بنیاد علمی آموزشی قلم چی
وقف عام

دوازدهم ریاضی

۱۷ آبان ۱۳۹۸

دفترچه پاسخ

کانون فرهنگی آموزش
قلم چی

دفترچهٔ پاسخ

آزمون ۱۷ آبان ماه ۹۸

اختصاصی دوازدهم ریاضی (نظام جدید)

بنیاد علمی آموزشی قلم‌چی (وقف عام)

	نام درس	نام طراحان
اختصاصی	ریاضی پایه و حسابان ۲	کاظم اجلالی - سیدعادل حسینی - میلاد سجادی لاریجانی - حبیب شفیعی - علی شهرابی - عرفان صادقی سعید علم‌پور - حمید علیزاده - میلاد منصوری
	هندسه	محمدمهدی ابوترابی - امیرحسین ابومحبوب - حسین حاجیلو - محمد خندان - محمدابراهیم گیتی‌زاده نوید مجیدی - بهزاد نظام هاشمی - محمد هجری - فرهاد وفایی
	آمار و احتمال و ریاضیات گسسته	محمدمهدی ابوترابی - امیرحسین ابومحبوب - جواد حاتمی - علیرضا شریف خطیبی - مجید محمدی‌نویسی سیدعادل‌رضا مرتضوی - مهرداد ملوندی - محمدعلی نادرپور - محمد هجری
	فیزیک	خسرو ارغوانی‌فرد - عبدالرضا امینی‌نسب - زهره آقامحمدی - ملیحه جعفری - حامد خسروی - بیتا خورشید میثم دشتیان - محمدعلی راست‌پیمان - سعید شرق - علیرضا طالبیان - مصطفی کیانی - علیرضا گونه امیرحسین مجوّزی - غلامرضا محبی - حسین مخدومی - حسین ناصحی
	شیمی	ساسان اسماعیل‌پور - امیرعلی برخورداریون - جواد جدیدی - حسن رحمتی‌کوکنده - جعفر رحیمی مبینا شرافتی‌پور - محمد عظیمیان زواره - محمد کوهستانیان - محمدحسن محمدزاده مقدم - سیدمحمد معروفی سالار ملکی - امین نوروزی

گزینشگران و ویراستاران

نام درس	ریاضی پایه و حسابان ۲	هندسه	آمار و احتمال و ریاضیات گسسته	فیزیک	شیمی
گزینشگر	کاظم اجلالی	امیرحسین ابومحبوب	امیرحسین ابومحبوب	سیدعلی میرنوری	محمد وزیری
گروه ویراستاری	مرضیه گودرزی علی ارجمند مهدی ملارمضانی	زهرا رضایی سیدعادل حسینی	زهرا رضایی سیدعادل حسینی	حمید زرین‌کفش سجاد شهرابی فراهانی امیرمهدی جعفری	ایمان حسین‌نژاد علی علمداری مبینا شرافتی‌پور
مسئول درس	سیدعادل حسینی	امیرحسین ابومحبوب	امیرحسین ابومحبوب	بابک اسلامی	محمدحسن محمدزاده مقدم

گروه فنی و تولید

مدیر گروه	محمد اکبری
مسئول دفترچه	نرگس غنی‌زاده
گروه مستندسازی	مدیر گروه: فاطمه رسولی‌نسب — مسئول دفترچه: آتنه اسفندیاری
حروف‌نگار	حسن خرّم‌جو
ناظر چاپ	سوران نعیمی

گروه آزمون

بنیاد علمی آموزشی قلم‌چی (وقف عام)

دفتر مرکزی: خیابان انقلاب بین صبا و فلسطین - پلاک ۹۲۳ - کانون فرهنگی آموزش - تلفن: ۶۴۶۳-۰۲۱

حسابان ۲

۸۱- *(کاظم اجلالی)*

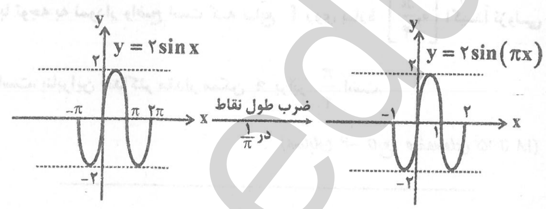
ابتدا توجه کنید که:

$-1<x<0 \Rightarrow [x]=-1 \Rightarrow f(x)=2\sin(-\pi x)=-2\sin \pi x$

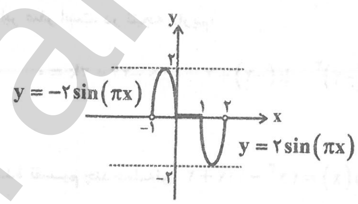
$0\le x<1 \Rightarrow [x]=0 \Rightarrow f(x)=2\sin(0)=0$

$1\le x<2 \Rightarrow [x]=1 \Rightarrow f(x)=2\sin(\pi x)$

از طرف دیگر نمودار تابع $y=2\sin(\pi x)$ به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:



بنابراین نمودار تابع f در بازهٔ $(-1,2)$ به‌صورت زیر است:



(حسابان ۲- تابع، صفحه‌های ۱ تا ۱۲)

۸۲- *(حبیب شفیعی)*

در تابع $y=mf(ax+b)+n$ مقادیر a و b روی برد و مقادیر m و n روی دامنه تأثیر ندارند. اگر برد $y=\frac{1}{2}f(x-2)$ برابر بازهٔ $[-1,2]$ باشد، برد تابع $y=f(x)$ بازهٔ $[-2,4]$ و در نتیجه برد تابع $y=-f(1-2x)$ بازهٔ $[-4,2]$ خواهدبود. برای تعیین دامنهٔ تابع $y=-f(1-2x)$، ابتدا دامنهٔ تابع $y=f(x)$ را به‌دست می‌آوریم:

$-2\le x\le 3 \Rightarrow -4\le x-2\le 1 \Rightarrow D_f=[-4,1]$

$\Rightarrow -4\le 1-2x\le 1 \Rightarrow -5\le -2x\le 0 \Rightarrow 0\le x\le \frac{5}{2}$

$D_{-f(1-2x)}=\left[0,\frac{5}{2}\right]$

بنابراین دامنه و برد تابع $y=-f(1-2x)$ به‌ترتیب بازه‌های $\left[0,\frac{5}{2}\right]$ و $[-4,2]$ و اشتراکشان بازهٔ $[0,2]$ است.

(حسابان ۲- تابع، صفحه‌های ۱ تا ۱۲)

۸۳- *(سیدعادل حسینی)*

فرض می‌کنیم x_i صفر تابع f، x'_i صفر تابع g و n تعداد صفرهای تابع f باشند. داریم:

$x_1+x_2+...+x_n=6 \qquad (*)$

از طرفی، بین صفرهای تابع f و صفرهای تابع g رابطهٔ زیر برقرار است:

$1-\frac{x'_i}{2}=x_i$

حال رابطهٔ (*) به‌صورت زیر تغییر می‌کند:

$$1-\frac{x'_1}{2}+1-\frac{x'_2}{2}+...+1-\frac{x'_n}{2}=n-\frac{(x'_1+x'_2+...+x'_n)}{2}=6$$

مجموع x'_i ها برابر ۴- است: $\Rightarrow n-\frac{-4}{2}=n+2=6 \Rightarrow n=4$

(حسابان ۲- تابع، صفحه‌های ۱ تا ۱۲)

۸۴- *(علی شهرابی)*

اگر تابعی را نسبت به خط $y=x$ قرینه کنیم به ضابطهٔ وارون آن می‌رسیم.

پس اینجا باید وارون تابع $y=\sqrt[3]{x-1}$ را حساب کنیم:

$$y=\sqrt[3]{x-1} \Rightarrow y^3=x-1 \Rightarrow x=y^3+1 \xrightarrow[\text{x و y جای}]{\text{عوض کردن}} y=x^3+1$$

نمودار به‌دست آمده را ۱ واحد به چپ می‌بریم:

$$y=x^3+1 \xrightarrow[\text{x+1 می‌گذاریم}]{\text{جای x ها،}} y=(x+1)^3+1$$

و در راستای افقی با ضریب ۲ آن را منبسط می‌کنیم:

$$y=(x+1)^3+1 \xrightarrow[\frac{x}{2}\text{ می‌گذاریم}]{\text{جای x ها،}} y=\left(\frac{x}{2}+1\right)^3+1$$

حال ضابطهٔ به‌دست آمده را با خط $y=1$ قطع می‌دهیم:

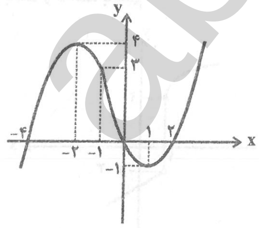
$$\left(\frac{x}{2}+1\right)^3+1=1 \Rightarrow \frac{x}{2}+1=0 \Rightarrow x=-2$$

(حسابان ۲- تابع، صفحه‌های ۱ تا ۱۴)

۸۵- *(علی شهرابی)*

تابع f را دو ضابطه‌ای می‌نویسیم و آن را رسم می‌کنیم:

$$f(x)=x|x+1|-3x=\begin{cases}x^2-2x & ;x\ge -1\\ -x^2-4x & ;x<-1\end{cases}$$



تابع f روی بازهٔ $[-2,1]$ نزولی است. پس داریم:

$\max(b-a)=1-(-2)=3$

(حسابان ۲- تابع، صفحه‌های ۱۵ تا ۱۸)

-۸۶ (سیدعادل حسینی)

راه‌حل اول:

$$f(2x-1)=2^{5-(2x-1)}=2^{6-2x}$$

$$f(x+2)=2^{5-(x+2)}=2^{3-x}$$

بنابراین باید نامعادلهٔ $2^{6-2x}\ge 2^{3-x}$ را حل کنیم. حال چون تابع $y=2^x$ اکیداً صعودی است، کافی است نامعادلهٔ $6-2x\ge 3-x$ را حل کنیم.

$$6-2x\ge 3-x\Rightarrow x\le 3\Rightarrow x\in(-\infty,3]$$

این بازه شامل سه عدد طبیعی ۱، ۲ و ۳ است.

راه حل دوم:

$$f(x)=2^{5-x}=2^5\times 2^{-x}=32\left(\frac{1}{2}\right)^x$$

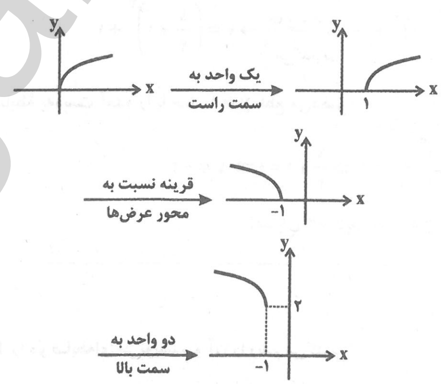
تابع f نزولی است، پس داریم:

$$f(2x-1)\ge f(x+2)\Rightarrow 2x-1\le x+2\Rightarrow x\le 3$$

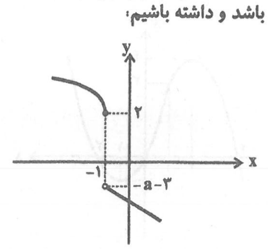
(حسابان ۲- تابع، صفحه‌های ۱۵ تا ۱۸)

-۸۷ (حبیب شفیعی)

ابتدا به کمک نمودار $y=\sqrt{x}$، نمودار تابع $y=\sqrt{-x-1}+2$ را رسم می‌کنیم:



با توجه به نمودار، برای این‌که تابع اکیداً نزولی باشد، باید شیب خط $y=ax-3$ منفی باشد و داشته باشیم:



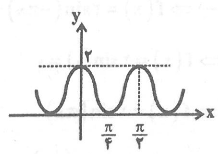
$$-a-3\le 2\Rightarrow -a\le 5\Rightarrow a\ge -5\xrightarrow{a<0}-5\le a<0$$

(حسابان ۲- تابع، صفحه‌های ۱۵ تا ۱۸)

-۸۸ (کاظم اجلالی)

$$f(x)=2\cos^2 2x=\cos 4x+1$$

حال اگر نمودار تابع $y=\cos x$ را یک واحد به بالا انتقال دهیم و طول نقاط آن را بر ۴ تقسیم کنیم، نمودار تابع f به‌دست می‌آید.



با توجه به نمودار واضح است که تابع f روی بازهٔ $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$ اکیداً نزولی است، بنابراین حداکثر مقدار ممکن a برابر $\frac{\pi}{4}$ است.

(حسابان ۲- تابع، صفحه‌های ۱۵ تا ۱۸)

-۸۹ (سیدعادل حسینی)

چندجمله‌ای موردنظر بر $x+2$ بخش‌پذیر است، یعنی مقدار آن به ازای $x=-2$ برابر صفر است. در نتیجه داریم:

$$p(-2)=3(-2)^3-k(-2)+2=0\Rightarrow -22+2k=0$$

$$\Rightarrow k=11$$

حال باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $p(x)=3x^3-11x+2$ بر عبارت $x+1$، برابر است با مقدار آن به ازای $x=-1$. داریم:

$$r=p(-1)=3(-1)^3-11(-1)+2=10$$

(حسابان ۲- تابع، صفحه‌های ۱۸ تا ۲۲)

-۹۰ (حبیب شفیعی)

می‌دانیم اگر n یک عدد طبیعی زوج باشد، اتحاد $x^n-a^n=(x+a)\left(x^{n-1}-ax^{n-2}+a^2x^{n-3}-\dots-a^{n-1}\right)$ همواره برقرار است. بنابراین داریم:

$$x^{18}-1=\left((x^3)^6-1\right)$$

$$=(x^3+1)\left((x^3)^5-(x^3)^4+(x^3)^3-(x^3)^2+x^3-1\right)$$

$$\Rightarrow f(x)=x^{15}-x^{12}+x^9-x^6+x^3-1$$

حال برای تعیین باقی‌ماندهٔ تقسیم $f(x)$ بر $3x+3$، کافی است ریشهٔ معادلهٔ $3x+3=0$ را در چندجمله‌ای $f(x)$ قرار دهیم:

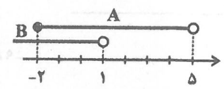
$$3x+3=0\Rightarrow x=-1\Rightarrow f(-1)=-1-1-1-1-1-1=-6$$

(حسابان ۲- تابع، صفحهٔ ۲۰)

ریاضی پایه

۹۱- (حمید علیزاده)

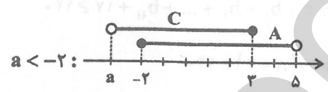
با رسم بازه‌های مورد نظر روی محور اعداد حقیقی داریم:



$$\Rightarrow B-A=(-\infty,-2)$$

حال برای دو حالت $a<-2$ و $a\geq -2$ حاصل مجموعهٔ $(B-A)\cap(A\cup C)$ را به‌دست می‌آوریم:

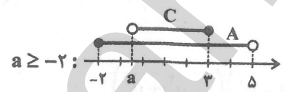
$a<-2:$



$$\Rightarrow A\cup C=(a,5)\Rightarrow (B-A)\cap(A\cup C)=(a,-2)$$

$$\xrightarrow[\text{صورت سؤال}]{\text{با توجه به}} a=-4$$

$a\geq -2:$



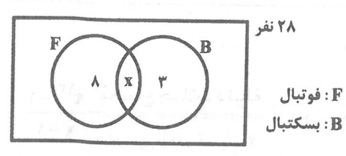
$$\Rightarrow A\cup C=[-2,5)\Rightarrow (B-A)\cap(A\cup C)=\varnothing$$

که با شکل داده شده تناقض دارد.

(ریاضی ۱- مجموعه، الگو و دنباله، صفحه‌های ۲ تا ۷)

۹۲- (عرفان صادقی)

نمودار ون زیر مربوط به این کلاس است.



داریم:

$$\begin{cases} n(B)=x+3 \\ n(F)=x+8 \end{cases}\xrightarrow{n(F)=2n(B)} x+8=2(x+3)\Rightarrow x=2$$

حال با فرض اینکه U مجموعهٔ کل کلاس باشد، داریم:

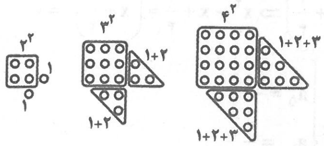
$$n\left((F\cup B)'\right)=n(U)-n(F\cup B)=28-13=15$$

بنابراین ۱۵ نفر عضو هیچ‌کدام از دو تیم نیستند.

(ریاضی ۱- مجموعه، الگو و دنباله، صفحه‌های ۸ تا ۱۳)

۹۳- (علی شهرابی)

اگر به الگوی داده شده به‌صورت زیر نگاه کنیم، جملهٔ عمومی آن را می‌توانیم به سادگی بنویسیم:



یعنی شکل nاُم از یک مربع $n+1$ در $n+1$ و از دو مثلث که تعداد دایره‌های هر کدام برابر با جمع اعداد از ۱ تا n است، تشکیل شده است.

