پاسخنامه تشریحی

۱ - گزینه ۴

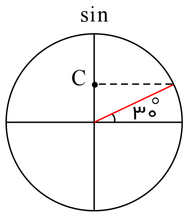
$$-1 \le \sin x \le 1 \to -5 \le 5\sin x \le 5$$
$$\xrightarrow{-3} -8 \le 5\sin x - 3 \le 2 \to |5\sin x - 3| \le 8 \Rightarrow Max = 8$$

۲ - گزینه ۳

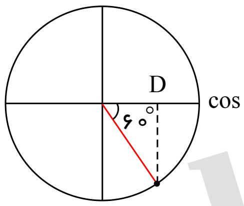
$$A = \frac{\sqrt{3} - 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} + 1}{\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 - \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + 1} = \frac{\sqrt{3} - \sqrt{3} + 1}{\frac{1}{3} - \frac{1}{4} + 1} = \frac{1}{\frac{4-3+12}{12}} = \frac{1}{\frac{13}{12}} = \frac{12}{13}$$

$$A = \frac{12}{13} \Rightarrow \frac{13A}{2} = \frac{13}{2} \times \frac{12}{13} = 6$$

۳ - گزینه ۱ با بدست آوردن مختصات نقاط D و C از روی نسبت‌های مثلثاتی، طول پاره‌خط CD را بدست می‌آوریم:



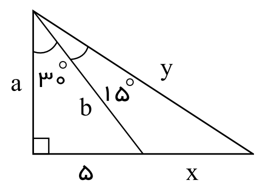
$$\sin 30 = \frac{1}{2} \to C(0, \frac{1}{2})$$



$$\cos(360 - 60) = \cos 60 = \frac{1}{2} \to D(\frac{1}{2}, 0)$$

$$|CD| = \sqrt{(x_D - x_C)^2 + (y_D - y_C)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{2}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

۴ - گزینه ۳



$$\sin 30 = \frac{1}{2} = \frac{5}{b} \Rightarrow b = 10$$

$$\cos 30 = \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{a}{10} \Rightarrow a = 5\sqrt{3}$$

$$\cos 45 = \frac{5\sqrt{3}}{y} = \frac{\sqrt{2}}{2} \to y = 10\sqrt{\frac{3}{2}}$$

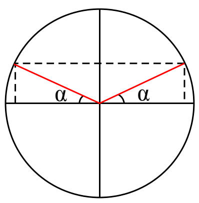
$$\sin 45 = \frac{x+5}{10\sqrt{\frac{3}{2}}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow x + 5 = 5\sqrt{3} \to x = 5\sqrt{3} - 5$$

$$x + y = 5\sqrt{3} - 5 + 10\sqrt{\frac{3}{2}} = 5(\sqrt{3} - 1 + 2\sqrt{\frac{3}{2}})$$

۵ - گزینه ۱

$$\left.\begin{array}{l} \sin\alpha = \frac{AH}{AC} \\ \cot\beta = \frac{BH}{AH} \end{array}\right. \Rightarrow \cot\ \beta \times \sin\alpha = \frac{BH}{AH} \times \frac{AH}{AC} = \frac{BH}{AC}$$

۶ - گزینه ۳ با توجه به دایره مثلثاتی : $\sin\alpha = \sin(180 - \alpha)$ و $\cos\alpha = -\cos(180 - \alpha)$.



$$\sin 120 = \sin(180-120) = \sin 60 = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 180 = -\cos(180-180) = -\cos 0 = -1$$

$$\cos 150 = -\cos(180-30) = -\cos 30 = \frac{-\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan 135 = \frac{\sin 135}{\cos 135} = \frac{\sin(180-45)}{\cos(180-45)} = \frac{\sin 45}{-\cos 45} = -\tan 45^\circ = -1$$

$$\frac{2\sin 120 - 2\cos 180}{2\cos 150 + 2\tan 135} = \frac{\sqrt{3}+2}{-\sqrt{3}-2} = \frac{\sqrt{3}+2}{-(\sqrt{3}+2)} = -1$$

۷ ـ گزینه ۱ باتوجه به دایره‌ی مثلثاتی، تانژانت در ربع‌های اول و سوم مثبت است و سینوس در ربع‌های سوم و چهارم منفی و در نتیجه α در ربع سوم واقع است که: $-1 < \cos\alpha < 0$

$$-1 < \frac{2m-1}{5} < 0 \xrightarrow{\times 5} -5 < 2m-1 < 0 \xrightarrow{+1} -4 < 2m < 1 \xrightarrow{\div 2}$$

$$-2 < m < \frac{1}{2} \xrightarrow{\times 4} -8 < 4m < 2 \xrightarrow{-5} -13 < 4m-5 < -3$$

$$\xrightarrow{\div 3} \frac{-13}{3} < \frac{4m-5}{3} < -1 \to \frac{-13}{3} < A < -1$$

