پاسخنامه تشریحی

۱ - گزینه ۳

$fog(x)$ را تشکیل داده و بدون ساده کردنش دامنه را پیدا می‌کنیم.

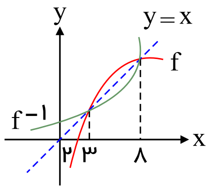
$$fog(x)=\frac{\sqrt{1-\tan^2 x}}{\tan x}$$

$$\begin{cases} 1-\tan^2 x \geq 0 \Rightarrow \tan^2 x \leq 1 \Rightarrow -1 \leq \tan x \leq 1 \Rightarrow -\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{4} \quad (\text{از روی دایره‌ی مثلثاتی}) \\ \tan x \neq 0 \Rightarrow \frac{\sin x}{\cos x} \neq 0 \Rightarrow \sin x \neq 0 \Rightarrow x \neq k\pi \Rightarrow x \neq 0,\ \pi, 2\pi, \cdots \end{cases}$$

$$D_{fog}=[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}]-\{0\}=[\frac{-\pi}{4},0)\cup(0,\frac{\pi}{4}]$$

۲ - گزینه ۴ برای به‌دست آوردن دامنه‌ی تعریف توابع رادیکالی با فرجه‌ی زوج، کافی است زیر رادیکال را بزرگ‌تر مساوی صفر قرار دهیم.

$$x-f^{-1}(x) \geq 0 \rightarrow x \geq f^{-1}(x)$$



نمودارهای f و f^{-1} نسبت به نیمساز ناحیه‌ی اول و سوم متقارن هستند و باتوجه به $x \geq f^{-1}(x)$ باید به دنبال فواصلی باشیم که خط $y=x$ بزرگ‌تر مساوی تابع f^{-1} باشد یعنی $[3,8]$.

۳ - گزینه ۴ روش اول:

ابتدا دامنه‌ی تعریف دو تابع g , f را به‌دست می‌آوریم:

$$D_f: 3-x \geq 0 \rightarrow x \leq 3$$

$$D_g: x^2+2x>0 \rightarrow x(x+2)>0 \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} x<-2 \ \text{یا}\ x>0$$

$$D_{fog}=\{x\in D_g ,\ g(x)\in D_f\}=\{x<-2 \ \text{یا}\ x>0 ,\ \log_2^{x^2+2x} \leq 3\}$$

$$=\{x<-2 \ \text{یا}\ x>0 ,\ x^2+2x \leq 2^3\}=\{x<-2 \ \text{یا}\ x>0 ,\ x^2+2x-8 \leq 0\}$$

$$=\{x<-2 \ \text{یا}\ x>0 ,\ (x+4)(x-2) \leq 0\}=\{x<-2 \ \text{یا}\ x>0 ,\ -4 \leq x \leq 2\}$$

$$=4 \leq x<-2 \ \text{یا}\ 0<x \leq 2 \rightarrow [-4,-2)\cup(0,2]$$

البته می‌توانیم $fog(x)$ را تشکیل داده (تابع را ساده نکنید) سپس دامنه‌ی آن را به‌دست آورید.

روش دوم:

$x=-1$: در دامنه‌ی تعریف g قرار ندارد بنابراین در دامنه‌ی تعریف fog هم نباید باشد یعنی هر گزینه‌ای که $x=-1$ دارد نادرست است. پس فقط گزینه‌ی چهارم درست است.

۴ - گزینه ۴ روش اول:

$$2x-3=t \rightarrow 2x=t+3 \rightarrow x=\frac{t+3}{2}$$

$$\text{پس}: f(t)=4(\frac{t+3}{2})^2-14(\frac{t+3}{2})+13 \rightarrow f(t)=(t+3)^2-7(t+3)+13$$

$$\rightarrow f(t)=t^2+9+6t-7t-21+13 \rightarrow f(t)=t^2-t+1 \rightarrow f(x)=x^2-x+1$$

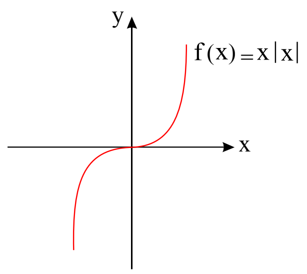
روش دوم: یک عدد دلخواه مانند $x=2$ را انتخاب می‌کنیم.

$$f(2x-3)=4x^2-14x+13 \xrightarrow{x=2} f(1)=16-28+13 \rightarrow f(1)=1$$

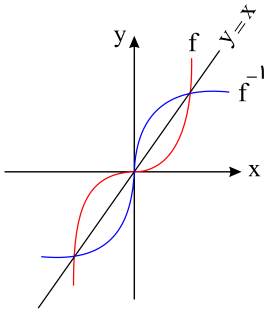
تنها گزینه‌ی چهارم است که اگر به جای x آن عدد یک قرار دهیم حاصل برابر یک می‌شود.

۵ - گزینه ۳

$$f(x)=x|x|=\begin{cases} x^2 & x \geq 0 \\ -x^2 & x<0 \end{cases} \rightarrow$$



برای رسم تابع معکوس، کافی است قرینه‌ی شکل را نسبت به نیمساز ناحیه‌ی اول و سوم، رسم کنیم.



