ۱۴ \\ y = ۳x + ۱ \end{cases} \xrightarrow{\text{جای‌گذاری}} ۲x + ۳(۳x + ۱) = ۱۴ \to ۱۱x + ۳ = ۱۴$$

$$\to ۱۱x = ۱۱ \to \boxed{x = ۱} \quad , \quad y = ۳(۱) + ۱ \to \boxed{y = ۴} \to \boxed{A(۱, ۴)}$$

خطی که با نیم‌ساز ربع دوم و چهارم $(y = -x)$ موازی است پس شیب آن برابر است با: $\boxed{m = -۱}$

$$y - y_A = m(x - x_A) \to y - ۴ = -۱(x - ۱) \to y - ۴ = -x + ۱$$

$$y = -x + ۵ \to \boxed{y + x - ۵ = ۰}$$

۱۳ - گزینه ۲

$$A(-۳, -۱) \ , \ O(۰, ۰) \in d \to m_{d'} = \frac{y_A - y_O}{x_A - x_O} = \frac{-۱ - ۰}{-۳ - ۰} \to \boxed{m_{d'} = \frac{۱}{۳}}$$

$$\text{خط } d \text{ و } d' \text{ بر هم عمودند} \to m_d = \frac{-۱}{m_{d'}} = \frac{-۱}{\frac{۱}{۳}} \to \boxed{m_d = -۳} \quad , \quad B(۲, ۴) \in d$$

$$\to y - y_B = m_d(x - x_B) \to y - ۴ = -۳(x - ۲) \to \boxed{y = -۳x + ۱۰}$$