۸ ـ گزینه ۴

α در ربع چهارم:

$$3m - 2 < 0 \to 3m < 2 \to m < \frac{2}{3}$$

۹ ـ گزینه ۲

$$45 \le \alpha \le 90 \to \frac{\sqrt{2}}{2} \le \sin\alpha \le 1 \Rightarrow \frac{1}{2} \le \sin^2\alpha \le 1$$

$$\xrightarrow{+1} \frac{3}{2} \le \sin^2\alpha + 1 \le 2$$

۱۰ ـ گزینه ۳

برای هر زاویه‌ی x داریم: $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

$$A = (\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)^2 - 2\sin^2\alpha\cos^2\alpha + 2\sin^2\alpha\cos^2\alpha$$

$$\Rightarrow A = (\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)^2 = 1^2 = 1$$

۱۱ ـ گزینه ۳

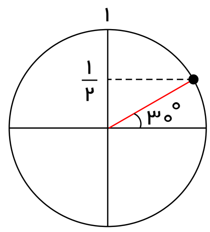
برای هر زاویه‌ی α: $-1 \le \sin\alpha \le 1$ یعنی حداکثر سینوس آن ۱ و حداقل آن -1 است.

وقتی α دربازه‌ی $[30, 90]$ است، تغییرات آن محدودتر می‌شود. دایره را ببینید.

$$30^\circ < \alpha \le 90 \xrightarrow{\sin(\ )} \frac{1}{2} < \sin\alpha \le 1$$

$$\xrightarrow{\sin\alpha = \frac{2m-1}{4}} \frac{1}{2} < \frac{2m-1}{4} \le 1 \xrightarrow{\times 4} 2 < 2m-1 \le 4$$

$$\xrightarrow{+1} 3 < 2m \le 5 \xrightarrow{\div 2} \frac{3}{2} < m \le \frac{5}{2}$$



۱۲ ـ گزینه ۲

شیب خطی که باجهت مثبت محور x ها زاویه‌ی θ بسازد برابر $\tan\theta$ است
معادله‌ی خطی که با شیب m از نقطه $\begin{vmatrix} x_0 \\ y_0 \end{vmatrix}$ بگذرد،عبارتست از $y - y_0 = m(x - x_0)$

شیب خط $= \tan 60^\circ = \sqrt{3}$

عرض از مبدأ ۲ است. یعنی خط از نقطه‌ی $\begin{vmatrix} 0 \\ 2 \end{vmatrix}$ می گذرد.

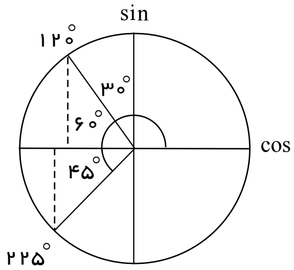
معادله‌ی خط: $y - 2 = \sqrt{3}(x - 0)$

$$y = \sqrt{3}x + 2 \Rightarrow y - \sqrt{3}x = 2$$

ریاضی

۱۳ - گزینه ۴

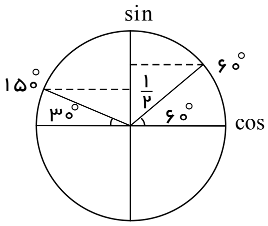
با توجه به شکل:



$\cos ۱۲۰ = \frac{-۱}{۲}$

$-۱ \leq \cos x \leq \frac{-۱}{۲}$

۱۴ - گزینه ۳



$\frac{۱}{۲} \leq \sin x \leq ۱$

$\frac{۱}{۲} \leq \frac{۳-m^۲}{۳+m^۲} \leq ۱$

$۱)\ \frac{۳-m^۲}{۳+m^۲} \leq ۱ \xrightarrow{\times(۳+m^۲)} ۳-m^۲ \leq ۳+m^۲ \to -m^۲ \leq m^۲$ همواره برقرار است.

$۲)\ \frac{۱}{۲} \leq \frac{۳-m^۲}{۳+m^۲} \xrightarrow{\times ۳+m^۲} \frac{۳+m^۲}{۲} \leq ۳-m^۲ \xrightarrow{\times ۲} ۳+m^۲ \leq ۶-۲m^۲ \to ۳m^۲ \leq ۳ \to m^۲ \leq ۱ \Rightarrow |m| < ۱$

۱۵ - گزینه ۱

$$\frac{\sin^۴ x+\cos^۴ x}{\sin^۲ x\cos^۲ x} - (\tan x+\cot x)^۲ =$$

$$\frac{\sin^۴ x}{\sin^۲ x\cos^۲ x} + \frac{\cos^۴ x}{\sin^۲ x\cos^۲ x} - \left(\frac{\sin x}{\cos x}+\frac{\cos x}{\sin x}\right)^۲ =$$

$$\frac{\sin^۲ x}{\cos^۲ x} + \frac{\cos^۲ x}{\sin^۲ x} - \left(\frac{\sin^۲ x}{\cos^۲ x}+\frac{\cos^۲ x}{\sin^۲ x}+۲\frac{\sin x}{\cos x}\times\frac{\cos x}{\sin x}\right)$$

$$= \frac{\sin^۲ x}{\cos^۲ x} + \frac{\cos^۲ x}{\sin^۲ x} - \frac{\sin^۲ x}{\cos^۲ x} - \frac{\cos^۲ x}{\sin^۲ x} - ۲ = -۲$$

