

## پاسخنامه تشریحی

۱ - گزینه ۱

$$2x^2 + kx + 1 - k = 0 \Rightarrow \text{حاصل ضرب ریشه‌ها} = \frac{c}{a} = 5 \Rightarrow \frac{1-k}{2} = 5 \Rightarrow 1-k = 10 \Rightarrow k = -9$$

$$\Rightarrow \text{معادله: } 2x^2 - 9x + 10 = 0 \Rightarrow \Delta = b^2 - 4ac = (-9)^2 - 4 \times 2 \times 10 = 81 - 80 = 1$$

$$\Rightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{9 \pm \sqrt{1}}{2(2)} \Rightarrow \text{ریشه‌ی بزرگ‌تر} = \frac{9+1}{4} = \frac{10}{4} = 2,5$$

۲ - گزینه ۲

$$6x^2 + (k+1)x + k = 0 \Rightarrow \text{مجموع ریشه‌ها} = -\frac{b}{a} = -\frac{k+1}{6} = \frac{1}{6}$$

$$\Rightarrow k+1 = -1 \Rightarrow k = -2 \Rightarrow \text{معادله: } 6x^2 - x - 2 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4 \times 6 \times (-2) = 1 + 48 = 49 \Rightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1 \pm \sqrt{49}}{2 \times 6}$$

$$\Rightarrow \text{ریشه‌ی مثبت} = \frac{1+7}{12} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$$

۳ - گزینه ۱

$$x^4 + 10x^2 + 9 = 0 \Rightarrow (x^2)^2 + 10x^2 + 9 = 0 \xrightarrow{\text{اتحاد جمله‌ی مشترک}} (x^2 + 9)(x^2 + 1) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^2 + 9 = 0 \rightarrow x^2 = -9 \rightarrow \text{ریشه‌ی حقیقی ندارد} \\ x^2 + 1 = 0 \rightarrow x^2 = -1 \rightarrow \text{ریشه‌ی حقیقی ندارد} \end{cases}$$

۴ - گزینه ۲

$$2x^2 + ax + 4 = 0 \quad \begin{cases} a = x^2 \text{ ضریب} = 2 \\ b = x \text{ ضریب} = a \\ c = \text{عدد ثابت} = 4 \end{cases}$$

در معادله‌ی درجه‌ی دوم به فرم  $ax^2 + bx + c = 0$  مجموع ریشه‌ها از رابطه‌ی  $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$  به دست می‌آید، که طبق گفته‌ی مسأله این مقدار برابر  $-\frac{9}{2}$  است:

$$-\frac{b}{a} = -\frac{a}{2} = -\frac{9}{2} \rightarrow 2a = 18 \rightarrow a = \frac{18}{2} = 9$$

عدد  $a = 9$  در معادله جای‌گذاری می‌کنیم و معادله به صورت  $2x^2 + 9x + 4 = 0$  درمی‌آید.

$$\Delta = b^2 - 4ac = (9)^2 - 4(2)(4) = 81 - 32 = 49$$

$$x_1, x_2 = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-9 \pm \sqrt{49}}{2(2)} = \frac{-9 \pm 7}{4} \begin{cases} x_1 = \frac{-9+7}{4} = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2} \\ x_2 = \frac{-9-7}{4} = -\frac{16}{4} = -4 \end{cases}$$

ریشه‌ی بزرگ‌تر عدد  $-\frac{1}{2}$  است.

۵ - گزینه ۴ اگر دو ریشه‌ی معادله را  $x'$  و  $x''$  بنامیم در صورتی معکوس یکدیگرند که حاصل ضرب آن‌ها برابر یک شود (با شرط  $\Delta > 0$ )

$$x'x'' = 1 \rightarrow \frac{c}{a} = 1 \rightarrow \frac{2m+6}{2} = 1 \rightarrow 2m+6 = 2 \rightarrow 2m = 2-6 \rightarrow 2m = -4 \rightarrow m = -2$$

$$\text{مجموع ریشه‌ها} = \frac{-b}{a} \rightarrow x' + x'' = \frac{-3m}{2} = \frac{-3(-2)}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

۶ - گزینه ۳ ابتدا معادله را به شکل استاندارد می‌نویسیم:

$$x(2x-5) = a \Rightarrow 2x^2 - 5x - a = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = x^2 \text{ ضریب} = 2 \\ b = x \text{ ضریب} = -5 \\ c = \text{عدد ثابت} = -a \end{cases}$$