بنابراین جمع تعداد دایره‌های دو مثلث برابر است با:

$$2\times\frac{n(n+1)}{2}=n^2+n$$

پس تعداد کل دایره‌های شکل nاُم برابر است با:

$$a_n=(n+1)^2+n^2+n\Rightarrow a_n=2n^2+3n+1$$

$$\Rightarrow a_{13}=2(13)^2+3(13)+1=338+40=378$$

(ریاضی ۱- مجموعه، الگو و دنباله، صفحه‌های ۱۴ تا ۲۰)

۹۴- (کاظم اجلالی)

اگر طول ضلع مربع را a در نظر بگیریم، محیط آن $4a$ و مساحت آن a^2 خواهد بود. بنابراین حالت‌های زیر را باید بررسی کنیم:

- اگر a واسطهٔ حسابی a^2 و $4a$ باشد، داریم:

$$2a=4a+a^2\Rightarrow\begin{cases} a=0 & \text{غ.ق.ق} \\ a=-2 & \text{غ.ق.ق} \end{cases}$$

- اگر a^2 واسطهٔ حسابی a و $4a$ باشد، داریم:

$$2a^2=a+4a\Rightarrow a=\frac{5}{2}$$

- اگر $4a$ واسطهٔ حسابی a و a^2 باشد، داریم:

$$8a=a+a^2\Rightarrow a=7$$

بنابراین مجموع مقادیر ممکن برای a برابر $7+\frac{5}{2}=\frac{19}{2}$ است.

(ریاضی ۱- مجموعه، الگو و دنباله، صفحه‌های ۲۱ تا ۲۴)

۹۵- (حمید علیزاده)

چون فاصلهٔ جملات پنجم تا دهم با فاصلهٔ جملات دهم تا پانزدهم برابر است، باید رابطهٔ مقابل برقرار باشد: $a_{10}^2 = a_5 . a_{15}$

بنابراین داریم: $x^2 = -\left(-x+\frac{1}{4}\right) \Rightarrow x^2 - x + \frac{1}{4} = \left(x-\frac{1}{2}\right)^2 = 0$

$$\Rightarrow x=\frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} a_5=-1\\ a_{10}=\frac{1}{2} \\ a_{15} = -\frac{1}{4}\end{cases}$$

حال اگر قدر نسبت دنباله را q در نظر بگیریم، داریم:

$$\frac{a_{10}}{a_5} = \frac{a_1q^9}{a_1q^4} = q^5 = -\frac{1}{2} \Rightarrow q = -\sqrt[5]{\frac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow a_{55} = a_1q^{54} = \left(a_1q^4\right)q^{50} = a_5q^{50}$$

$$= (-1)\left(-\sqrt[5]{\frac{1}{2}}\right)^{50} = -\left(\frac{1}{2}\right)^{10} = \frac{-1}{2^{10}} = -\frac{1}{1024}$$

(ریاضی ۱- مجموعه، الگو و دنباله، صفحه‌های ۲۵ و ۲۶)

۹۶- (سیدعادل حسینی)

دنبالهٔ a_n را حسابی و دنبالهٔ b_n را هندسی در نظر می‌گیریم. با فرض اینکه d قدرنسبت دنبالهٔ حسابی باشد، داریم:

$$b_1 = a_1 = 2$$

$$b_2 = 3a_3 = 3(a_1+2d) = 6+6d$$

$$b_3 = 10a_5 = 10(a_1+4d) = 20+40d$$

باید رابطهٔ $b_2^2 = b_1b_3$ برقرار باشد.

$$\Rightarrow 2(20+40d) = (6+6d)^2$$

$$\Rightarrow 40+80d = 36+72d+36d^2$$

$$\Rightarrow 36d^2 - 8d - 4 = 0$$

معادلهٔ فوق دارای دو جواب خواهد بود که مجموع آن برابر است با:

$$-\left(-\frac{8}{36}\right) = \frac{2}{9}$$

(ریاضی ۱- مجموعه، الگو و دنباله، صفحه‌های ۲۱ تا ۲۷)

۹۷- (حمید علیزاده)

تعداد صندلی‌های هر ردیف، تشکیل دنباله‌ای حسابی با جملهٔ اول $a_1 = 6$ و قدرنسبت $d = 4$ تشکیل می‌دهند؛ زیرا: $d = a_2 - a_1 = 10-6 = 4$

حال برای مجموع n ردیف صندلی‌های سالن داریم:

$$S_n = \frac{n}{2}\left(2a_1+(n-1)d\right) = \frac{n}{2}(12+4n-4) = 2n^2+4n$$

$$S_n = 2n^2+4n = 880 \Rightarrow n^2+2n-440 = (n+22)(n-20) = 0$$

$$\xrightarrow{n\ge1} n = 20$$

این سالن باید ۲۰ ردیف داشته باشد.

(حسابان ۱- جبر و معادله، صفحه‌های ۱ تا ۶)

۹۸- (سعید علم‌پور)

اعداد ۳، ۱۷ و n واسطهٔ آن‌ها به‌صورت زیر هستند.

$$3, \underbrace{b_1, b_2, ..., b_n}_{n \text{ واسطهٔ حسابی}}, 17$$

$$b_1+b_2+...+b_n \ge 120 \Rightarrow 3+b_1+b_2+...+b_n+17 \ge 140$$

$$\Rightarrow \frac{n+2}{2}(3+17) \ge 140 \Rightarrow 10(n+2) \ge 140$$

$$\Rightarrow n+2 \ge 14 \Rightarrow n \ge 12$$

(حسابان ۱- جبر و معادله، صفحه‌های ۱ تا ۶)

۹۹- (میلاد سبحانی‌لاریجانی)

$$\frac{S_6}{S_2} = \frac{\frac{a_1\left(1-q^6\right)}{1-q}}{\frac{a_1\left(1-q^2\right)}{1-q}} = \frac{1-q^6}{1-q^2} = \frac{\left(1-q^2\right)\left(1+q^2+q^4\right)}{1-q^2} = 7$$

$$\Rightarrow 1+q^2+q^4 = 7 \xrightarrow{q^2=t} t^2+t+1 = 7$$

$$\Rightarrow t^2+t-6 = (t+3)(t-2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} t=2 \\ t=-3 \; \text{غ.ق.ق} \end{cases}$$

$$\Rightarrow q^2 = 2 \xrightarrow{q>0} q = \sqrt{2}$$

(حسابان ۱- جبر و معادله، صفحه‌های ۱ تا ۶)

۱۰۰- (میلاد منصوری)

$$1+x+x^2+...+x^{11} \xrightarrow[\text{هندسی با قدر نسبت } x]{\text{مجموع جملات دنبالهٔ}} \frac{x^{12}-1}{x-1}$$

$$1+x^3+x^6+x^9 \xrightarrow[\text{هندسی با قدر نسبت } x^3]{\text{مجموع جملات دنبالهٔ}} \frac{x^{12}-1}{x^3-1}$$

$$\Rightarrow T = \frac{\frac{x^{12}-1}{x-1}}{\frac{x^{12}-1}{x^3-1}} = \frac{x^3-1}{x-1} = \frac{(x-1)\left(x^2+x+1\right)}{(x-1)} = x^2+x+1$$

یعنی باید مقدار $\alpha^2+\alpha+1$ را حساب کنیم.

α ریشهٔ معادلهٔ $x^2+x-5=0$ و در نتیجه $\alpha^2+\alpha=5$ است.

$$\Rightarrow T = \alpha^2+\alpha+1 = 5+1 = 6$$

(حسابان ۱- جبر و معادله، صفحه‌های ۱ تا ۶)

هندسه ۳

۱۰۱- *(محمد خنداران)*

$$AB=\begin{bmatrix}۲ & ۴ & -۱\\ ۱ & -۲ & ۲\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۴ & ۲\\ ۰ & -۲\\ ۳ & x\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۵ & -x-۴\\ ۱۰ & ۲x+۶\end{bmatrix}$$

ماتریس AB در صورتی وارون‌پذیر نیست که دترمینان آن برابر صفر باشد. داریم:

$$|AB|=۵(۲x+۶)-۱۰(-x-۴)=۲۰x+۷۰=۰\Rightarrow x=\frac{-۷}{۲}$$

بنابراین ماتریس AB تنها به‌ازای یک مقدار x، وارون‌پذیر نیست.

(هندسه ۳- ماتریس و کاربردها، صفحه‌های ۱۷ تا ۲۳)

۱۰۲- *(امیرحسین ابومحبوب)*

در یک ماتریس قطری، تمام درایه‌های خارج قطر اصلی برابر صفر هستند.

اگر $a_{ij}=\left[\frac{i+j}{۳}\right]-۱$ باشد، آنگاه داریم:

$$a_{۱۲}=a_{۲۱}=\left[\frac{۳}{۳}\right]-۱=۱-۱=۰$$

$$a_{۱۳}=a_{۳۱}=\left[\frac{۴}{۳}\right]-۱=۱-۱=۰$$

$$a_{۲۳}=a_{۳۲}=\left[\frac{۵}{۳}\right]-۱=۱-۱=۰$$

بنابراین ماتریس A در این حالت قطری است. به‌ازای سایر تعریف‌های a_{ij}، حداقل یکی از درایه‌های خارج قطر اصلی مخالف صفر خواهد بود.

(هندسه ۳- ماتریس و کاربردها، صفحه‌های ۱۰ تا ۱۲)

۱۰۳- *(محمد هجری)*

گزارهٔ «الف»: اگر $A=kI$ و $B=\frac{۱}{k}(AB)$ باشد، آنگاه به ازای همهٔ مقادیر حقیقی غیرصفر k، A و B وجود دارد. (درست)

گزارهٔ «ب»: برای ماتریس $A^۲$، اگر A جواب باشد، آنگاه $(-A)$ هم جواب است. (نادرست)

گزارهٔ «پ»: به عنوان مثال نقض، ماتریس‌های $A=\begin{bmatrix}۲ & ۱\\ -۴ & ۲\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}۱ & ۱\\ ۲ & -۲\end{bmatrix}$ را در نظر بگیرید. داریم:

$$AB=\begin{bmatrix}۲ & ۱\\ -۴ & ۲\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱ & ۱\\ ۲ & -۲\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۴ & ۰\\ ۰ & -۸\end{bmatrix}$$

$$BA=\begin{bmatrix}۱ & ۱\\ ۲ & -۲\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۲ & ۱\\ -۴ & ۲\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-۲ & ۳\\ ۱۲ & -۲\end{bmatrix}$$

بنابراین گزارهٔ مورد نظر نادرست است.

(هندسه ۳- ماتریس و کاربردها، صفحه‌های ۱۷ تا ۲۱)

۱۰۴- *(محمدمهدی ابوترابی)*

اگر $A=\begin{bmatrix}a & ۲\\ b & -۵\end{bmatrix}$، $X=\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}۴\\ ۷\end{bmatrix}$ باشد، آنگاه داریم:

$$A^{-۱}=\frac{۱}{|A|}\begin{bmatrix}-۵ & -۲\\ -b & a\end{bmatrix}\xrightarrow{|A|=۱۷}A^{-۱}=\frac{۱}{۱۷}\begin{bmatrix}-۵ & -۲\\ -b & a\end{bmatrix}$$

$$X=A^{-۱}B=\frac{۱}{۱۷}\begin{bmatrix}-۵ & -۲\\ -b & a\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۴\\ ۷\end{bmatrix}=\frac{۱}{۱۷}\begin{bmatrix}-۳۴\\ -۴b+۷a\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-۲\\ \frac{۷a-۴b}{۱۷}\end{bmatrix}\Rightarrow x=-۲$$

(هندسه ۳- ماتریس و کاربردها، صفحه‌های ۲۲ تا ۲۶)

۱۰۵- *(محمد خنداران)*

شرط وجود بی‌شمار جواب برای معادلهٔ ماتریسی $\begin{bmatrix}a & b\\ a' & b'\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}c\\ c'\end{bmatrix}$، آن است که $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}$ باشد. داریم:

$$\frac{m+۱}{۱}=\frac{۳}{m-۱}\Rightarrow m^۲-۱=۳\Rightarrow m^۲=۴\Rightarrow m=\pm۲$$

$m=۲\Rightarrow\frac{۳}{۱}=\frac{۳}{۱}\neq\frac{۲}{-۲}$ **دستگاه فاقد جواب است.**

$m=-۲\Rightarrow\frac{-۱}{۱}=\frac{۳}{-۳}=\frac{-۲}{۲}$ **دستگاه بی‌شمار جواب دارد.**

پس تنها به ازای $m=-۲$، دارای بی‌شمار جواب است.

(هندسه ۳- ماتریس و کاربردها، صفحه‌های ۲۳ تا ۲۶)

۱۰۶- (محمدمهدی ابوترابی)

اگر $A=\begin{bmatrix}a&4\\2&b\end{bmatrix}$ ماتریس ضرایب دستگاه باشد، آنگاه داریم:

$$A^{-1}=\frac{1}{ab-8}\begin{bmatrix}b&-4\\-2&a\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3&c\\-2&3\end{bmatrix}\Rightarrow \frac{1}{ab-8}=1$$

بنابراین $c=-4$ است و در نتیجه داریم:

$$\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3&-4\\-2&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}7\\4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5\\-2\end{bmatrix}\Rightarrow \begin{cases}x=5\\y=-2\end{cases}\Rightarrow x+y=3$$

(هندسه ۳- ماتریس و کاربردها، صفحه‌های ۲۲ تا ۲۶)

۱۰۷- (محمد خندان)

دو ماتریس A و B وارون یکدیگرند، پس $AB=BA=I$ است. داریم:

$$(I-A)^2=I^2-2IA+A^2=I-2A+A=I-A$$

به طریق مشابه $(I-B)^2=I-B$ است، در نتیجه تمامی توان‌های هر یک از دو ماتریس $I-A$ و $I-B$ با خود آن ماتریس برابر هستند. بنابراین داریم:

$$(I-A)^6+(I-B)^4+(A+B)^2$$

$$=(I-A)+(I-B)+(A^2+B^2+2AB)$$

$$=2I-A-B+A+B+2I=4I$$

(هندسه ۳- ماتریس و کاربردها، صفحه‌های ۱۷ تا ۲۳)

۱۰۸- (امیرحسین ابومحبوب)

دترمینان ماتریس A مخالف صفر است، پس A وارون‌پذیر است و داریم:

$$A+B=AB\xrightarrow[\text{در } A^{-1} \text{ ضرب می‌کنیم}]{\text{طرفین را از سمت چپ}}A^{-1}A+A^{-1}B=A^{-1}(AB)$$

$$\Rightarrow I+A^{-1}B=B$$

$$\xrightarrow[\text{در } B^{-1} \text{ ضرب می‌کنیم}]{\text{طرفین را از سمت راست}}IB^{-1}+(A^{-1}B)B^{-1}=BB^{-1}$$

$$\Rightarrow B^{-1}+A^{-1}=I\Rightarrow B^{-1}=I-A^{-1}$$

$$A=\begin{bmatrix}2&1\\-1&-1\end{bmatrix}\Rightarrow A^{-1}=\frac{1}{-1}\begin{bmatrix}-1&-1\\1&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1\\-1&-2\end{bmatrix}$$

$$B^{-1}=I-A^{-1}=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1&1\\-1&-2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&-1\\1&3\end{bmatrix}$$

ماتریس B، وارون ماتریس B^{-1} است، بنابراین داریم:

$$B=\frac{1}{0\times3-(-1)\times1}\begin{bmatrix}3&1\\-1&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3&1\\-1&0\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow AB=A+B=\begin{bmatrix}2&1\\-1&-1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}3&1\\-1&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5&2\\-2&-1\end{bmatrix}$$

بنابراین مجموع درایه‌های ماتریس AB، برابر است با:

$$5+2+(-2)+(-1)=4$$

(هندسه ۳- ماتریس و کاربردها، صفحه‌های ۲۲ و ۲۳)

۱۰۹- (محمدمهدی ابوترابی)

دو ماتریس A و I تعویض‌پذیر هستند، پس اتحادهای جبری برای آنها برقرار است و در نتیجه داریم:

$$I-A^4=(I-A^2)(I+A^2)=(I-A)(I+A)(I+A^2)$$

$$\xrightarrow{A^4=\bar{O}}I=(I+A)(I-A)(I+A^2)$$

بنابراین وارون ماتریس $I+A$، به‌صورت $(I-A)(I+A^2)$ است.

داریم: $(I+A)^{-1}=(I-A)(I+A^2)=I-A+A^2-A^3$

(هندسه ۳- ماتریس و کاربردها، صفحه‌های ۱۷ تا ۲۳)

۱۱۰- (امیرحسین ابومحبوب)

اگر دستگاه بیش از یک دسته جواب داشته باشد، به معنای آن است که دارای بی شمار جواب است. در این‌صورت داریم:

$$\frac{m}{3}=\frac{3}{m}=\frac{6}{n^2+5n}$$

$$\frac{m}{3}=\frac{3}{m}\Rightarrow m^2=9\Rightarrow m=\pm3$$

$$m=3\Rightarrow\frac{3}{3}=\frac{3}{3}=\frac{6}{n^2+5n}\Rightarrow n^2+5n=6\Rightarrow n^2+5n-6=0$$

$$\Rightarrow(n+6)(n-1)=0\Rightarrow\begin{cases}n=-6\\n=1\end{cases}$$

$$m=-3\Rightarrow\frac{-3}{3}=\frac{3}{-3}=\frac{6}{n^2+5n}\Rightarrow n^2+5n=-6$$

$$\Rightarrow n^2+5n+6=0\Rightarrow(n+3)(n+2)=0\Rightarrow\begin{cases}n=-3\\n=-2\end{cases}$$

یعنی به ازای $m=3$ و $n=1$ یا $n=-6$ و همین‌طور به ازای $m=-3$ و $n=-3$ یا $n=-2$ دستگاه بی‌شمار جواب دارد، ولی به ازای سایر مقادیر m و n، قطعاً دستگاه جواب منحصربه‌فرد داشته یا فاقد جواب است.