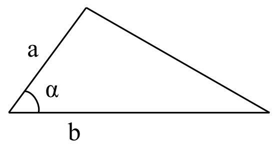
۱۶ - گزینه ۲

$$\left(\frac{\sqrt{۲}}{۲}-\frac{۱}{۲}\right)\left(\frac{۱}{۲}+\frac{\sqrt{۲}}{۲}\right) = \left(\frac{\sqrt{۲}}{۲}-\frac{۱}{۲}\right)\left(\frac{\sqrt{۲}}{۲}+\frac{۱}{۲}\right)$$

$$\left(\frac{\sqrt{۲}}{۲}\right)^۲ - \left(\frac{۱}{۲}\right)^۲ = \frac{۱}{۲}-\frac{۱}{۴} = \frac{۲-۱}{۴} = \frac{۱}{۴}$$

۱۷ - گزینه ۳

می‌دانیم: در هر مثلث دلخواه به فرم زیر داریم:



$S = \frac{۱}{۲} \times a \times b \times \sin\alpha$

باتوجه به قضیهٔ فیثاغورس در مثلث‌های قائم‌الزاویهٔ $\overset{\triangle}{ABM}$، $\overset{\triangle}{ADN}$ و $\overset{\triangle}{MNC}$ داریم:

$AM = AN = \sqrt{۵}\ ,\ MN = \sqrt{۲}$

از طرفی داریم:

$$S_{\overset{\triangle}{AMN}} = \frac{۱}{۲} \times AM \times AN \times \sin\theta$$

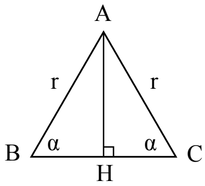
$$\xrightarrow{S_{\overset{\triangle}{AMN}} = S_{ABCD} - (S_{\overset{\triangle}{ABM}} + S_{\overset{\triangle}{ADN}} + S_{\overset{\triangle}{MNC}})} (۴-(۱+۱+\frac{۱}{۲})) = \frac{۱}{۲} \times \sqrt{۵} \times \sqrt{۵} \times \sin\theta$$

$$\Rightarrow \frac{۳}{\cancel{۲}} = \frac{\sqrt{۲۵}}{\cancel{۲}}\sin\theta \Rightarrow \sin\theta = \frac{۳}{۵}$$

ریاضی

۱۸ - گزینه ۲

می‌دانیم: $\boxed{S_{\overset{\triangle}{ABC}} = \frac{1}{2} AB \cdot BC \cdot \sin \hat{B}}$



بنابراین: $HB = r \cdot \cos\alpha$

$$S_{\overset{\triangle}{ABH}} = \frac{1}{2} AB \cdot BH \cdot \sin\alpha = \frac{1}{2} r \cdot (r\cos\alpha)\sin\alpha$$

پس داریم:

$$S_{\overset{\triangle}{ABC}} = 2S_{\overset{\triangle}{ABH}} = r^2 \sin\alpha\cos\alpha = \frac{r^2}{3} \Rightarrow \sin\alpha\cos\alpha = \frac{1}{3}$$

برای به‌دست آوردن $\sin\alpha + \cos\alpha$ از اتحاد مربع دو جمله‌ای کمک می‌گیریم.

$$(\sin\alpha + \cos\alpha) = \underbrace{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha}_{1} + 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha$$

$$\Rightarrow (\sin\alpha + \cos\alpha)^2 = 1 + \frac{2}{3} = \frac{5}{3} \xrightarrow[\sin\alpha + \cos\alpha > 0]{\text{حاده } \alpha} \sin\alpha + \cos\alpha = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{15}}{3}$$

۱۹ - گزینه ۳

می دانیم: $cot60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}, tan30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}, cos45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}, sin30^\circ = \frac{1}{2}, tan60^\circ = \sqrt{3}$

$$A = \frac{2 \times \frac{\sqrt{3}}{3}}{1 - \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2} + 4 \times \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right) - \sqrt{3} = \frac{\frac{2}{3}\sqrt{3}}{\frac{2}{3}} + 4 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} - \sqrt{3}$$
$$= \sqrt{3} + 1 - \sqrt{3} = 1$$

۲۰ - گزینه ۱

$\boxed{\alpha + \beta = 90 \Rightarrow \sin\alpha = \cos\beta}$

می‌دانیم در ضرب خاصیت جابجایی وجود دارد؛

پس عبارت بالا را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{\sin 1}{\cos 89} \times \frac{\sin 2}{\cos 88} \times \cdots \times \frac{\sin 89}{\cos 1} \\ \sin 1 = \cos 89 \Rightarrow \frac{\sin 1}{\cos 89} = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow 1 \times 1 \times \cdots \times 1 = 1$$

ریاضی