ریشه‌ی مضاعف معادله‌ی درجه‌ی دوم  $ax^2 + bx + c = 0$  از رابطه‌ی  $x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a}$  به دست می‌آید. پس  $x_1 = x_2 = \frac{-(-5)}{2(2)} = \frac{5}{4}$  است.

$$7 - \text{گزینه ۲ ریشه‌های معادله، اعداد } \frac{2 \pm \sqrt{3}}{2} = \frac{2}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} = 1 \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ هستند.}$$

ابتدا یک بار مجموع ریشه‌های (S) و سپس حاصل ضرب ریشه‌ها (f) را به دست می‌آوریم:

$$S = 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} + 1 - \frac{\sqrt{3}}{2} = 2$$

$$P = \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \stackrel{\text{اتحاد مزدوج}}{=} (1)^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$$

حال مقادیر  $S = 2$  و  $P = \frac{1}{4}$  را در معادله‌ی  $x^2 - Sx + P = 0$  جایگزین کرده و به معادله‌ی  $x^2 - 2x + \frac{1}{4} = 0$  می‌رسیم.

۸ - گزینه ۲ مقدار  $x = 3$  را در معادله جایگذاری می‌کنیم:

$$\frac{x-2}{ax-5} = \frac{a+2}{x-1} - 1 \xrightarrow{x=3} \frac{3-2}{3a-5} = \frac{a+2}{3-1} - 1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{3a-5} = \frac{a+2-2}{2} \Rightarrow \frac{1}{3a-5} = \frac{a}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{3a-5} - \frac{a}{2} = 0 \Rightarrow \frac{2-3a^2+5a}{2(3a-5)} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{-3a^2+5a+2}{6a-10} = 0 \Rightarrow -3a^2+5a+2 = 0$$

$$\Rightarrow (3a+1)(2-a) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a=2 \\ a=-\frac{1}{3} \end{cases}$$

۹ - گزینه ۲ روش اول:

ابتدا در معادله به جای  $x$  عدد ۱ قرار می‌دهیم:

$$\frac{4}{a-2} + \frac{a}{2} = a \quad (1) \rightarrow \frac{4}{a-2} = \frac{a}{2} \rightarrow a^2 - 2a = 8$$

$$\rightarrow a^2 - 2a - 8 = 0 \xrightarrow{\text{تجزیه}} (a-4)(a+2) = 0 \Rightarrow a = -2, 4$$

روش دوم:

با امتحان کردن گزینه‌ها در رابطه (۱) می‌بینیم که گزینه ۲، صحیح است. یعنی ۴ و ۲ - صدق می‌کنند.

۱۰ - گزینه ۴  $m^2$  یک عدد همواره نامنفی است، لذا  $(m^2 + 4)$  یک عدد همواره مثبت می‌باشد. همچنین می‌دانیم حاصل قدرمطلق نامنفی است. لذا  $|1 - m|$  یک عدد نامنفی و قرینه آن، یعنی  $|1 - m| - 1$  نامثبت است پس عدد  $|1 - m| - 3$  یک عدد منفی می‌باشد. بنابراین طول نقطه  $(m^2 + 4, -3 - |1 - m|)$  مثبت و عرض منفی می‌باشد در نتیجه نقطه فوق در ربع چهارم دستگاه واقع است.

۱۱ - گزینه ۳ اگر طول و عرض مستطیل را به ترتیب  $x$  و  $y$  بنامیم، خواهیم داشت:

$$x = 3y$$

$$\text{محیط مستطیل} = (x + y) \times 2 \Rightarrow 120 = (3y + y) \times 2 \Rightarrow 120 = 8y$$

$$\Rightarrow y = \frac{120}{8} = 15 \text{ متر}$$

$$\Rightarrow x = 3y = 3(15) = 45 \text{ متر}$$

$$\Rightarrow \text{مساحت مستطیل} = x \cdot y = 45 \times 15 = 675 \text{ (متر مربع)}$$

۱۲ - گزینه ۲ تعداد گروه اول  $x =$

$$x + \frac{1}{2}x + \frac{1}{3} \times \frac{1}{2}x + 2 \times \frac{1}{2}x = 16$$

$$2x + \frac{1}{2}x + \frac{1}{6}x = 16 \Rightarrow \frac{16}{6}x = 16 \Rightarrow \frac{8}{3}x = 16 \Rightarrow x = \frac{16}{\frac{8}{3}} = \frac{16 \times 3}{8} = 6$$

$$x = \frac{3 \times 16}{8} = 6$$

$$\text{تعداد گروه دوم} = \frac{1}{2}x = \frac{1}{2} \times 6 = 3$$

۱۳ - گزینه ۱ در معادله‌ی درجه‌ی دوم  $ax^2 + bx + c = 0$  با ریشه‌های  $x_1$  و  $x_2$  داریم:

$$S = x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}, \quad P = x_1 x_2 = \frac{c}{a} \rightarrow \begin{cases} S = \frac{-1}{3} \\ P = \frac{-6}{3} \end{cases}$$