(هندسه ۳- ماتریس و کاربردها، صفحه‌های ۲۳ تا ۲۶)

ریاضیات گسسته

۱۱۱- (علیرضا شریف‌خطیبی)

$$3^4 = 81 \overset{17}{\equiv} -4 \xrightarrow{\text{به‌توان } 3} 3^{12} \overset{17}{\equiv} (-4)^3 \overset{17}{\equiv} -64 \overset{17}{\equiv} -64 + 4\times 17 \overset{17}{\equiv} 4$$

$$\xrightarrow{\times 3^2} 3^{14} \overset{17}{\equiv} 36 \overset{17}{\equiv} 2$$

از طرفی $24!$ مضرب ۱۷ است، پس $24! \overset{17}{\equiv} 0$ و در نتیجه داریم:

$$3^{14} + 24! \overset{17}{\equiv} 2 + 0 \overset{17}{\equiv} 2$$

(ریاضیات گسسته- آشنایی با نظریهٔ اعداد، صفحه‌های ۱۸ تا ۲۱)

۱۱۲- (جواد حاتمی)

$$5^2 \overset{11}{\equiv} 25 \overset{11}{\equiv} 3 \xrightarrow{\times 5} 5^3 \overset{11}{\equiv} 15 \overset{11}{\equiv} 4 \xrightarrow{\text{به توان } 2} 5^6 \overset{11}{\equiv} 16 \overset{11}{\equiv} 5$$

$$\xrightarrow{\text{به توان } 3} 5^{18} \overset{11}{\equiv} 5^3 \overset{11}{\equiv} 4 \Rightarrow 5^{18} + a \overset{11}{\equiv} 4 + a$$

بنابراین $4 + a$ باید مضرب ۱۱ باشد که در نتیجه کمترین مقدار طبیعی a، برابر $11 - 4 = 7$ است.

(ریاضیات گسسته- آشنایی با نظریهٔ اعداد، صفحه‌های ۱۸ تا ۲۱)

۱۱۳- (محمد هجری)

گزارهٔ «الف» در حالت کلی درست نیست، چون اگر $a = 0$ باشد، آنگاه $a(b+c) = 0$ و در نتیجه گویا است.

گزارهٔ «ب» نادرست است، چون وارون عدد گنگ c، عددی گنگ است و در نتیجه حاصل‌ضرب آن در عدد گویای غیر صفر b، عددی گنگ است، یعنی $b \times \frac{1}{c} = \frac{b}{c}$ به مجموعهٔ اعداد گویا تعلق ندارد.

گزارهٔ «پ» در حالت کلی درست نیست. به عنوان مثال نقض داریم:

$$\left.\begin{matrix} c = 2^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \\ d = \sqrt{2} \end{matrix}\right\} \Rightarrow c^d = \left(2^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\right)^{\sqrt{2}} = 2^{\frac{1}{\sqrt{2}} \times \sqrt{2}} = 2^1 \in \mathbb{Q}$$

(ریاضیات گسسته- آشنایی با نظریهٔ اعداد، صفحه‌های ۲ تا ۶)

۱۱۴- (امیرحسین ابومحبوب)

طبق قضیهٔ تقسیم داریم:

$$a = bq + r \xrightarrow[r=20]{a=b+128} b + 128 = bq + 20 \Rightarrow b(q-1) = 108$$

از طرفی در عمل تقسیم، همواره $0 \le r < b$ است، پس $b > 20$ و در نتیجه یکی از حالت‌های زیر امکان‌پذیر است:

$$b(q-1) = 108 = 108 \times 1 = 54 \times 2 = 36 \times 3 = 27 \times 4$$

بنابراین حداکثر مقدار خارج قسمت در این تقسیم، به‌ازای $b = 27$ حاصل می‌شود. داریم:

$$b(q-1) = 27 \times 4 \Rightarrow \begin{cases} b = 27 \\ q - 1 = 4 \Rightarrow q = 5 \end{cases}$$

(ریاضیات گسسته- آشنایی با نظریهٔ اعداد، صفحه‌های ۱۴ و ۱۵)

۱۱۵- (مهرداد ملوندی)

اگر باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد a بر ۱۵، برابر r باشد، آنگاه داریم:

$$a = 15q + r \xrightarrow{\times(-1)} -a = -15q - r = -15q - 15 + 15 - r$$

$$\Rightarrow -a = 15(-q-1) + 15 - r$$

بنابراین باقی ماندهٔ تقسیم عدد $(-a)$ بر ۱۵، برابر $15 - r$ است. با توجه به فرض مسئله داریم:

$$r - (15 - r) = 1 \Rightarrow 2r - 15 = 1 \Rightarrow 2r = 16 \Rightarrow r = 8$$

$$\Rightarrow a = 15q + 8$$

بزرگ‌ترین عدد دو رقمی a به ازای $q = 6$ حاصل می‌شود:

$$a_{max} = 15 \times 6 + 8 = 98 \Rightarrow \text{مجموع ارقام} = 9 + 8 = 17$$

(ریاضیات گسسته- آشنایی با نظریهٔ اعداد، صفحه‌های ۱۴ و ۱۵)

۱۱۶- (محمدعلی نادرپور)

طبق قضیهٔ تقسیم داریم:

$$\begin{cases} 6a + 35 = aq + 2r \\ 3a + 12 = aq' + r \end{cases}$$

$$6a + 35 - 2(3a + 12) = aq + 2r - 2(aq' + r)$$

$$\Rightarrow 11 = a(q - 2q') \Rightarrow a \mid 11 \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ a = 11 \end{cases}$$

اگر $a = 1$، آنگاه $0 \le r < 1$ است، بنابراین r قطعاً برابر صفر می‌باشد که مخالف فرض است، پس تنها مقدار ممکن برای a، برابر ۱۱ است.

(ریاضیات گسسته- آشنایی با نظریهٔ اعداد، صفحه‌های ۱۴ و ۱۵)

۱۱۷- (امیرحسین ابومحبوب)

طبق ویژگی‌های هم‌نهشتی داریم:

$$a \overset{75}{\equiv} 2b \xrightarrow{15|75} a \overset{15}{\equiv} 2b \qquad (1)$$

$$b \overset{120}{\equiv} 3 \xrightarrow{15|120} b \overset{15}{\equiv} 3 \xrightarrow{\times 2} 2b \overset{15}{\equiv} 6 \qquad (2)$$

$$(1),(2) \Rightarrow a \overset{15}{\equiv} 6 \Rightarrow a = 15k+6 \quad (k \in \mathbb{Z})$$

در بین اعداد داده شده تنها عدد ۳۶ دارای شرایط موردنظر است.

(ریاضیات گسسته- آشنایی با نظریهٔ اعداد، صفحه‌های ۱۸ تا ۲۱)

۱۱۸- (امیرحسین ابومحبوب)

$$18a \overset{45}{\equiv} 30b \xrightarrow[(45,6)=3]{\div 6} 3a \overset{\frac{45}{3}}{\equiv} 5b \Rightarrow 3a \overset{15}{\equiv} 5b$$

گزینهٔ «۱»:

$$3a \overset{15}{\equiv} 5b \xrightarrow{5|15} 3a \overset{5}{\equiv} 5b \overset{5}{\equiv} 0 \xrightarrow[(3,5)=1]{\div 3} a \overset{5}{\equiv} 0 \Rightarrow 5|a$$

گزینهٔ «۲»:

$$3a \overset{15}{\equiv} 5b \xrightarrow{3|15} 5b \overset{3}{\equiv} 3a \overset{3}{\equiv} 0 \xrightarrow[(5,3)=1]{\div 5} b \overset{3}{\equiv} 0 \Rightarrow 3|b$$

گزینهٔ «۳»:

$$\left.\begin{array}{l} 5|a \xrightarrow{\times 3} 15|3a \Rightarrow 3a \overset{15}{\equiv} 0 \\ 3a \overset{15}{\equiv} 5b \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{جمع}} 6a \overset{15}{\equiv} 5b$$

رابطهٔ هم‌نهشتی گزینهٔ «۴» در حالت کلی از رابطهٔ $18a \overset{45}{\equiv} 30b$ قابل نتیجه‌گیری نیست.

(ریاضیات گسسته- آشنایی با نظریهٔ اعداد، صفحه‌های ۱۸ تا ۲۲)

۱۱۹- (سیدعادل‌رضا مرتضوی)

$$8y - x^2 - 4x - 11 = 0 \Rightarrow y = \frac{x^2+4x+11}{8}$$

اگر x عددی زوج باشد، آنگاه x^2 و $4x$ اعدادی زوج و در نتیجه $x^2+4x+11$ عددی فرد است، پس بر ۸ بخش‌پذیر نمی‌باشد و در نتیجه به ازای هر x زوج، y عددی صحیح نیست.

اگر x عددی فرد باشد، آنگاه $x = 2k+1$ و $x^2 = 8k'+1$ است $(k,k' \in \mathbb{Z})$، بنابراین داریم:

$$y = \frac{(8k'+1)+4(2k+1)+11}{8} = \frac{8k'+8k+16}{8} = k+k'+2$$

یعنی به ازای هر x فرد، y عددی صحیح است، پس بی‌شمار نقطه با مختصات صحیح بر روی این منحنی وجود دارد.

(ریاضیات گسسته- آشنایی با نظریهٔ اعداد، صفحه‌های ۹ تا ۱۲)

۱۲۰- (مجید محمدی‌نویسی)

اگر $a^2-3a+2 \overset{6}{\equiv} 0$، آنگاه $(a-1)(a-2) = 6q \ (q \in \mathbb{Z})$ است، بنابراین یکی از حالت‌های زیر امکان‌پذیر است: $(k,k' \in \mathbb{Z})$

$$1)\ a-1 = 6k \Rightarrow a = 6k+1 \Rightarrow a \in [1]_6$$

$$2)\ a-2 = 6k \Rightarrow a = 6k+2 \Rightarrow a \in [2]_6$$

$$3)\left\{\begin{array}{l} a-1 = 2k \Rightarrow a = 2k+1 \xrightarrow{\times 3} 3a = 6k+3 \\ a-2 = 3k' \Rightarrow a = 3k'+2 \xrightarrow{\times 2} 2a = 6k'+4 \end{array}\right.$$

$$\xrightarrow{\text{تفاضل}} a = 6(k-k')-1 \Rightarrow a = 6k''+5 \ (k'' \in \mathbb{Z})$$

$$\Rightarrow a \in [5]_6$$

$$4)\left\{\begin{array}{l} a-1 = 3k \Rightarrow a = 3k+1 \xrightarrow{\times 2} 2a = 6k+2 \\ a-2 = 2k' \Rightarrow a = 2k'+2 \xrightarrow{\times 3} 3a = 6k'+6 \end{array}\right.$$

$$\xrightarrow{\text{تفاضل}} a = 6(k'-k)+4 \Rightarrow a = 6k''+4 \ (k'' \in \mathbb{Z})$$

$$\Rightarrow a \in [4]_6$$

بنابراین a به یکی از ۴ کلاس هم‌نهشتی $[1]_6$، $[2]_6$، $[4]_6$ و $[5]_6$ تعلق دارد.

(ریاضیات گسسته- آشنایی با نظریهٔ اعداد، صفحه‌های ۱۸ و ۱۹)

ریاضیات گسسته (آزمون گواه)

۱۲۱- (سؤال ۷۸۵ کتاب آبی)

گزینهٔ «۱»: اگر $y=0$ باشد، عکس گزاره برقرار نیست، چون در این صورت $\frac{x}{y}$ تعریف نشده است.

گزینهٔ «۳»: به عنوان مثال نقض، اگر $x=1$ و $y=-2$ باشد، آنگاه $x>y$ ولی $x^2<y^2$ است.

گزینهٔ «۴»: به عنوان مثال نقض، اگر $x=1$ و $y=-1$ باشد، آنگاه $x>y$ ولی $\frac{1}{x}>\frac{1}{y}$ است.

با ضرب یا تقسیم دو طرف یک نامساوی در یک عدد مثبت، جهت نامساوی تغییر نمی‌کند و در گزینهٔ «۲» y^2 عددی مثبت است. پس می‌توان قضیه را به‌صورت دوشرطی نوشت.

(ریاضیات گسسته- آشنایی با نظریهٔ اعداد، صفحه‌های ۶ تا ۸)

۱۲۲- (سؤال ۷۹۰ کتاب آبی)

$$a^2c^2+a^2d^2+b^2c^2+b^2d^2 \ge a^2c^2+b^2d^2+2acbd$$

$$\Leftrightarrow a^2d^2-2acbd+b^2c^2 \ge 0 \Leftrightarrow (ad-bc)^2 \ge 0$$

(ریاضیات گسسته- آشنایی با نظریهٔ اعداد، صفحه‌های ۶ تا ۸)

۱۲۳- (سؤال ۸۰۱ کتاب آبی)

$$n^2 \mid 7n-12 \qquad (1)$$

$$21n-36 \mid n^2 \Rightarrow 3(7n-12) \mid n^2 \Rightarrow 7n-12 \mid n^2 \qquad (2)$$

اگر $n^2=a$ و $7n-12=b$ را در نظر بگیریم، از روابط (۱) و (۲) داریم:

$$\left.\begin{array}{l} a \mid b,\ b \mid a \Rightarrow a=\mp b \\ 3b \mid a \end{array}\right\} \Rightarrow 3b \mid \pm b \Rightarrow 3 \mid \pm 1$$ غیرممکن

پس به ازای هیچ عدد صحیح n، هر دو رابطه هم‌زمان برقرار نیستند.

(ریاضیات گسسته- آشنایی با نظریهٔ اعداد، صفحه‌های ۹ تا ۱۲)

۱۲۴- (سؤال ۸۲۵ کتاب آبی)

$$3a \mid 6a \Rightarrow (3a,6a)=3a$$

$$2a \mid 6a^2 \Rightarrow [2a,6a^2]=6a^2$$

از طرفی $3a \mid 6a^2$، پس $[3a,6a^2]$ برابر با $6a^2$ خواهد شد، در نتیجه داریم:

$$30 \mid 6a^2 \xrightarrow{\div 6} 5 \mid a^2 \Rightarrow a=5k \Rightarrow 1 \le 5k \le 100$$

$\xrightarrow{k\in\mathbb{Z}} 1 \le k \le 20 \Rightarrow$ ۲۰ مقدار برای k یافت می‌شود.

(ریاضیات گسسته- آشنایی با نظریهٔ اعداد، صفحه‌های ۹ تا ۱۴)

۱۲۵- (سراسری ریاضی - ۸۷)

$$\left.\begin{array}{l} 165=bq+r \xrightarrow{q=r^2} 165=r(br+1) \quad (*) \\ 0 \le r < b \Rightarrow br > r^2 \Rightarrow br+1 > r^2 \end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow 165 > r(r^2)=r^3 \Rightarrow r < \sqrt[3]{165} \Rightarrow r \le 5 \quad (**)$$

با توجه به روابط (*) و (**) و این‌که $165=3\times5\times11$، داریم:

$$r=5 \xrightarrow{(*)} 33=5b+1 \Rightarrow 5b=32$$

$$\Rightarrow b=\frac{32}{5} \notin \mathbb{N}$$ (غ ق ق)

$$r=3 \xrightarrow{(*)} 55=3b+1 \Rightarrow 3b=54$$

$$\Rightarrow b=18>r=3$$ (ق ق)

$$r=1 \xrightarrow{(*)} 165=b+1 \Rightarrow b=164>r=1$$ (ق ق)

(ریاضیات گسسته- آشنایی با نظریهٔ اعداد، صفحه‌های ۱۴ و ۱۵)

-۱۲۶ (سؤال ۸۴۴ کتاب آبی)

اگر اعداد صحیح را بر ۵ تقسیم کنیم می‌دانیم یکی از ۵ حالت $5k$، $5k+1$، $5k+2$، $5k+3$ و $5k+4$ را خواهند داشت که شکل دیگر $5k+3$، $5k-2$ و شکل دیگر $5k+4$، $5k-1$ خواهد بود. بنابراین داریم:

$$a=5k \Rightarrow a^2=25k^2 \Rightarrow a^2=5(5k^2) \Rightarrow a^2=5k'$$

$$a=5k\pm1 \Rightarrow a^2=25k^2\pm10k+1$$

$$\Rightarrow a^2=5(5k^2\pm2k)+1 \Rightarrow a^2=5k'+1$$

$$a=5k\pm2 \Rightarrow a^2=25k^2\pm20k+4$$

$$\Rightarrow a^2=5(5k^2\pm4k)+4 \Rightarrow a^2=5k'+4=5k''-1$$

(ریاضیات گسسته- آشنایی با نظریهٔ اعداد، صفحه‌های ۱۵ و ۱۶)

-۱۲۷ (سراسری ریاضی خارج از کشور - ۹۲)

ابتدا توانی از ۷ را پیدا می‌کنیم که اختلاف آن با ۴۳ یا مضارب آن کم باشد.

$$7^2 \overset{43}{\equiv} 49 \overset{43}{\equiv} 6 \xrightarrow{\times 7} 7^3 \overset{43}{\equiv} 42 \overset{43}{\equiv} -1$$

$$\xrightarrow{\text{به‌توان } \left[\frac{54}{3}\right]=18} 7^{54} \overset{43}{\equiv} 1 \xrightarrow{\times 13} 13\times7^{54} \overset{43}{\equiv} 13$$

$$\xrightarrow{+A} 13\times7^{54}+A \overset{43}{\equiv} A+13 \overset{43}{\equiv} 0$$

پس کم‌ترین مقدار A برای آن‌که $A+13$ مضرب ۴۳ باشد، عدد ۳۰ می‌باشد.