۶ - گزینه ۲ تابع را به صورت دو ضابطه‌ای می‌نویسیم:

$$f(x)=\begin{cases} 0 \;; & x\ge 0 \\ 2x\;; & x<0 \end{cases} \Rightarrow (gof)(x)=\begin{cases} \log\frac{0-1}{0+1} \;; & x\ge 0 \ \text{نشدنی} \\ \log\frac{2x-1}{2x+1}\;; & x<0 \end{cases}$$

شرط معنی داشتن تابع لگاریتمی:

$$\frac{2x-1}{2x+1}>0, x<0 \Rightarrow x<-\frac{1}{2}$$

باتوجه به دامنه تابع داریم:

$$x<-\frac{1}{2}\Rightarrow 2x<-1\Rightarrow 2x+1<0\Rightarrow \frac{1}{2x+1}<0\Rightarrow \frac{-2}{2x+1}>0$$

$$(gof)(x)=\log\frac{2x-1}{2x+1}=\log(1+\frac{-2}{2x+1})>\log 1$$

در نتیجه $(gof)(x)>0$ پس برد تابع gof مجموعه اعداد مثبت است و به صورت $\{x : x>0\}$ نمایش می‌دهند.

۷ - گزینه ۲ تابعی معکوس‌پذیر است که در آن فاصله اکیداً سعودی یا اکیداً نزولی باشد.

تابع $f(x)=|2x-1|-|2x+6|$ را به صورت چند ضابطه‌ای می‌نویسیم:

$$f(x)=\begin{cases} -2x+1+2x+6=7 & x<-3 \\ -2x+1-2x-6=-4x-5 & -3\le x\le \frac{1}{2} \\ 2x-1-2x-6=-7 & x>\frac{1}{2} \end{cases}$$

تابع با ضابطه $f(x)=-4x-5$ در بازه $\left[-3,\frac{1}{2}\right]$ معکوس‌پذیر است. چون ضریب x منفی بوده و تابع اکیداً نزولی است پس معکوس آن به صورت $f^{-1}(x)=-\frac{1}{4}(x+5)$ در بازه $[-7,7]$ است. پس ضابطه وارون $-\frac{1}{4}(x+5), |x|\le 7$

۸ - گزینه ۴

می‌دانیم: $\boxed{\cos 2x=\cos^2 x-\sin^2 x}$

$$f(g(x))=\frac{1-(g(x))^2}{1+(g(x))^2}=\frac{1-\tan^2 x}{1+\tan^2 x}=\frac{1-\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}}{1+\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}}=\frac{\cos^2 x-\sin^2 x}{\cos^2 x+\sin^2 x}=\frac{\cos 2x}{1}=\cos 2x$$

۹ - گزینه ۱ روش اول:

$$\begin{cases} x\ge 0\;;\; y=\frac{x}{1+x}\Rightarrow y+xy=x\Rightarrow x=\frac{y}{1-y}\xrightarrow{x\ge 0}\frac{y}{1-y}\ge 0\xrightarrow{\text{تعیین علامت}}0\le y<1 & (1) \\ x\le 0\;;\; y=\frac{x}{1-x}\Rightarrow y-xy=x\Rightarrow x=\frac{y}{1+y}\xrightarrow{x\le 0}\frac{y}{1+y}\le 0\xrightarrow{\text{تعیین علامت}}-1<y\le 0 & (2) \end{cases}$$

بنابراین داریم:

$$x=\begin{cases} \frac{y}{1-y}\;;\; 0\le y<1 \\ \frac{y}{1+y}\;;\; -1<y\le 0 \end{cases}\Rightarrow x=\frac{y}{1-|y|}\;,\quad |y|<1\rightarrow f^{-1}(x)=\frac{x}{1-|x|}\;;\; |x|<1$$

روش دوم:

می‌توانید نقطه‌ی دلخواهی از تابع را در نظر گرفته و جای x و y را عوض کرده و کنترل کنیم که این مختصات در کدام ضابطه صدق می‌کند. به عنوان مثال، نقطه‌ی $(2,\frac{2}{3})$ متعلق به تابع است. پس نقطه‌ی $(\frac{2}{3},2)$ متعلق به ضابطه‌ی تابع وارون می‌باشد. با کمی دقت پی می‌بریم که این مختصات تنها در گزینه‌ی ۱ صدق می‌کند.

۱۰ - گزینه ۱

ابتدا x را برحسب y به‌دست می‌آوریم و سپس جای x و y را عوض می‌کنیم.

$$y=2-\sqrt{x-1}\Rightarrow(\sqrt{x-1})^2=(2-y)^2\Rightarrow x-1=4-4y+y^2$$

$$\Rightarrow x=y^2-4y+5\quad\Rightarrow\quad f^{-1}(x)=x^2-4x+5\;,\; x\le 2$$

چون $\sqrt{x-1}$ مثبت است، پس $-\sqrt{x-1}$ منفی بوده و $y = ۲ - \sqrt{x-1}$ همواره کوچک تر مساوی ۲ می شود، بنابراین دامنه‌ی تابع معکوس $x \leq ۲$ است.