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{\text{مخرج مشترک}}{x_1 x_2} \Rightarrow \frac{x_2 + x_1}{x_1 x_2} = \frac{-b}{a} = \frac{-1}{3} = \frac{3}{18} = \frac{3}{6}$$

۱۴ - گزینه ۱

$$3(x+2) = 4\left(-\frac{1}{2}x+9\right) \Rightarrow 3x+6 = 4 \times \left(-\frac{1}{2}x\right) + 36$$

$$\Rightarrow 3x+6 = -2x+36 \Rightarrow 3x+2x = 36-6 \Rightarrow 5x = 30 \Rightarrow x = 6$$

۱۵ - گزینه ۲ با جایگذاری  $x = 1$  در معادله  $b$  به دست می آید:

$$x = 1 \Rightarrow \frac{(1)^2 - 8}{1 + 12} = \frac{1 - 3}{1 + 4} + \frac{b(1)^2}{1 + 3} \Rightarrow \frac{-7}{13} = \frac{-2}{5} + \frac{b}{4} \Rightarrow \frac{2}{5} - \frac{7}{13} = \frac{b}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{-35 + 36}{65} = \frac{b}{4} \Rightarrow \frac{-9}{65} = \frac{b}{4} \Rightarrow b = \frac{-36}{65}$$

۱۶ - گزینه ۳

$$-3x^2 + x + (k^2 + 1) = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 1^2 - 4(-3)(k^2 + 1) = 1 + 12(k^2 + 1) > 0$$

چون  $\Delta > 0$  پس معادله همواره دو ریشه‌ی حقیقی دارد از طرفی:

$$\text{حاصل ضرب ریشه‌ها} = x_1 x_2 = \frac{c}{a} = \frac{k^2 + 1}{-3} < 0$$

چون حاصل ضرب ریشه‌ها منفی شده، پس معادله دو ریشه‌ی مختلف‌العلامت دارد.

نکته: اگر  $\frac{c}{a} < 0$  باشد، معادله‌ی درجه‌ی دوم حتماً دو ریشه‌ی حقیقی مختلف‌العلامت دارد و نیازی به چک کردن  $\Delta$  نیست.

۱۷ - گزینه ۴ عدد مورد نظر را  $x$  در نظر می‌گیریم و صورت مسأله را به زبان ریاضی می‌نویسیم.

$$3x - 5 = x \rightarrow 3x - x = 5 \rightarrow 2x = 5 \rightarrow x = \frac{5}{2}$$

۱۸ - گزینه ۱

$$3x - 2x^2 = 1 \Rightarrow 2x^2 - 3x + 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -3 \\ c = 1 \end{cases}$$

$$\Delta = (-3)^2 - 4(2)(1) = 9 - 8 = 1$$

$$x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{1}}{2(2)} = \begin{cases} x_1 = \frac{3+1}{4} = 1 \\ x_2 = \frac{3-1}{4} = \frac{1}{2} \end{cases}$$

۱۹ - گزینه ۳

$$3x^2 - 5x - 1 = 0 \rightarrow 3x^2 - 5x = 1 \xrightarrow{\text{طرفین معادله را به ضریب } x^2} x^2 - \frac{5}{3}x = \frac{1}{3}$$

$x^2$  یعنی ۳ تقسیم می‌کنیم

حال مربع نصف ضریب  $x$  را به دو طرف معادله باید اضافه کنیم یعنی:

$$\left(\frac{-5}{6}\right)^2 = \left(\frac{-5}{6}\right)^2 = \frac{25}{36}$$

۲۰ - گزینه ۴

$$2x(x+3) = 7 \rightarrow 2x^2 + 6x = 7 \rightarrow x^2 + 3x = \frac{7}{2}$$

در روش مربع کامل، پس از آن که ضریب  $x^2$  را به یک تبدیل کردیم باید عدد  $\left(\frac{b}{2}\right)^2 = \frac{b^2}{4}$  را به دو طرف تساوی اضافه کنیم. لذا در این معادله هم، باید عدد  $\frac{9}{4} = \frac{3^2}{4}$  را به دو طرف تساوی، اضافه کنیم.