(ریاضیات گسسته- آشنایی با نظریهٔ اعداد، صفحه‌های ۱۸ تا ۲۱)

-۱۲۸ (سراسری ریاضی - ۸۸)

روش اول:

$$ac \overset{m}{\equiv} bc \xrightarrow[(m,c)=d]{\div c} a \overset{\frac{m}{d}}{\equiv} b$$

گزینهٔ «۴»:

$$36a \overset{84}{\equiv} 192 \xrightarrow[(84,12)=12]{\div 12} 3a \overset{\frac{84}{12}}{\equiv} 16 \Rightarrow 3a \overset{7}{\equiv} 16 \Rightarrow 3a \overset{7}{\equiv} 2$$

گزینهٔ «۱»: $3a \overset{7}{\equiv} 2 \overset{7}{\equiv} 2+7 \overset{7}{\equiv} 9 \xrightarrow[(7,3)=1]{\div 3} a \overset{7}{\equiv} 3$

گزینهٔ «۳»: $a \overset{7}{\equiv} 3 \xrightarrow{\times 2} 2a \overset{7}{\equiv} 6 \overset{7}{\equiv} -1$

روش دوم: با توجه به آن‌که در تمام گزینه‌ها پیمانه‌ها یکسان است بدون توجه به‌صورت سؤال گزینه‌ها را ساده کرده و با یکدیگر مقایسه می‌کنیم تا گزینهٔ متفاوت پیدا شود.

۱) $a \overset{7}{\equiv} 3$

۲) $a \overset{7}{\equiv} 4$

۳) $2a \overset{7}{\equiv} -1 \overset{7}{\equiv} -1+7 \overset{7}{\equiv} 6 \xrightarrow[(7,2)=1]{\div 2} a \overset{7}{\equiv} 3$

۴) $3a \overset{7}{\equiv} 2 \overset{7}{\equiv} 2+7 \overset{7}{\equiv} 9 \xrightarrow[(7,3)=1]{\div 3} a \overset{7}{\equiv} 3$

که به سادگی متوجه می‌شویم گزینهٔ «۲» با سایر گزینه‌ها متفاوت است.

(ریاضیات گسسته- آشنایی با نظریهٔ اعداد، صفحه‌های ۱۸ تا ۲۲)

-۱۲۹ (سراسری ریاضی - ۹۵)

$$\begin{cases} N=31q+26 \Rightarrow N \overset{31}{\equiv} 26 \\ N=43r+r=44r \end{cases}$$

$$\Rightarrow 44r \overset{31}{\equiv} 26 \xrightarrow{44 \overset{31}{\equiv} 13} 13r \overset{31}{\equiv} 26 \xrightarrow[(13,31)=1]{\div 13} r \overset{31}{\equiv} 2$$

بنابراین $r=31k+2$ که در آن باید طبق قضیهٔ تقسیم $r<43$ باشد. در این‌صورت $k_{max}=1$ و در نتیجه $r_{max}=33$ است و به ازای آن داریم:
$N_{max}=44\times33=1452 \Rightarrow$ رقم یکان $=2$

(ریاضیات گسسته- آشنایی با نظریهٔ اعداد، صفحه‌های ۱۸ تا ۲۲)

-۱۳۰ (سراسری ریاضی - ۹۶)

$$5^3 \overset{31}{\equiv} 125 \overset{31}{\equiv} 1 \xrightarrow{\text{به توان } n} 5^{3n} \overset{31}{\equiv} 1 \xrightarrow{\times 5^2} 5^{3n+2} \overset{31}{\equiv} 25$$

$$5^3 \overset{31}{\equiv} 125 \overset{31}{\equiv} 1 \xrightarrow{\text{به توان } (2n+1)} 5^{6n+3} \overset{31}{\equiv} 1 \xrightarrow{\times 5} 5^{6n+4} \overset{31}{\equiv} 5$$

در نتیجه داریم: $5^{6n+4}+5^{3n+2}+1 \overset{31}{\equiv} 5+25+1 \overset{31}{\equiv} 31 \overset{31}{\equiv} 0$

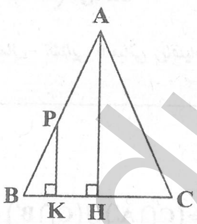
و عبارت مورد نظر به ازای تمام مقادیر n بر ۳۱ بخش‌پذیر است.

(ریاضیات گسسته- آشنایی با نظریهٔ اعداد، صفحه‌های ۱۸ تا ۲۱)

هندسه ۱

۱۳۱- (بهزاد نظام‌هاشمی)

از رأس A عمود AH را بر ضلع BC رسم می‌کنیم. چون $AH \parallel PK$، پس مثلث‌های AHB و PKB متشابه هستند و داریم:



$$\text{(نسبت تشابه)}\ k=\frac{AB}{BP}\xrightarrow{AB=3BP}k=3\Rightarrow S_{\overset{\triangle}{ABH}}=9S_{\overset{\triangle}{PBK}}$$

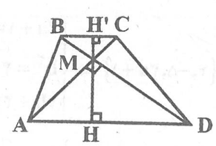
از طرفی می‌دانیم در هر مثلث متساوی‌الساقین، ارتفاع و میانهٔ وارد بر قاعده بر هم منطبق‌اند، پس داریم:

$$S_{\overset{\triangle}{ABH}}=S_{\overset{\triangle}{AHC}}=\frac{1}{2}S_{\overset{\triangle}{ABC}}$$

$$S_{\overset{\triangle}{ABH}}=9S_{\overset{\triangle}{PBK}}\Rightarrow\frac{1}{2}S_{\overset{\triangle}{ABC}}=9S_{\overset{\triangle}{PBK}}\Rightarrow S_{\overset{\triangle}{ABC}}=18S_{\overset{\triangle}{PBK}}$$

(هندسه ۱- قضیهٔ تالس، تشابه و کاربردهای آن، صفحه‌های ۴۵ تا ۴۷)

۱۳۲- (نوید مجیدی)



$$\overset{\triangle}{AMD}: MD^2=AD^2-AM^2=15^2-9^2=144\Rightarrow MD=12$$

$$\overset{\triangle}{AMD}: AM.MD=MH.AD\Rightarrow MH=\frac{9\times12}{15}=\frac{36}{5}$$

با توجه به موازی بودن BC و AD، دو مثلث AMD و BMC به حالت تساوی دو زاویه با هم متشابه‌اند. در نتیجه داریم:

$$\overset{\triangle}{AMD}\sim\overset{\triangle}{BMC}\Rightarrow \text{نسبت تشابه}: k=\frac{MD}{BM}=\frac{12}{4}=3\Rightarrow\frac{MH}{MH'}=3$$

$$\Rightarrow MH'=\frac{1}{3}\times\frac{36}{5}=\frac{12}{5}$$

$$\Rightarrow HH'=MH+MH'=\frac{36}{5}+\frac{12}{5}=\frac{48}{5}=9/6$$

(هندسه ۱- قضیهٔ تالس، تشابه و کاربردهای آن، صفحه‌های ۳۸ تا ۴۲، ۴۵ و ۴۶)

۱۳۳- (محمدابراهیم گیتی‌زاده)

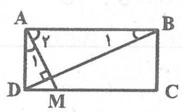
نقطهٔ O وسط قطر AC است، پس $OA=OC=\frac{AC}{2}$. همچنین دو مثلث EAB و ECM به حالت تساوی دو زاویه، با هم متشابه‌اند، پس:

$$\frac{CM}{AB}=\frac{EC}{AE}\Rightarrow\frac{1}{2}=\frac{\frac{AC}{2}-OE}{\frac{AC}{2}+OE}$$

$$\Rightarrow AC-2OE=\frac{AC}{2}+OE\Rightarrow OE=\frac{AC}{6}$$

(هندسه ۱- قضیهٔ تالس، تشابه و کاربردهای آن، صفحه‌های ۳۸ تا ۴۱)

۱۳۴- (فرهاد وفایی)



$$\begin{cases}\hat{A}_1+\hat{A}_2=90^\circ\\ \hat{A}_2+\hat{B}_1=90^\circ\end{cases}\Rightarrow\hat{A}_1=\hat{B}_1$$

$$\left.\begin{array}{l}\hat{A}_1=\hat{B}_1\\ \widehat{BAD}=\widehat{ADM}=90^\circ\end{array}\right\}\Rightarrow\overset{\triangle}{ADM}\sim\overset{\triangle}{ABD}\Rightarrow\frac{DM}{AD}=\frac{AD}{AB}=\frac{1}{2}$$

$$\xrightarrow{AB=2AD}\frac{DM}{AB}=\frac{1}{4}\xrightarrow{DC=AB}\frac{DM}{DC}=\frac{1}{4}$$

$$\xrightarrow{\text{تفضیل نسبت در مخرج}}\frac{DM}{DC-DM}=\frac{1}{4-1}\Rightarrow\frac{DM}{CM}=\frac{1}{3}$$

(هندسه ۱- قضیهٔ تالس، تشابه و کاربردهای آن، صفحه‌های ۳۸ تا ۴۱)

۱۳۵- (حسین حاجیلو)

در هر مثلث قائم‌الزاویه، طول ارتفاع وارد بر وتر، واسطهٔ هندسی طول‌های دو پاره‌خطی است که آن ارتفاع بر روی وتر پدید می‌آورد. بنابراین داریم:

$$\overset{\triangle}{ABC}: AH^2=BH\times CH\xrightarrow{CH=9}AH^2=9BH\quad(1)$$

$$\overset{\triangle}{BED}: EH^2=BH\times DH\xrightarrow{DH=1}EH^2=BH\quad(2)$$

$$(1),(2)\Rightarrow\frac{EH^2}{AH^2}=\frac{1}{9}\Rightarrow\frac{EH}{AH}=\frac{1}{3}$$

$$\xrightarrow{\text{تفضیل نسبت در مخرج}}\frac{EH}{AH-EH}=\frac{1}{3-1}\Rightarrow\frac{EH}{AE}=\frac{1}{2}$$

(هندسه ۱- قضیهٔ تالس، تشابه و کاربردهای آن، صفحه‌های ۴۱ و ۴۲)

آمار و احتمال

۱۳۶- (علیرضا شریف‌خطیبی)

$$B\subseteq A' \Rightarrow B\cap A' = B \Rightarrow B-A=B$$

در نتیجه A و B دو مجموعهٔ جدا از هم هستند و $A-B=A$ می‌باشد.

داریم:

$$[B-(A'\cap B')]\cup[A-(B'\cap A)]$$

$$=[B-(A\cup B)']\cup[A-(A\cap B')]$$

$$=[\underbrace{B\cap(A\cup B)}_{B}]\cup[A-\underbrace{(A-B)}_{A}]=B\cup(\underbrace{A-A}_{\varnothing})=B$$

(آمار و احتمال- آشنایی با مبانی ریاضیات، صفحه‌های ۲۶ تا ۳۴)

۱۳۷- (محمدعلی نادرپور)

$$(A\cap B)'\cap(A\cup B')\cap C=C$$

$$\Rightarrow[(A'\cup B')\cap(A\cup B')]\cap C=C$$

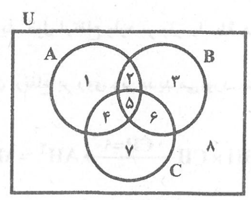
$$\Rightarrow[\underbrace{(A'\cap A)}_{\varnothing}\cup B']\cap C=C$$

$\Rightarrow B'\cap C=C\Rightarrow C\subseteq B'\Rightarrow$ B و C جدا از هم هستند $\Rightarrow B\cap C=\varnothing$

(آمار و احتمال- آشنایی با مبانی ریاضیات، صفحه‌های ۲۶ تا ۳۴)

۱۳۸- (علیرضا شریف‌خطیبی)

اگر نواحی موجود در نمودار را مطابق شکل شماره‌گذاری کنیم، آنگاه داریم:



گزینهٔ «۱»:

$$A\cup(C-B)=\{1,2,4,5\}\cup\{4,7\}=\{1,2,4,5,7\}$$

گزینهٔ «۲»:

$$(A-C)\cup(C-A)=\{1,2\}\cup\{6,7\}=\{1,2,6,7\}$$

گزینهٔ «۳»:

$$(A-B)\cup(C-A)=\{1,4\}\cup\{6,7\}=\{1,4,6,7\}$$

گزینهٔ «۴»:

$$(A-B)\cup(C-B)=\{1,4\}\cup\{4,7\}=\{1,4,7\}$$

ناحیهٔ هاشورخورده در نمودار ون، معادل مجموعهٔ $\{1,4,7\}$ است، پس برابر مجموعهٔ $(A-B)\cup(C-B)$ می‌باشد.

(آمار و احتمال- آشنایی با مبانی ریاضیات، صفحه‌های ۲۶ تا ۳۴)

۱۳۹- (امیرحسین ابومحبوب)

$$(C-A)\cup(C-B)=(C\cap A')\cup(C\cap B')=C\cap(A'\cup B')$$

$$=C\cap(A\cap B)'=C-\underbrace{(A\cap B)}_{A}=C-A$$

$$\Rightarrow|(C-A)\cup(C-B)|=|C-A|=|C|-\underbrace{|C\cap A|}_{|A|}$$

$$=|C|-|A|=11-6=5$$

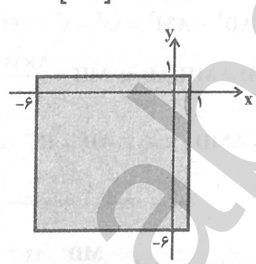
(آمار و احتمال- آشنایی با مبانی ریاضیات، صفحه‌های ۲۶ تا ۳۴)

۱۴۰- (محمدمهدی ابوترابی)

A و B دو مجموعهٔ غیرتهی هستند، بنابراین اگر $A\times B=B\times A$ باشد، آنگاه $A=B$ است. داریم:

$$\{-8,4b+3,b^2\}=\{4,-5,3a+1\}\Rightarrow\begin{cases}3a+1=-8\Rightarrow a=-3\\ b^2=4\Rightarrow b=\pm 2\\ 4b+3=-5\Rightarrow b=-2\end{cases}$$

بنابراین $a=-3$، $b=-2$ و در نتیجه $C=[-6,1]$ است.

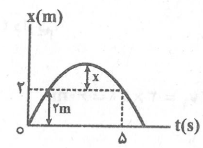


مطابق شکل نمودار مجموعهٔ C^2، یک مربع به طول ضلع ۷ است، پس مساحت آن برابر $49=7^2$ خواهد بود.

(آمار و احتمال- آشنایی با مبانی ریاضیات، صفحه‌های ۳۵ تا ۳۸)

فیزیک ۳

۱۴۱- (علیرضا گونه)



با توجه به این‌که سهمی نسبت به خطی که از رأس آن می‌گذرد، متقارن بوده و سرعت متوسط و تندی متوسط متحرک به‌ترتیب به جابه‌جایی و مسافت طی شده توسط متحرک بستگی دارد، می‌توان نوشت:

$$\frac{s_{av}}{v_{av}} = \frac{\frac{l}{\Delta t}}{\frac{\Delta x}{\Delta t}} = 3 \Rightarrow l = 3\Delta x$$

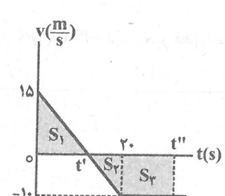
$$\Rightarrow 2 + x + x = 3\times 2 \Rightarrow x = 2m$$

بنابراین:

$$x_{max} = 2 + x = 2 + 2 = 4m$$

(فیزیک ۳- حرکت بر خط راست، صفحه‌های ۲ تا ۹)

۱۴۲- (علیرضا گونه)



متحرک در لحظه‌ای به مکان اولیهٔ خود باز می‌گردد که جابه‌جایی آن برابر با صفر باشد و با توجه به این‌که مساحت زیر نمودار سرعت – زمان و محور زمان برابر با جابه‌جایی است، ابتدا با استفاده از تشابه بین دو مثلث، لحظهٔ t' را می‌یابیم. داریم:

$$\frac{15}{10} = \frac{t'}{20 - t'} \Rightarrow t' = 12s$$

بنابراین:

$$S_1 = \frac{15\times 12}{2} = 90m \Rightarrow \Delta x_1 = 90m$$

$$S_2 = \frac{8\times 10}{2} = 40m \Rightarrow \Delta x_2 = -40m$$

$$\Rightarrow \Delta x_1 + \Delta x_2 + \Delta x_3 = 0 \Rightarrow 90 + (-40) + \Delta x_3 = 0$$

$$\Rightarrow \Delta x_3 = -50m$$

$$\Rightarrow S_3 = 50m \Rightarrow 50 = (t'' - 20)\times 10 \Rightarrow t'' = 25s$$

(فیزیک ۳- حرکت بر خط راست، صفحه‌های ۲ تا ۲۱)

۱۴۳- (بیتا خورشید)

زمانی‌که تندی متحرک در حال افزایش است (بازهٔ زمانی صفر تا t) حرکت متحرک تندشونده و زمانی که تندی متحرک در حال کاهش است، (بازهٔ زمانی t تا $3t$)، حرکت متحرک کندشونده است. داریم:

$$(a_{av})_{\text{کندشونده}} = 3(a_{av})_{\text{تندشونده}} \Rightarrow \left|\frac{0 - v_2}{2t}\right| = 3\left|\frac{v_2 - v_1}{t}\right|$$

$$\Rightarrow \frac{v_2}{2t} = 3\times\frac{v_2 - v_1}{t} \Rightarrow \frac{v_2}{v_1} = \frac{6}{5}$$

(فیزیک ۳- حرکت بر خط راست، صفحه‌های ۱۰ تا ۱۲ و ۱۶)

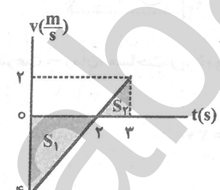
۱۴۴- (عبدالرضا امینی‌نسب)

با مقایسهٔ معادلهٔ حرکت با رابطهٔ $x = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t + x_0$ می‌توانیم شتاب و سرعت اولیهٔ متحرک را بیابیم، داریم:

$$x = t^2 - 4t + 4 \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{2}a = 1 \Rightarrow a = 2\frac{m}{s^2} \\ v_0 = -4\frac{m}{s} \end{cases}$$

آنگاه معادلهٔ سرعت – زمان را می‌نویسیم و نمودار آن‌را رسم می‌کنیم. داریم:

$$v = at + v_0 \Rightarrow v = 2t - 4$$



برای محاسبهٔ تندی متوسط، داریم:

$$s_{av} = \frac{l}{\Delta t} = \frac{|S_1| + |S_2|}{\Delta t} = \frac{\frac{1}{2}\times 2\times 4 + \frac{1}{2}\times 1\times 2}{3} = \frac{5}{3}\frac{m}{s}$$

(فیزیک ۳- حرکت بر خط راست، صفحه‌های ۳ و ۱۵ تا ۲۱)

۱۴۵- *(خسرو ارغوانی‌فرد)*

معادلهٔ مکان – زمان حرکت متحرک را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$x = t^{۲} - ۴t + ۴ + ۱ = (t-۲)^{۲} + ۱$$

کمترین مقدار x وقتی است که $t = ۲s$ باشد، در واقع در این لحظه متحرک در $x = ۱m$ و کمترین فاصله از مبدأ مکان قرار دارد.

(فیزیک ۳- حرکت بر خط راست، صفحه‌های ۱۵ تا ۲۱)

۱۴۶- *(امیرحسین مجوزی)*

با استفاده از معادلهٔ مستقل از شتاب، داریم:

$$\frac{\Delta x}{t} = \frac{v + v_{۰}}{۲} \Rightarrow \frac{۰ - ۹}{۳} = \frac{۰ + v_{۰}}{۲} \Rightarrow v_{۰} = -۶\frac{m}{s}$$

همچنین شتاب برابر است با:

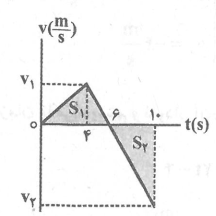
$$v = at + v_{۰} \Rightarrow ۰ = a \times ۳ + (-۶) \Rightarrow a = ۲\frac{m}{s^{۲}}$$

بنابراین معادلهٔ سرعت – زمان متحرک برابر است با:

$$v = at + v_{۰} \Rightarrow v = ۲t - ۶$$

(فیزیک ۳- حرکت بر خط راست، صفحه‌های ۱۵ تا ۲۱)

۱۴۷- *(زهره آقامحمدی)*



می‌دانیم که در نمودار سرعت – زمان، مساحت زیر نمودار برابر با جابه‌جایی است. داریم:

$$\Delta x_{۱} = S_{۱} = \frac{۶ \times v_{۱}}{۲} = ۳v_{۱}$$

$$\Delta x_{۲} = -S_{۲} = -\frac{(۱۰-۶) \times |v_{۲}|}{۲} = -۲|v_{۲}|$$

از طرفی اگر قدرمطلق جابه‌جایی‌ها را جمع کنیم، مسافت طی شده به‌دست می‌آید.

$$l = S_{۱} + S_{۲} = ۳v_{۱} + ۲|v_{۲}| = ۱۴۰ \qquad (۱)$$

با توجه به تشابه مثلث می‌توانیم رابطهٔ دیگری بین $v_{۱}$ و $v_{۲}$ به‌دست آوریم:

$$\frac{v_{۱}}{۶-۴} = \frac{|v_{۲}|}{۱۰-۶} \Rightarrow \frac{v_{۱}}{۲} = \frac{|v_{۲}|}{۴} \Rightarrow |v_{۲}| = ۲v_{۱} \quad (۲)$$

به کمک روابط (۱) و (۲) داریم:

$$v_{۱} = ۲۰\frac{m}{s} \Rightarrow S_{۱} = ۳v_{۱} = ۳ \times ۲۰ = ۶۰m$$

$$|v_{۲}| = ۴۰\frac{m}{s} \Rightarrow S_{۲} = ۲|v_{۲}| = ۲ \times ۴۰ = ۸۰m$$

بنابراین:

$$v_{av} = \frac{S_{۱} - S_{۲}}{\Delta t} = \frac{۶۰ - ۸۰}{۱۰} = -۲\frac{m}{s}$$

(فیزیک ۳- حرکت بر خط راست، صفحه‌های ۲ تا ۲۱)

۱۴۸- *(حسین مخدومی)*

از آن‌جایی‌که در بازه‌های زمانی صفر تا $t_{۱}$ و $t_{۲}$ تا $t_{۳}$ شتاب مثبت است، شیب خط متناظر با این بازه‌های زمانی در نمودار سرعت – زمان باید مثبت باشد و در بازهٔ زمانی $t_{۱}$ تا $t_{۲}$ چون شتاب منفی است، شیب خط متناظر در نمودار سرعت – زمان باید منفی باشد. از این رو نمودار سرعت – زمان گزینهٔ «۲» مطابق با این حرکت نیست زیرا در قسمت اول فاقد این ویژگی‌ها است.

(فیزیک ۳- حرکت بر خط راست، صفحه‌های ۲ تا ۲۱)

۱۴۹- *(زهره آقامحمدی)*

ابتدا جابه‌جایی متحرک را در مدت $۲۰s$ محاسبه می‌کنیم. در ۱۰ ثانیهٔ ابتدایی حرکت، داریم:

$$\Delta x_{۱} = \frac{۱}{۲}a_{۱}t_{۱}^{۲} + v_{۰}t_{۱} = \frac{۱}{۲} \times ۱ \times ۱۰^{۲} + ۰ \times ۱۰ \Rightarrow \Delta x_{۱} = ۵۰m$$

سرعت متحرک در لحظهٔ $t_{۱} = ۱۰s$ برابر است با:

$$v_{۱} = a_{۱}t_{۱} + v_{۰} = ۱ \times ۱۰ + ۰ \Rightarrow v_{۱} = ۱۰\frac{m}{s}$$

جابه‌جایی متحرک در بازهٔ زمانی $۱۰s$ تا $۲۰s$ برابر است با:

$$\Delta x_{۲} = \frac{۱}{۲}a_{۲}t_{۲}^{۲} + v_{۱}t_{۲} = \frac{۱}{۲} \times (-۲) \times ۱۰^{۲} + ۱۰ \times ۱۰ \Rightarrow \Delta x_{۲} = ۰$$

بنابراین:

$$v_{av} = \frac{\Delta x_{۱} + \Delta x_{۲}}{t_{۲}} = \frac{۵۰ + ۰}{۲۰} \Rightarrow v_{av} = ۲/۵\frac{m}{s}$$

(فیزیک ۳- حرکت بر خط راست، صفحه‌های ۳ و ۱۵ تا ۲۱)

۱۵۰- (بیتا خورشید)

برای این‌که دو متحرک به یکدیگر برخورد نکنند باید مجموع اندازهٔ جابه‌جایی آن‌ها تا لحظهٔ توقف برابر با ۸۰ متر باشد. با استفاده از معادلهٔ سرعت - جابه‌جایی، داریم:

$$v^2 = v_0^2 + 2a\Delta x \Rightarrow \Delta x = \frac{v^2 - v_0^2}{2a}$$

$$\Rightarrow |\Delta x_1| = \frac{|0 - 16^2|}{2|a|}, |\Delta x_2| = \frac{|0 - 20^2|}{2|a|}$$

$$|\Delta x_1| + |\Delta x_2| = 80 \Rightarrow \frac{16^2}{2|a|} + \frac{20^2}{2|a|} = 80 \Rightarrow |a| = 4/1 \frac{m}{s^2}$$

(فیزیک ۳- حرکت بر خط راست، صفحه‌های ۱۵ تا ۲۱)

۱۵۱- (علیرضا طالبیان)

معادلهٔ حرکت کامیون و اتومبیل را می‌نویسیم. داریم:

$$\Delta x_1 = \frac{1}{2}at^2$$

$$\Delta x_2 = v(t - T)$$

زمانی اتومبیل به کامیون می‌رسد که جابه‌جایی‌های آن‌ها یکسان باشد.

بنابراین:

$$\Delta x_1 = \Delta x_2 \Rightarrow \frac{1}{2}at^2 = v(t - T) \Rightarrow \frac{1}{2}at^2 - vt + vT = 0$$

چون طبق صورت سؤال اتومبیل فقط یک بار به کامیون می‌رسد، معادلهٔ درجهٔ دوم فوق فقط یک جواب دارد و بنابراین دلتای آن برابر با صفر است:

$$\Delta = 0 \Rightarrow (-v)^2 - 4\left(\frac{1}{2}a\right)(vT) = 0 \Rightarrow v^2 - 2aTv = 0$$

$$\Rightarrow v(v - 2aT) = 0 \Rightarrow \begin{cases} v = 0 \\ v = 2aT \end{cases}$$

(فیزیک ۳- حرکت بر خط راست، صفحه‌های ۱۳ تا ۲۱)

۱۵۲- (غلامرضا محبی)

فاصلهٔ بین دو نقطهٔ A و B برابر با d است. در مسیر رفت از A تا B، اگر زمان کل حرکت 2t فرض شود، داریم:

$$d = v_1t + 2v_1t \Rightarrow d = 3v_1t \qquad (1)$$

در مسیر برگشت از B تا A، اگر فرض کنیم متحرک نیمهٔ اول مسیر را در زمان t_1 و نیمهٔ دوم آن‌را در زمان t_2 طی می‌کند، خواهیم داشت:

$$v_1t_1 = 2v_1t_2 \Rightarrow t_1 = 2t_2 \qquad (2)$$

$$d = \frac{d}{2} + \frac{d}{2} = v_1t_1 + 2v_1t_2 = 2v_1t_2 + 2v_1t_2 \Rightarrow d = 4v_1t_2 \qquad (3)$$

با توجه به رابطه‌های (۱) و (۳) داریم:

$$3v_1t = 4v_1t_2 \Rightarrow t_2 = \frac{3}{4}t$$

$$\xrightarrow{(2)} t_1 = 2t_2 = \frac{3}{2}t$$

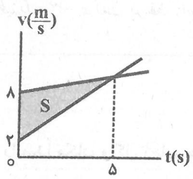
برای محاسبهٔ تندی متوسط در کل مسیر حرکت، داریم:

$$s_{av} = \frac{l}{\Delta t} = \frac{2d}{2t + t_1 + t_2} = \frac{2(3v_1t)}{2t + \frac{3}{2}t + \frac{3}{4}t} \Rightarrow s_{av} = \frac{24}{17}v_1$$

(فیزیک ۳- حرکت بر خط راست، صفحه‌های ۲ تا ۶ و ۱۳ تا ۱۵)

۱۵۳- (حامد خسروی)

با توجه به این‌که شتاب حرکت متحرک‌ها ثابت است و سرعت دو متحرک در لحظهٔ t = 5s یکسان می‌شود، نمودار سرعت - زمان دو متحرک را رسم می‌کنیم.



با توجه به این‌که دو متحرک در مبدأ زمان از مبدأ مکان عبور کرده‌اند و مساحت بین نمودار سرعت - زمان و محور زمان برابر با اندازهٔ جابه‌جایی دو متحرک است، بنابراین بیشترین فاصلهٔ دو متحرک در ۱۰ ثانیهٔ ابتدایی حرکت در لحظهٔ t = 5s رخ خواهد داد و برابر است با:

$$\Delta x_{max} = S = \frac{(8 - 2) \times 5}{2} \Rightarrow \Delta x_{max} = 15m$$

(فیزیک ۳- حرکت بر خط راست، صفحه‌های ۱۵ تا ۲۱)

۱۵۴- (محمدعلی راست‌پیمان)

برای متحرک A که از حال سکون شروع به حرکت کرده است، در ۴ ثانیهٔ ابتدایی حرکت می‌توان نوشت:

$$\frac{\Delta x_A}{t} = \frac{v_A + v_{0_A}}{2} \Rightarrow \frac{20 - 0}{4} = \frac{v_A + 0}{2} \Rightarrow v_A = 10\frac{m}{s}$$

چون در لحظه‌ای که دو متحرک به هم می‌رسند، (لحظهٔ t = 4s) اندازهٔ سرعت آن‌ها یکسان است، داریم:

$$v_B = -10\frac{m}{s}$$

بنابراین: $\frac{\Delta x_B}{t} = \frac{v_B + v_{0_B}}{2} \Rightarrow \frac{20 - 0}{4} = \frac{-10 + v_{0_B}}{2} \Rightarrow v_{0_B} = 20\frac{m}{s}$

حال شتاب حرکت هر متحرک را می‌یابیم. داریم:

$$a_A = \frac{\Delta v_A}{t} = \frac{10 - 0}{4} \Rightarrow a_A = 2/5\frac{m}{s^2}$$

$$a_B = \frac{\Delta v_B}{t} = \frac{-10-20}{4} \Rightarrow a_B = -7/5\,\frac{m}{s^2}$$

سپس معادلهٔ حرکت هر متحرک را نوشته و مکان آن‌ها را در لحظهٔ $t = 20s$ محاسبه می‌کنیم. داریم:

$$x_A = \frac{1}{2}a_A t^2 + v_{0A}t + x_{0A} \Rightarrow x_A = \frac{1}{2}\times 2/5t^2 + 0 + 0$$

$$\xrightarrow{t=20s} x_A = 500m$$

$$x_B = \frac{1}{2}a_B t^2 + v_{0B}t + x_{0B} \Rightarrow x_B = \frac{1}{2}\times(-7/5)t^2 + 20t + 0$$

$$\xrightarrow{t=20s} x_B = -1100m$$

بنابراین:

$$|\Delta x_{AB}| = |x_A - x_B| = |500-(-1100)|$$

$$\Rightarrow |\Delta x_{AB}| = 1600m = 1/6km$$

(فیزیک ۳- حرکت بر خط راست، صفحه‌های ۱۵ تا ۲۱)

۱۵۵- (سعید شرق)

اگر محل رها شدن گلوله را مبدأ مکان و کل زمان حرکت گلوله را t ثانیه فرض کنیم، با استفاده از معادلهٔ مکان – زمان حرکت گلوله، داریم:

$$y = -\frac{1}{2}gt^2 + y_0 \Rightarrow \begin{cases} -h = -\frac{1}{2}gt^2 + 0 \\ -\frac{4}{9}h = -\frac{1}{2}g(t-1)^2 + 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{4}{9} = \frac{(t-1)^2}{t^2} \Rightarrow t = 3s$$

بنابراین تندی برخورد گلوله به سطح زمین برابر است با:

$$v = -gt = -10\times 3 \Rightarrow |v| = 30\frac{m}{s}$$

(فیزیک ۳- حرکت بر خط راست، صفحه‌های ۲۱ تا ۲۴)

۱۵۶- (علیرضا گونه)

اگر سطح زمین را به عنوان مبدأ مکان در نظر بگیریم، مدت زمان حرکت گلولهٔ A برابر است با:

$$y_A = -\frac{1}{2}gt_A^2 + y_{0A} \Rightarrow 0 = -\frac{1}{2}\times 10t_A^2 + 80 \Rightarrow t_A = 4s$$

چون گلولهٔ B را دو ثانیه دیرتر رها کرده‌ایم، بنابراین مکان گلولهٔ B را در لحظهٔ $t_B = 2s$ می‌یابیم. داریم:

$$y_B = -\frac{1}{2}gt_B^2 + y_{0B} \Rightarrow y_B = -\frac{1}{2}\times 10\times 2^2 + 80 \Rightarrow y_B = 60m$$

(فیزیک ۳- حرکت بر خط راست، صفحه‌های ۲۱ تا ۲۴)

۱۵۷- (حسین مخدومی)

با استفاده از قانون دوم نیوتون، داریم:

$$F = ma \Rightarrow \frac{F_2}{F_1} = \frac{m_2}{m_1}\times\frac{a_2}{a_1} \Rightarrow \frac{\frac{F}{2}}{F} = \frac{2m}{m}\times\frac{a_2}{a}$$

$$\Rightarrow a_2 = \frac{1}{4}a$$

(فیزیک ۳- دینامیک و حرکت دایره‌ای، صفحه‌های ۳۲ تا ۳۴)

۱۵۸- (خسرو ارغوانی‌فرد)

ابتدا تندی جسم را در لحظه‌ای که انرژی جنبشی آن برابر با $200J$ است، می‌یابیم:

$$K = \frac{1}{2}mv^2 \Rightarrow 200 = \frac{1}{2}\times 4\times v^2 \Rightarrow v = 10\frac{m}{s}$$

حال از قانون دوم نیوتون استفاده می‌کنیم. داریم:

$$F = ma = m\frac{\Delta v}{t} \Rightarrow 40 = 4\times\frac{10-0}{t} \Rightarrow t = 1s$$

(فیزیک ۳- دینامیک و حرکت دایره‌ای، صفحه‌های ۳۲ تا ۳۴)

۱۵۹- (خسرو ارغوانی‌فرد)

با استفاده از معادلهٔ سرعت – جابه‌جایی، شتاب حرکت را می‌یابیم. داریم:

$$\Rightarrow 0 = v_0^2 + 2a\Delta x \Rightarrow a = -\frac{v_0^2}{2\Delta x}$$

حال با استفاده از قانون دوم نیوتون، داریم:

$$F = ma = m\times\frac{\left(-v_0^2\right)}{2\Delta x}$$

برای جابه‌جایی یکسان، نیرو با جرم و مجذور تندی اولیه نسبت مستقیم دارد. بنابراین:

$$\frac{F_A}{F_B} = \frac{m_A}{m_B}\times\left(\frac{v_{0A}}{v_{0B}}\right)^2 = \frac{1000}{2000}\times\left(\frac{20}{10}\right)^2 = 2$$

(فیزیک ۳- دینامیک و حرکت دایره‌ای، صفحه‌های ۳۲ تا ۳۴)

۱۶۰- (حسین مخدومی)

نیروهای کنش و واکنش همواره به‌صورت جفت وجود دارند و نوع آن‌ها همواره یکسان است و چون به دو جسم وارد می‌شوند، نمی‌توان برایند آن‌ها را تعیین کرد. نیروهای کنش و واکنش همواره هم‌اندازه، هم‌راستا اما در خلاف جهت یکدیگر هستند.

(فیزیک ۳- دینامیک و حرکت دایره‌ای، صفحه‌های ۳۴ و ۳۵)

فیزیک ۱

۱۶۱- (غلامرضا محبی)

با توجه به رابطهٔ بین دمای سلسیوس و کلوین، خواهیم داشت:

$$T=\theta+273$$

$$\Rightarrow\begin{cases}T_1=\theta_1+273\xrightarrow{\theta_1=27^\circ C}T_1=300K\\T_2=\theta_2+273\xrightarrow{\theta_2=54^\circ C}T_2=327K\end{cases}$$

برای محاسبهٔ درصد تغییرات خواهیم داشت:

$$\frac{\Delta T}{T_1}\times 100=\frac{327-300}{300}\times 100=9\%$$

(فیزیک ۱- دما و گرما، صفحهٔ ۹۲)

۱۶۲- (عبدالرضا امینی نسب)

در دمای $10^\circ C$، طول میلهٔ A به اندازهٔ $0.1cm$ از طول میلهٔ B بیشتر است. بنابراین در دمای مورد نظر میلهٔ B به همین اندازه باید بیشتر انبساط پیدا کند تا در نهایت طول آنها یکسان شود. داریم:

$$\alpha_B L_B\Delta\theta=\alpha_A L_A\Delta\theta+0.1$$

$$\Rightarrow 1.5\times10^{-5}\times100\times\Delta\theta=10^{-5}\times100.1\times\Delta\theta+0.1$$

$$\Rightarrow\Delta\theta=\frac{0.1}{(150-100.1)\times10^{-5}}$$

$$\Rightarrow\Delta\theta\simeq200.4^\circ C$$

$$\Rightarrow\theta_2-10\simeq200.4\Rightarrow\theta_2\simeq210.4^\circ C$$

(فیزیک ۱- دما و گرما، صفحه‌های ۹۶ تا ۱۰۰)

۱۶۳- (ملیحه جعفری)

با استفاده از رابطهٔ انبساط سطحی، داریم:

$$\Delta A=2\alpha A_1\Delta T\Rightarrow2\alpha=\frac{\Delta A}{A_1\Delta T}=\frac{27\times10^{-3}}{40\times5\times(527+273-500)}$$

$$\Rightarrow2\alpha=\frac{27\times10^{-3}}{2\times10^{2}\times3\times10^{2}}=4.5\times10^{-7}K^{-1}$$

(فیزیک ۱- دما و گرما، صفحهٔ ۱۰۰)

۱۶۴- (مصطفی کیانی)

چون ضریب انبساط طولی برای هر دو حالت یکسان است، با استفاده از رابطه‌های درصد تغییر حجم و درصد تغییر مساحت می‌توان نوشت:

$$\begin{cases}\text{درصد تغییر حجم}=\beta\Delta T'\times100=3\alpha\Delta T'\times100\\\text{درصد تغییر مساحت}=2\alpha\Delta T\times100\end{cases}$$

$$\Rightarrow\frac{\text{درصد تغییر حجم}}{\text{درصد تغییر مساحت}}=\frac{3\alpha\Delta T'\times100}{2\alpha\Delta T\times100}$$

$$\xrightarrow[\text{درصد تغییر مساحت}=0.24]{\Delta T'=200^\circ C,\ \Delta T=100^\circ C}\frac{\text{درصد تغییر حجم}}{0.24}=\frac{3\times200}{2\times100}$$

$$\Rightarrow\text{درصد تغییر حجم}=0.72\%$$

(فیزیک ۱- دما و گرما، صفحه‌های ۹۵ تا ۱۰۲)

۱۶۵- (علیرضا گونه)

افزایش حجم جیوه و افزایش گنجایش ظرف را محاسبه می‌کنیم:

$$\Delta V_{\text{جیوه}}=\beta_{\text{جیوه}}V_1\Delta\theta=18\times10^{-5}\times100\times50=0.9cm^3$$

$$\Delta V_{\text{شیشه}}=3\alpha_{\text{شیشه}}V_1\Delta\theta=3\times10^{-5}\times100\times50=0.15cm^3$$

بنابراین حجم جیوه‌ای که از ظرف بیرون می‌ریزد، برابر است با:

$$\Delta V_{\text{جیوه}}-\Delta V_{\text{ظرف}}=0.9-0.15=0.75cm^3$$

(فیزیک ۱- دما و گرما، صفحه‌های ۱۰۱ و ۱۰۲)

-۱۶۶ (علیرضا گونه)

با استفاده از رابطهٔ تغییر چگالی با تغییرات دما، داریم:

$$\Delta\rho = -\rho_۱\beta\Delta\theta$$

$$\Rightarrow ۴/۸۲ - ۵ = -۵\times۳\times۴\times۱۰^{-۵}\times\Delta\theta \Rightarrow \Delta\theta = ۳۰۰^\circ C$$

$$\Rightarrow \theta_۲ - ۱۰۰ = ۳۰۰ \Rightarrow \theta_۲ = ۴۰۰^\circ C = ۶۷۳K$$

(فیزیک ۱- دما و گرما، صفحه‌های ۹۲ و ۱۰۲)

-۱۶۷ (خسرو ارغوانی‌فرد)

وقتی به جسمی گرما می‌دهیم، طبق رابطهٔ $Q = mc\Delta\theta$ دمای آن افزایش می‌یابد. به هر دو جسم به یک میزان گرما داده‌ایم. پس:

$$Q_{Cu} = Q_W \Rightarrow m_{Cu}c_{Cu}\Delta\theta_{Cu} = m_W c_W \Delta\theta_W$$

$$\xrightarrow{m_{Cu}=m_W} ۳۸۰\Delta\theta_{Cu} = ۴۲۰۰\times۱۹ \Rightarrow \Delta\theta_{Cu} = \frac{۴۲۰۰\times۱۹}{۳۸۰}$$

$$\Rightarrow \Delta\theta_{Cu} = ۲۱۰^\circ C$$

(فیزیک ۱- دما و گرما، صفحه‌های ۱۰۳ تا ۱۰۸)

-۱۶۸ (محمدعلی راست‌پیمان)

۸۰ درصد از انرژی جنبشی گلوله در لحظهٔ برخورد، به‌صورت گرما به گلوله منتقل شده و باعث بالا رفتن دمای آن می‌شود. داریم:

$$Q = \frac{۸۰}{۱۰۰}K \Rightarrow mc_{\text{گلوله}}\Delta\theta = \frac{۴}{۵}\times\frac{۱}{۲}mv^۲$$

$$\Rightarrow ۸۰۰\times۲۰ = \frac{۲}{۵}v^۲ \Rightarrow v = ۲۰۰\frac{m}{s}$$

(فیزیک ۱- دما و گرما، صفحه‌های ۱۰۳ تا ۱۰۸)

-۱۶۹ (خسرو ارغوانی‌فرد)

گرمای داده شده به هر دو کره یکسان است، پس داریم:

$$Q_A = Q_B \Rightarrow m_A c_A \Delta\theta_A = m_B c_B \Delta\theta_B$$

$$\Rightarrow \rho_A V_A c_A \Delta\theta_A = \rho_B V_B c_B \Delta\theta_B$$

چون هر دو کره هم‌جنس هستند پس $c_A = c_B$ و $\rho_A = \rho_B$ می‌باشد.

بنابراین داریم:

$$V_A\Delta\theta_A = V_B\Delta\theta_B \Rightarrow \frac{V_A}{V_B} = \frac{\Delta\theta_B}{\Delta\theta_A}$$

از طرفی تغییر حجم از رابطهٔ $\Delta V = ۳\alpha V_۱\Delta\theta$ به‌دست می‌آید، بنابراین:

$$\frac{\Delta V_A}{\Delta V_B} = \frac{\alpha_A}{\alpha_B}\times\frac{V_A}{V_B}\times\frac{\Delta\theta_A}{\Delta\theta_B}$$

$$\xrightarrow[\frac{V_A}{V_B}=\frac{\Delta\theta_B}{\Delta\theta_A}]{\alpha_A=\alpha_B} \frac{\Delta V_A}{\Delta V_B} = ۱\times\frac{\Delta\theta_B}{\Delta\theta_A}\times\frac{\Delta\theta_A}{\Delta\theta_B} = ۱$$

(فیزیک ۱- دما و گرما، صفحه‌های ۱۰۱ و ۱۰۳ تا ۱۰۸)

-۱۷۰ (علیرضا گونه)

با استفاده از رابطهٔ $Q = mc\Delta\theta$ و همچنین $\rho = \frac{m}{V}$ می‌توان نوشت:

$$Q_A + Q_B = ۰ \xrightarrow[\rho=\frac{m}{V}]{Q=mc\Delta\theta}$$

$$\rho_A V_A c_A\left(\theta_{\text{تعادل}} - \theta_A\right) + \rho_B V_B c_B\left(\theta_{\text{تعادل}} - \theta_B\right) = ۰$$

$$\Rightarrow ۲\rho_B\times۲V_B\times۱۲۰۰\left(\theta_{\text{تعادل}} - ۲۵\right) + \rho_B V_B\times۱۶۰۰\left(\theta_{\text{تعادل}} - ۴۵\right) = ۰$$

$$\Rightarrow ۴\theta_{\text{تعادل}} - ۱۲۰ = ۰ \Rightarrow \theta_{\text{تعادل}} = ۳۰^\circ C$$

(فیزیک ۱- دما و گرما، صفحه‌های ۱۰۳ تا ۱۱۲)

فیزیک ۲

۱۷۱- (حسین مخدومی)

وقتی که مقاومت‌ها متوالی باشند، مقاومت معادل مدار برابر است با:

$$R_{eq}=5+5+5=15\Omega$$

بنابراین جریان عبوری از مدار برابر است با:

$$\Rightarrow I=\frac{\varepsilon}{R_{eq}+r}=\frac{\varepsilon}{15+1}=\frac{\varepsilon}{16}A$$

وقتی که مقاومت‌ها موازی‌اند، مقاومت معادل مدار برابر است با:

$$R'_{eq}=\frac{5}{3}\Omega$$

در این حالت جریان عبوری از مدار برابر است با:

$$\Rightarrow I'=\frac{\varepsilon}{\frac{5}{3}+1}\Rightarrow I'=\frac{3\varepsilon}{8}A$$

در نتیجه می‌توان نوشت:

$$\frac{I}{I'}=\frac{\frac{\varepsilon}{16}}{\frac{3\varepsilon}{8}}\Rightarrow\frac{I}{I'}=\frac{1}{6}$$

(فیزیک ۲- جریان الکتریکی و مدارهای جریان مستقیم، صفحه‌های ۶۱ تا ۶۶ و ۷۰ تا ۷۷)

۱۷۲- (امیرحسین مجوزی)

چون ولت‌سنج ایده‌آل است از این‌رو مقاومت آن بی‌نهایت است و با توجه به این‌که در شاخهٔ اصلی مدار قرار دارد، از آن جریانی عبور نمی‌کند و در نتیجه ولت‌سنج تنها نیروی محرکهٔ مولد را (اختلاف پتانسیل دو سر باتری) که برابر با $28V$ است نشان می‌دهد.

(فیزیک ۲- جریان الکتریکی و مدارهای جریان مستقیم، صفحه‌های ۶۱ تا ۶۶)

۱۷۳- (حسین ناصحی)

با استفاده از رابطهٔ اُهم برای مقاومت معادل مدار، می‌توان نوشت:

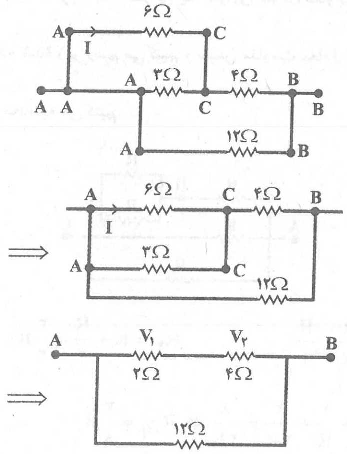
$$V=R_{eq}I\xrightarrow{I=\frac{\varepsilon}{R_{eq}+r}}V=\frac{R_{eq}\varepsilon}{R_{eq}+r}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}1/5=\frac{1\times\varepsilon}{1+r}\\ 2=\frac{2\varepsilon}{2+r}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\varepsilon=1/5+1/5r\\ \varepsilon=2+r\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}r=1\Omega\\ \varepsilon=3V\end{cases}$$

(فیزیک ۲- جریان الکتریکی و مدارهای جریان مستقیم، صفحه‌های ۶۱ تا ۶۶)

۱۷۴- (علیرضا گونه)

ابتدا با استفاده از نقاط هم‌پتانسیل، مدار را به‌صورت ساده‌تری رسم می‌کنیم. داریم:



با توجه به اینکه جریان عبوری از مقاومت ۲ اُهمی و ۴ اُهمی یکسان است، داریم:

$$\frac{V_1}{V_2}=\frac{R_1}{R_2}=\frac{2}{4}\Rightarrow V_2=2V_1$$

بنابراین می‌توان نوشت:

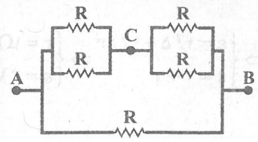
$$V_1+V_2=12V\Rightarrow V_1=4V$$

$$V_1=RI\Rightarrow 4=6I\Rightarrow I=\frac{2}{3}A$$

(فیزیک ۲- جریان الکتریکی و مدارهای جریان مستقیم، صفحه‌های ۷۰ تا ۷۷)

۱۷۵- (زهره آقامحمدی)

ابتدا با توجه به متوالی یا موازی بودن مقاومت‌ها، مدار را به‌صورت ساده شده رسم می‌کنیم و سپس مقاومت معادل بین نقطه‌های A و B را محاسبه می‌کنیم. داریم:

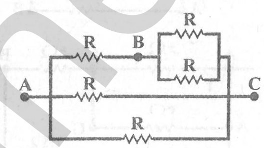


$$R_1 = \frac{R\times R}{R+R} = \frac{R}{2} \qquad R_2 = \frac{R\times R}{R+R} = \frac{R}{2}$$

$$R_3 = \frac{R}{2} + \frac{R}{2} = R$$

$$R_{eq} = \frac{R\times R}{R+R} = \frac{R}{2}$$

در حالت دوم نیز با توجه به متوالی یا موازی بودن مقاومت‌ها، مدار را به‌صورت ساده شدهٔ زیر رسم می‌کنیم و سپس مقاومت معادل بین نقطه‌های A و C را محاسبه می‌کنیم:



$$R'_1 = \frac{R\times R}{R+R} = \frac{R}{2} \qquad R'_2 = R + \frac{R}{2} = \frac{3}{2}R$$

$$\frac{1}{R'_{eq}} = \frac{1}{R} + \frac{1}{R} + \frac{2}{3R} = \frac{8}{3R} \Rightarrow R'_{eq} = \frac{3}{8}R$$

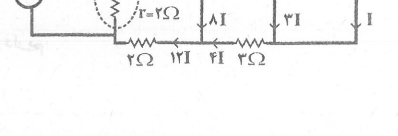
بنابراین:

$$\frac{R_{eq}}{R'_{eq}} = \frac{\frac{R}{2}}{\frac{3R}{8}} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$$

(فیزیک ۲- جریان الکتریکی و مدارهای جریان مستقیم، صفحه‌های ۷۰ تا ۷۷)

-۱۷۶ *(عبدالرضا امینی نسب)*

اگر جریان عبوری از مقاومت ۳۶ اُهمی را برابر با I فرض کنیم، با توجه به قانون اُهم و متوالی یا موازی بودن مقاومت‌ها، جریان عبوری از هر یک از مقاومت‌ها به‌صورت زیر خواهد بود. حال توان مصرفی هر یک از مقاومت‌ها را محاسبه می‌کنیم:



$$P = RI^2$$

$$P_1 = 36I^2$$

$$P_2 = 12\times(3I)^2 = 108I^2$$

$$P_3 = 3\times 16I^2 = 48I^2$$

$$P_4 = 6\times 64I^2 = 384I^2$$

$$P_5 = 2\times 144I^2 = 288I^2$$

بنابراین مقاومت ۶اُهمی بیشترین توان مصرفی را خواهد داشت. در نتیجه ولتاژ دو سر این مقاومت برابر با $12V$ خواهد بود و می‌توان نوشت:

$$12 = 6\times 8I \Rightarrow I = \frac{1}{4}A \Rightarrow I_t = 12I = 12\times\frac{1}{4} \Rightarrow I_t = 3A$$

مقاومت معادل مدار نیز برابر است با:

$$R' = \frac{36\times 12}{36+12} = 9\Omega \qquad R'' = 9+3 = 12\Omega$$

$$R''' = \frac{12\times 6}{12+6} = 4\Omega \qquad R_{eq} = 4+2 = 6\Omega$$

در نتیجه:

$$\varepsilon = I_t\left(R_{eq}+r\right) = 3(6+2) = 24V$$

$$V = \varepsilon - I_t r \Rightarrow V = 24 - 3\times 2 = 18V$$

(فیزیک ۲- جریان الکتریکی و مدارهای جریان مستقیم، صفحه‌های ۶۱ تا ۷۷)

-۱۷۷ *(غلامرضا محبی)*

در مدار مقاومت‌های R_2، R_3 و R_4 اتصال کوتاه می‌شوند و از مدار حذف می‌شوند. بنابراین جریان عبوری از مدار برابر است با:

$$I = \frac{\varepsilon}{R_{eq}+r} = \frac{12}{1/5+0/5} = 6A$$

در نتیجه توان خروجی مولد که همان توان مصرفی در مقاومت R_1 است، برابر است با:

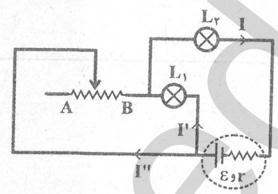
$$P_{\text{خروجی}} = \varepsilon I - rI^2 = 12\times 6 - 0/5\times 6^2 = 54W$$

$$P_R = R_1 I^2 = 1/5\times 6^2 = 54W$$

(فیزیک ۲- جریان الکتریکی و مدارهای جریان مستقیم، صفحه‌های ۶۱ تا ۷۷)

-۱۷۸ (میثم دشتیان)

با حرکت لغزنده به سمت نقطهٔ A مقدار مقاومت رئوستا افزایش یافته در نتیجه مقاومت معادل مدار نیز زیاد می‌شود. پس طبق رابطهٔ $I=\frac{\varepsilon}{R_{eq}+r}$، جریان عبوری از مولد کاهش خواهد یافت. لذا جریان عبوری از لامپ $L_۲$ کاهش یافته و بر اساس رابطهٔ $P_۲=R_۲I^۲$، توان مصرفی و نور لامپ $L_۲$ نیز کاهش خواهد یافت.

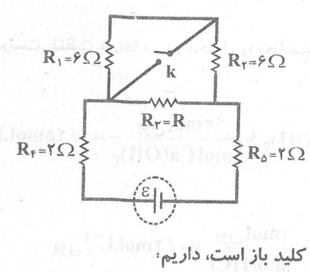


با توجه به کاهش جریان عبوری از مدار، طبق رابطهٔ $(V_{مولد}=\varepsilon-rI)$، اختلاف پتانسیل دو سر مولد افزایش می‌یابد و با توجه به کاهش اختلاف پتانسیل دو سر لامپ $L_۲$ طبق رابطهٔ $V_{L_۱}=V_{L_۲}+V_{رئوستا}$ و $V_{مولد}=V_{L_۱}$، $V_{L_۱}$ حتماً افزایش خواهد یافت و در نتیجه طبق رابطهٔ $P_۱=\frac{V_{L_۱}^۲}{R_۱}$، نور لامپ $L_۱$ بیشتر خواهد شد.

(فیزیک ۲- جریان الکتریکی و مدارهای جریان مستقیم، صفحه‌های ۶۱ تا ۷۷)

-۱۷۹ (میثم دشتیان)

طبق رابطهٔ $I=\frac{\varepsilon}{R_{eq}+r}$ چون $r=۰$ است پس $I\propto\frac{۱}{R_{eq}}$ بوده و چون جریان $\frac{۵}{۴}$ برابر شده پس R_{eq} در حالت دوم $\frac{۴}{۵}$ برابر شده است.



در حالت اول که کلید باز است، داریم:

$$R_{۱۲}=۱۲$$

$$R_{۱۲۳}=\frac{۱۲R}{۱۲+R}$$

$$(R_{eq})_۱=R_{۱۲۳}+R_۴+R_۵=۴+\frac{۱۲R}{۱۲+R}$$

در حالت دوم که کلید بسته است، مقاومت $R_۱$ دچار اتصال کوتاه شده و از مدار حذف می‌گردد. داریم:

$$R_{۲۳}=\frac{۶R}{۶+R}$$

$$(R_{eq})_۲=R_{۲۳}+R_۴+R_۵=\frac{۶R}{۶+R}+۴$$

بنابراین داریم:

$$(R_{eq})_۲=\frac{۴}{۵}(R_{eq})_۱\Rightarrow\left(\frac{۶R}{۶+R}+۴\right)=\frac{۴}{۵}\left(\frac{۱۲R}{۱۲+R}+۴\right)$$

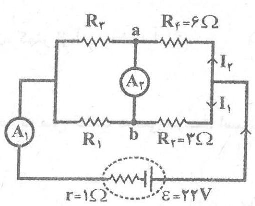
$$\Rightarrow\frac{۶R}{۶+R}+۴=\frac{۴۸R}{۶۰+۵R}+۳/۲$$

$$\Rightarrow\frac{۴۸R}{۶۰+۵R}-\frac{۶R}{۶+R}=۰/۸\Rightarrow R=۱۲\Omega$$

(فیزیک ۲- جریان الکتریکی و مدارهای جریان مستقیم، صفحه‌های ۶۱ تا ۶۶ و ۷۰ تا ۷۷)

-۱۸۰ (بیتا خورشید)

از آمپرسنج $A_۲$ جریانی عبور نمی‌کند و عدد صفر را نشان می‌دهد یعنی اختلاف پتانسیل دو نقطه‌ای که آمپرسنج به آنها وصل شده، صفر است. (دقت کنید که آمپرسنج به‌صورت متوالی در مدار قرار نگرفته است.) در این حالت بود و نبود شاخه‌ای که آمپرسنج $A_۲$ در آن قرار دارد، تأثیری در مدار ندارد.



$$V_a+۶I_۲-۳I_۱=V_b$$

$$\xrightarrow{V_a=V_b}I_۱=۲I_۲\qquad(۱)$$

از طرف دیگر آمپرسنج $A_۱$ جریان شاخهٔ اصلی مدار را نشان می‌دهد

$$I_۱+I_۲=۶A\qquad(۲)$$

با حل هم‌زمان معادله‌های (۱) و (۲) می‌توان نوشت:

$$\xrightarrow{(۱),(۲)}۲I_۲+I_۲=۶\Rightarrow I_۲=۲A\ ,\ I_۱=۴A$$

اختلاف پتانسیل دو سر مولد برابر است با:

$$V=\varepsilon-rI=۲۲-۱\times۶=۱۶V$$

حال با توجه به قانون اُهم و جریان‌های $I_۱$ و $I_۲$ در شاخه‌های پایینی و بالایی مدار، می‌توان نوشت:

$$I_۱=\frac{V}{R_۱+R_۳}=\frac{۱۶}{R_۱+۳}\Rightarrow۴=\frac{۱۶}{R_۱+۳}\Rightarrow R_۱=۱\Omega$$

$$I_۲=\frac{V}{R_۲+R_۴}=\frac{۱۶}{R_۲+۶}\Rightarrow۲=\frac{۱۶}{R_۲+۶}\Rightarrow R_۲=۲\Omega$$

(فیزیک ۲- جریان الکتریکی و مدارهای جریان مستقیم، صفحه‌های ۶۱ تا ۶۶ و ۷۰ تا ۷۷)

شیمی ۳

۱۸۱- (امیرعلی برخورداریون)

عبارت‌های «الف»، «ب» و «پ» نادرست هستند.

بررسی عبارت‌ها:

الف) مادهٔ حل شونده در ضدیخ، اتیلن گلیکول بوده و به دلیل برخورداری از گروه هیدروکسیل می‌تواند با مولکول‌های آب پیوند هیدروژنی برقرار کند.

ب) قدرت پاک‌کنندگی صابون برای پارچه نخی بیشتر از پارچهٔ پلی‌استر است.

پ) در آب دریا به دلیل وجود یون‌های Ca^{2+} و Mg^{2+} قدرت پاک‌کنندگی صابون، کمتر از آب چشمه است.

ت) این جمله با توجه به متن کتاب درسی درست است.

(شیمی ۳، صفحه‌های ۴، ۹ و ۱۰)

۱۸۲- (ساسان اسماعیل‌پور)

بررسی گزینه‌ها:

۱) درست:

$$N_2O_5(s)+H_2O(l)\longrightarrow 2H^+(aq)+2NO_3^-(aq)$$

از انحلال هر مول N_2O_5، ۴ مول یون تولید می‌شود؛ بنابراین از انحلال ۳ مول N_2O_5، ۱۲ مول یون تولید می‌شود.

۲) درست.

۳) درست:

فراورده‌های دیگر+گاز هیدروژن ← آب + مخلوط آلومینیم و سدیم هیدروکسید

۴) نادرست، این رسوب‌ها، با شوینده‌های خورنده پاک می‌شوند و پاک‌کننده‌های صابونی یا غیرصابونی قادر به زدودن آن‌ها نیستند.

(شیمی ۳، صفحه‌های ۱۲، ۱۳ و ۱۵)

۱۸۳- (جواد جدیری)

گزینهٔ «۱»: نادرست. کلوییدها، مخلوط‌های ناهمگن محسوب می‌شوند.

گزینهٔ «۲» درست. انحلال‌پذیری $Ca(OH)_2$ به‌صورت زیر است:

$$Ca(OH)_2(aq)\longrightarrow Ca^{2+}(aq)+2OH^-(aq)$$

$$?\,mol\,OH^- = 0/05\,mol\,Ca(OH)_2\times\frac{2\,mol\,OH^-}{1\,mol\,Ca(OH)_2}$$

$$=0/1\,mol\,OH^-$$

$$\Rightarrow [H^+][OH^-]=10^{-14}\Rightarrow [H^+]=10^{-13}\,mol.L^{-1}$$

گزینهٔ «۳»: نادرست. برای کاهش میزان اسیدی بودن آهک می‌زنند.

گزینهٔ «۴»: نادرست. غلظت یون‌ها در دو محلول را محاسبه می‌کنیم:

$$0/15\frac{mol}{L}Ca(OH)_2\times\frac{3\,mol\,\text{یون}}{1\,mol\,Ca(OH)_2}=0/45\,mol.L^{-1}\,\text{یون}$$

$$0/2\frac{mol}{L}HCl\times\frac{2\,mol\,\text{یون}}{1\,mol\,HCl}=0/4\,mol.L^{-1}\,\text{یون}$$

غلظت یون موجود در محلول ۰/۱۵ مولار کلسیم هیدروکسید بیشتر است، پس الکترولیت قوی‌تری است.

(شیمی ۳، صفحه‌های ۷، ۱۴ و ۱۷)

۱۸۴- (جواد جریری)

بررسی گزینه‌ها:

الف) نادرست: ثابت تعادل با تغییر دما تغییر می‌کند.

ب) نادرست: تنها در زمان تعادل سرعت تولید و مصرف واکنش‌دهنده‌ها و فراورده‌ها برابر است.

پ) درست.

ت) درست:

$$K_a = \frac{[H^+][HCOO^-]}{[HCOOH]} \Rightarrow ۱/۸\times۱۰^{-۴} = \frac{(۱/۸\times۱۰^{-۶})^۲}{[HCOOH]}$$

$$\Rightarrow [HCOOH] = \frac{(۱/۸\times۱۰^{-۶})^۲}{۱/۸\times۱۰^{-۴}} = ۱/۸\times۱۰^{-۸} mol.L^{-۱}$$

(شیمی ۳، صفحه‌های ۲۰ تا ۲۴)

۱۸۵- (محمد عظیمیان زواره)

با افزایش غلظت، ثابت یونش تغییری نمی‌کند؛ زیرا تنها عامل مؤثر بر ثابت تعادل (ثابت یونش) دما است، اما با تغییر غلظت درجهٔ یونش اسید HA تغییر می‌کند.

بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینهٔ «۱»: شمار مول‌های HA و HX در محلول هر دو اسید یکسان بوده و برای خنثی کردن محلول آنها مقدار مول یکسانی از NaOH لازم است.

گزینهٔ «۲»: HX اسید قوی محسوب شده و pH آن در شرایط یکسان از محلول HA کمتر است.

گزینهٔ «۳»: یکی از آنها اسید قوی و دیگری اسید ضعیف است و طبق رابطه $[H^+] = M.\alpha$، α نیز در غلظت H^+ مؤثر است. (α در اسیدهای ضعیف به غلظت و دما بستگی دارد.)

(شیمی ۳، صفحه‌های ۱۸ تا ۲۰)

۱۸۶- (محمد عظیمیان زواره)

برای افزایش قدرت پاک‌کردن چربی‌ها به شوینده‌ها جوش شیرین ($NaHCO_۳$) اضافه می‌کنند.

بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینهٔ «۱»: درست:

$$NaHCO_۳ + HCl \longrightarrow CO_۲ + H_۲O + NaCl$$

گزینهٔ «۲»: درست: این محیط بسیار اسیدی می‌تواند حتی فلز روی را در خود حل کند. با توجه به واکنش‌پذیری بیشتر Mg از Zn، فلز Mg نیز واکنش داده و حل خواهد شد.

گزینهٔ «۳»: درست.

(شیمی ۳، صفحه‌های ۲۴، ۳۱، ۳۲ و ۳۶)

۱۸۷- (محمدحسن محمدزاده‌مقدم)

ابتدا غلظت $[H^+]$ را تعیین کرده و سپس غلظت اولیهٔ اسید را محاسبه می‌کنیم:

$$pH = ۲/۷ \Rightarrow [H^+] = ۱۰^{-۲/۷} = ۱۰^{-۳}\times۱۰^{+۰/۳} = ۲\times۱۰^{-۳} mol.L^{-۱}$$

$$[H^+] = \alpha M_۰ \Rightarrow M_۰ = \frac{۲\times۱۰^{-۳}}{۲\times۱۰^{-۲}} = ۰/۱ mol.L^{-۱}$$

با توجه به واکنش زیر داریم:

$$HA + NaOH \longrightarrow NaA + H_2O$$

$$?mol\,NaOH = 2L\ \text{محلول} \times \frac{0/1molHA}{1L\ \text{محلول}} \times \frac{1mol\,NaOH}{1molHA}$$

$$= 0/2mol\ NaOH$$

(شیمی ۳، صفحه‌های ۱۸ تا ۲۰ و ۳۰ تا ۳۲)

۱۸۸- (محمدحسن محمدزاده‌مقدم)

معادلهٔ انحلال یونی Li_2O در آب به‌صورت زیر است.

$$Li_2O(s) + H_2O(l) \longrightarrow 2LiOH(aq)$$

واکنش خنثی‌سازی به‌صورت زیر است:

$$HBr + LiOH \longrightarrow H_2O + LiBr$$

غلظت H^+ در محلول اسید برابر است با:

$$pH = 1/4 \Rightarrow [H^+] = 10^{-1/4} = 10^{-2} \times 10^{0/6} = 4 \times 10^{-2} mol.L^{-1}$$

بنابراین می‌توان نوشت:

$$?gLi_2O = 200mL\ \text{محلول} \times \frac{1L}{1000mL} \times \frac{0/04molHBr}{1L\ \text{محلول}}$$

$$\times \frac{1mol\,LiOH}{1mol\,HBr} \times \frac{1mol\,Li_2O}{2mol\,LiOH} \times \frac{30g\,Li_2O}{1mol\,Li_2O} = 0/12g\ Li_2O$$

(شیمی ۳، صفحه‌های ۱۶ و ۳۰ تا ۳۲)

۱۸۹- (محمد عظیمیان‌زواره)

در دمای اتاق مقایسهٔ قدرت اسیدی به‌صورت زیر است:

$$HCOOH > CH_3COOH > HCN$$

بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینهٔ «۱»: با توجه به یکسان نبودن جرم مولی $NaOH$ و KOH، شمار یون‌ها در محلول آنها با هم متفاوت بوده و رسانایی الکتریکی آنها با هم متفاوت است.

گزینهٔ «۲»: محلول آبی استون خنثی است.

گزینهٔ «۳»: نیترو اسید (HNO_2) یک اسید ضعیف است.

(شیمی ۳، صفحه‌های ۱۷ و ۱۹ تا ۲۳)

۱۹۰- (محمد کوهستانیان)

$$CH_3COOH(aq) \rightleftharpoons CH_3COO^-(aq) + H^+(aq)$$

$$K_a = \frac{[H^+][CH_3COO^-]}{[CH_3COOH]} \Rightarrow 2\times10^{-6} = \frac{[H^+][CH_3COO^-]}{0/02}$$

$$\Rightarrow [H^+] = \sqrt{4\times10^{-8}} = 2\times10^{-4} mol.L^{-1}$$

$$HNO_2(aq) \rightleftharpoons H^+(aq) + NO_2^-(aq)$$

$$K_a = \frac{[H^+][NO_2^-]}{[HNO_2]} \Rightarrow [HNO_2] = \frac{[H^+][NO_2^-]}{K_a}$$

$$\Rightarrow [HNO_2] = \frac{2\times10^{-4}\times2\times10^{-4}}{5\times10^{-3}} = 8\times10^{-6} mol.L^{-1}$$

(شیمی ۳، صفحه‌های ۱۸ تا ۲۴)

شیمی ۱

-۱۹۱ (امیرعلی برخورداریون)

آلاینده‌های عمده‌ای که از سوختن سوخت‌های فسیلی تولید می‌شوند NO_2 و SO_2 (گوگرد دی‌اکسید) هستند. SO_2 ابتدا به SO_3 تبدیل شده و SO_3 با حل شدن در آب H_2SO_4 تولید و در نتیجه باران را اسیدی می‌کند. اما توجه شود فراوردهٔ عمدهٔ سوختن منابع فسیلی SO_3 نیست.

(شیمی ۱، صفحه‌های ۵۲، ۶۳، ۶۷ و ۶۸)

-۱۹۲ (حسن رحمتی‌کوکنده)

معادلهٔ موازنه شده به‌صورت زیر است:

$$K_2Cr_2O_7 + 14HCl \longrightarrow 2KCl + 2CrCl_3 + 3Cl_2 + 7H_2O$$

مجموع ضرایب واکنش دهنده‌ها = ۱۵

مجموع ضرایب فراورده‌ها = ۱۴

اختلاف موردنظر برابر ۱ است.

(شیمی ۱، صفحه‌های ۵۸ تا ۶۰)

-۱۹۳ (محمد عظیمیان‌زواره)

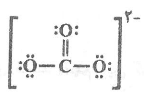
با توجه به فراورده حاصل مادهٔ A، CaO است.

الف) درست. از CaO (کلسیم اکسید) برای افزایش بهره‌وری در کشاورزی استفاده می‌شود.

ب) نادرست، CO_2 یک اکسید اسیدی است.

پ) درست. برای تبدیل CO_2 به مواد معدنی از MgO و CaO استفاده می‌شود و CO_2 یکی از گازهای گلخانه‌ای است.

ت) نادرست، با توجه به ساختار لوویس یون کربنات، ۸ جفت الکترون ناپیوندی وجود دارد.



(شیمی ۱، صفحه‌های ۶۴ تا ۶۷ و ۷۴)

-۱۹۴ (مینا شراختی‌پور)

کربن مونوکسید، گازی بی‌رنگ، بی‌بو و بسیار سمی است. چگالی $\left(\frac{\text{جرم}}{\text{حجم}}\right)$ این گاز کمتر از هوا است. در سوختن ناقص که شعله وسیلهٔ گازسوز زرد رنگ است، CO وارد هواکره می‌شود. سپس مطابق معادلهٔ زیر در واکنش با O_2 به CO_2 (اکسید پایدارتر کربن) تبدیل می‌شود.

$$2CO(g) + O_2(g) \longrightarrow 2CO_2(g)$$

(شیمی ۱، صفحه‌های ۵۳ و ۵۴)

-۱۹۵ (محمدحسن محمدزاده‌مقدم)

۱) 

۲) 

۳) 

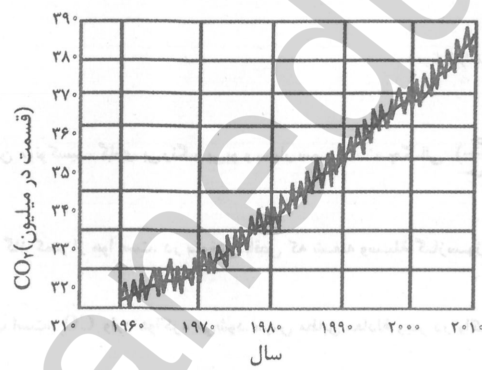
۴) 

(شیمی ۱، صفحه‌های ۶۴ و ۶۵)

۱۹۶- (مینا شرافتی‌پور)

فقط عبارت «ت» نادرست است.

نمودار تغییرات گاز کربن دی‌اکسید (مهم‌ترین گاز گلخانه‌ای) به‌صورت زیر است:



(شیمی ۱، صفحه‌های ۶۸ و ۶۹)

۱۹۷- (مینا شرافتی‌پور)

ابتدا میزان برق مصرفی ماهانه این کارخانه را به‌دست می‌آوریم:

$$\frac{۲۰۰۰۰\text{W.h}}{۱\text{دستگاه}} \times \frac{۶\text{دستگاه}}{۱\text{ساعت}} \times \frac{۸\text{ساعت}}{۱\text{روز}} \times ۳۰\text{روز}$$

$$\times \frac{۱\text{kW.h}}{۱۰۰۰\text{W.h}} = ۲۸۸۰۰\text{kW.h}$$

میزان کربن‌دی‌اکسید مصرفی توسط درختان برابر است با:

$$۳۴۵۶\text{درخت} \times \frac{۳\text{kg } CO_2}{۱\text{درخت}} = ۱۰۳۶۸\text{kg } CO_2$$

$$\frac{۱۰۳۶۸\text{kg}CO_2}{۲۸۸۰۰\text{kW.h}} = ۰/۳۶$$

در نتیجه منبع تولید برق گاز طبیعی بوده است.

(شیمی ۱، صفحهٔ ۷۱)

۱۹۸- (مینا شرافتی‌پور)

اوزون و اکسیژن آلوتروپ (دگرشکل) یکدیگرند.

(شیمی ۱، صفحه‌های ۷۷ تا ۸۱)

۱۹۹- (مینا شرافتی‌پور)

مولکول‌های A، همان CO_2 هستند.

$$\ddot{O} = C = \ddot{O}$$

$$\frac{\text{تعداد الکترون‌های پیوندی}}{\text{تعداد جفت الکترون‌های ناپیوندی}} = \frac{۴\times۲}{۴} = ۲$$

(شیمی ۱، صفحهٔ ۷۳)

۲۰۰- (مینا شرافتی‌پور)

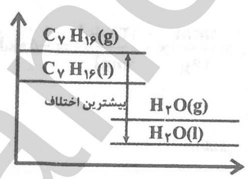
سوخت سبز سوختی است که در ساختار خود افزون بر کربن و هیدروژن، اکسیژن نیز دارد. این مواد زیست‌تخریب‌پذیرند. اتانول از جمله سوخت‌های سبز به‌شمار می‌رود.

(شیمی ۱، صفحهٔ ۷۴)

شیمی ۲

۲۰۱- (سیدمحمد معروفی)

در یک واکنش گرماده، هرچه اختلاف سطح انرژی واکنش دهنده‌ها و فراورده‌ها بیشتر باشد، انرژی آزاد شده بیشتر خواهد بود. با توجه به اینکه واکنش سوختن گرماده است و از طرفی سطح انرژی ماده در حالت فیزیکی گاز بیشتر از مایع است، داریم:



بنابراین واکنش «۲» بیشترین انرژی آزاد شده را دارد.

(شیمی ۲، صفحه‌های ۵۸ تا ۶۲)

۲۰۲- (محمدحسن محمدزاده‌مقدم)

بررسی گزینه‌ها:

۱) فرایند گوارش و سوخت و ساز شیر در بدن گرماده است.

۲) فرایند هم‌دما شدن بستنی با بدن گرماگیر بوده، اما فرایند سوخت و ساز آن گرماده است.

۳) میانگین انرژی جنبشی ذره‌ها معرف دما است. در دمای ثابت، میانگین انرژی جنبشی ذره‌ها بدون تغییر می‌ماند.

۴) واکنش اکسایش گلوکز در بدن گرماده بوده اما فرایند فتوسنتز گرماگیر است.

(شیمی ۲، صفحه‌های ۵۴ تا ۵۶ و ۵۸ تا ۶۱)

۲۰۳- (جعفر رحیمی)

انرژی آزاد شده حاصل از سوختن ۵۰ گرم شکلات:

$$\left.\begin{array}{l}\text{کربوهیدارت: } ۵۰\times\frac{۵}{۱۰۰}=۲/۵g \\ \text{چربی: } ۵۰\times\frac{۱۰}{۱۰۰}=۵g \\ \text{پروتئین: } ۵۰\times\frac{۵}{۱۰۰}=۲/۵g\end{array}\right\}\xrightarrow{\text{انرژی سوختی}}$$

$$\left.\begin{array}{l}۲/۵g\times ۱۷\frac{kJ}{g}=۴۲/۵kJ \\ ۵g\times ۳۸\frac{kJ}{g}=۱۹۰kJ \\ ۲/۵g\times ۱۷\frac{kJ}{g}=۴۲/۵kJ\end{array}\right\}۴۲/۵+۱۹۰+۴۲/۵=۲۷۵kJ$$

انرژی که صرف بالا رفتن دمای ۵۰۰ گرم آب به اندازهٔ $۲۰^\circ C$ می‌شود:

$$Q=mc\Delta\theta=۵۰۰\times ۴/۲\times ۲۰=۴۲۰۰۰J=۴۲kJ$$

درصد گرمای حاصل از سوختن شکلات که صرف افزایش دمای آب شده است برابر است با:

$$\text{درصدگرمای مورد نظر}=\frac{۴۲}{۲۷۵}\times ۱۰۰\simeq ۱۵/۲۷\%$$

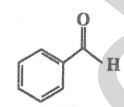
(شیمی ۲، صفحه‌های ۷۰ و ۷۱)

۲۰۴- (محمدحسن محمدزاده‌مقدم)

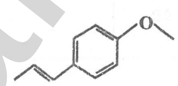
عبارت‌های «ب» و «پ» درست‌اند.

بررسی عبارت‌های نادرست:

الف): ترکیب آلی موجود در بادام بنزآلدهید نام دارد و به‌صورت زیر است.



ت): فرمول ساختاری ترکیب آلی موجود در رازیانه به‌صورت زیر بوده و گروه عاملی اتری دارد.



(شیمی ۲، صفحه‌های ۶۸ و ۶۹)

۲۰۵- (سیدمحمد معروفی)

$\Delta H =$ [مجموع آنتالپی پیوند واکنش‌دهنده‌ها] − [مجموع آنتالپی پیوند فراورده‌ها]

$$\Delta H = \Delta H(H-H) + \Delta H(Cl-Cl) - ۲\Delta H(H-Cl)$$

$$\Delta H = ۴۳۶ + ۲۴۲ - (۲ \times ۴۳۱) = -۱۸۴ kJ.mol^{-۱}$$

زمانی که یک گرم $H_۲$ در فرایند به‌طور کامل مصرف شود خواهیم داشت:

$$۱g H_۲ \times \frac{۱mol\, H_۲}{۲g\, H_۲} \times \frac{-۱۸۴kJ}{۱mol\, H_۲} = -۹۲kJ$$

(شیمی ۲، صفحه‌های ۶۵ تا ۶۸)

۲۰۶- (سالار ملکی)

گرمای حاصل از سوختن یک گرم از هر یک از هیدروکربن‌ها را محاسبه می‌کنیم.

۱) $۱g C_۲H_۶ \times \frac{۱mol}{۳۰g} \times \frac{۱۵۶۰kJ}{۱mol} = -۵۲kJ$

۲) $۱g C_۳H_۶ \times \frac{۱mol}{۴۲g} \times \frac{-۲۰۵۸kJ}{۱mol} = -۴۹kJ$

۳) $۱g C_۲H_۴ \times \frac{۱mol}{۲۸g} \times \frac{-۱۴۱۰kJ}{۱mol} = -۵۰/۳۵kJ$

۴) $۱g C_۲H_۲ \times \frac{۱mol}{۲۶g} \times \frac{-۱۳۰۰kJ}{۱mol} = -۵۰kJ$

(شیمی ۲، صفحه‌های ۷۰ و ۷۱)

۲۰۷- (مبینا شرافتی‌پور)

عبارت‌های «ب» و «ت» درست‌اند.

الف) در دورهٔ دوم گازهای $N_۲$، $O_۲$ و $F_۲$ وجود دارند، پیوند بین اتم‌های F یگانه، پیوند بین اتم‌های O دوگانه و پیوند بین اتم‌های N سه‌گانه است. بنابراین ترتیب انرژی پیوند به‌صورت زیر است:

انرژی پیوند : $N \equiv N > O = O > F - F$

ب) گرافیت پایدارتر از الماس است و علامت ΔH در تبدیل گرافیت به الماس مثبت است.

پ) واکنش $N_۲O_۴(g) \longrightarrow ۲NO_۲(g)$ گرماگیر است.

(شیمی ۲، صفحه‌های ۶۲ و ۶۴ تا ۶۷)

-۲۰۸ (محمدحسن محمدزاده‌مقدم)

ابتدا با توجه به قانون هس ΔH واکنش مورد نظر را به‌دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} 2CO(g) + O_2(g) \longrightarrow 2CO_2(g) & \Delta H' = -566kJ \\ 2NO(g) \longrightarrow N_2(g) + O_2(g) & \Delta H' = -181kJ \end{cases}$$

$$2CO(g) + 2NO(g) \longrightarrow 2CO_2(g) + N_2(g) \quad \Delta H = -747kJ$$

حال داریم:

$$?kJ = 500mLCO \times \frac{1L}{1000mL} \times \frac{1/4g\,CO}{1L\,CO} \times \frac{1mol\,CO}{28g\,CO}$$

$$\times \frac{747kJ}{2mol\,CO} = 9/3375kJ$$

(شیمی ۲، صفحه‌های ۷۲ تا ۷۵)

-۲۰۹ (امین نوروزی)

برای محاسبهٔ آنتالپی واکنش موردنظر طبق قانون هس به‌صورت زیر عمل می‌کنیم:

واکنش «۱» تقسیم بر ۳

واکنش «۲» ضرب در ۲

واکنش «۳» معکوس و ضرب در $\frac{2}{3}$

$$1)\ Fe_2O_3 + \frac{1}{3}CO \longrightarrow \frac{2}{3}Fe_3O_4 + \frac{1}{3}CO_2$$

$$\Delta H_1 = -\frac{48}{3} = -16kJ$$

$$2)\ 2FeO + 2CO \longrightarrow 2Fe + 2CO_2$$

$$\Delta H_2 = -11 \times 2 = -22kJ$$

$$3)\ \frac{2}{3}Fe_3O_4 + \frac{2}{3}CO \longrightarrow 2FeO + \frac{2}{3}CO_2$$

$$\Delta H_3 = -\frac{2}{3}(-21) = 14kJ$$

$$\Delta H = \Delta H_1 + \Delta H_2 + \Delta H_3 = -16 - 22 + 14 = -24kJ$$

(شیمی ۲، صفحه‌های ۷۲ تا ۷۵)

-۲۱۰ (محمدحسن محمدزاده‌مقدم)

اگر آنتالپی پیوند $H-H$ را برابر x و آنتالپی پیوند $N-N$ را برابر y در نظر بگیریم داریم:

واکنش دوم:

$\Delta H =$ [مجموع آنتالپی پیوند واکنش‌دهنده‌ها] − [مجموع آنتالپی پیوند فراورده‌ها]

$$-92 = [946 + 3x] - [6 \times 391]$$

$$\Rightarrow x = 436kJ.mol^{-1}$$

واکنش اول:

$\Delta H =$ [مجموع آنتالپی پیوند واکنش‌دهنده‌ها] − [مجموع آنتالپی پیوند فراورده‌ها]

$$\Rightarrow +91 = [946 + 2(436)] - [y + 4(391)]$$

$$y = 163kJ.mol^{-1}$$

(شیمی ۲، صفحه‌های ۶۲، ۶۵ تا ۶۸)