

## پاسخنامه تشریحی

۱ - گزینه ۱

$$\begin{aligned} (A \cup (A \cap B))' \cap ((B \cap A) \cup (B - A)) &= (A' \cap (A \cap B)') \cap (B \cap \underbrace{(A \cup A')}_M) \\ &= (A' \cap (A' \cup B')) \cap \underbrace{(B \cap M)}_B = A' \cap (A' \cup B') \cap B \\ &= A' \cap ((A' \cup B') \cap B) = A' \cap ((A' \cap B) \cup \underbrace{(B' \cap B)}_\emptyset) \\ &= A' \cap (A' \cap B) = \underbrace{(A' \cap A')}_{A'} \cap B = A' \cap B = A' - B' \end{aligned}$$

۲ - گزینه ۲

$$\begin{aligned} A_1 &= \{m \in \mathbb{Z} \mid -1 \leq m \leq 7\} = \{-1, 0, \dots, 7\} \\ A_2 &= \{m \in \mathbb{Z} \mid -2 \leq m \leq 6\} = \{-2, -1, \dots, 6\} \\ &\vdots \\ A_8 &= \{-8, -7, \dots, 0\} \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} \bigcup_{i=1}^8 A_i &= \{-8, -7, -6, \dots, 5, 6, 7\} \Rightarrow \text{تعداد اعضا} = 16 \\ \bigcap_{i=1}^8 A_i &= \{-1, 0\} \Rightarrow \text{تعداد اعضا} = 2 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} (-) &\rightarrow \text{تعداد اعضای باقی مانده} = 14 \end{aligned}$$

۳ - گزینه ۴ به کمک روابط  $S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d)$  و  $a_n = a_1 + (n-1)d$  می توان نوشت:

$$\begin{aligned} \begin{cases} a_1 + a_2 + \dots + a_8 = 60 \\ a_2 + a_8 = 3(a_1 + a_2 + a_8) \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} \frac{8}{2}(2a_1 + 7d) = 60 \\ a_1 + 7d + a_1 + 7d = 3(a_1 + 3d) \end{cases} \\ \begin{cases} 5a_1 + 10d = 60 \\ 2a_1 + 7d - 9a_1 - 9d = 0 \end{cases} &\xrightarrow{\times 5} \begin{cases} 5a_1 + 10d = 60 \\ -7a_1 - 2d = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5a_1 + 10d = 60 \\ -35a_1 - 10d = 0 \end{cases} \\ -30a_1 = 60 &\Rightarrow 5a_1 = \frac{60}{-30} = -2 \\ a_1 = -2 &\rightarrow -7(-2) - 2d = 0 \Rightarrow 14 = 2d \Rightarrow d = \frac{14}{2} = 7 \end{aligned}$$

۴ - گزینه ۴ این مسأله نشان دهنده‌ی یک دنباله‌ی حسابی با جمله‌ی  $a_1 = 750$  و قدر نسبت  $d = 25$  و جمله‌ی آخر  $a_n = 2000$  است:

$$\begin{aligned} 750, 775, \dots, 2000 \\ a_n = a_1 + (n-1)d \rightarrow 2000 = 750 + (n-1)(25) \rightarrow 2000 = 750 + 25n - 25 \\ \rightarrow 25n = 2000 - 750 + 25 \rightarrow 25n = 1275 \rightarrow n = \frac{1275}{25} = 51 \end{aligned}$$

۵ - گزینه ۳

$$x + \frac{10}{100}x = x + 0,1x = 1,1x$$

قیمت کالا را  $x$  در نظر می‌گیریم که قرار است هر سال  $10\%$  به آن افزوده شود:

پس در هر سال قیمت‌ها در  $1,1$  ضرب می‌شوند، به عبارت دیگر یک دنباله‌ی هندسی با نسبت مشترک  $(1,1)$  می‌سازند و داریم:

$$\frac{a_5}{a_1} = \frac{a_1 r^4}{a_1} = r^4 = (1,1)^4 = ((1,1)^2)^2 = (1,21)^2 = 1,4641$$

۶ - گزینه ۲

$$a_1 + a_2 + a_3 = 33$$

مجموع سه جمله اول  $33$  است.

$$a_2 + a_3 + a_4 = 60$$

مجموع سه جمله بعدی (یعنی  $a_2$  و  $a_3$  و  $a_4$ ) برابر  $60$  می‌باشد. با ساده کردن دو معادله نوشته شده مسأله را حل می‌کنیم.

$$a_1 + a_7 + a_{13} = 33 \rightarrow a_1 + a_1 + d + a_1 + 2d = 33 \rightarrow 3a_1 + 3d = 33$$

$$a_7 + a_{13} + a_{19} = 60 \rightarrow a_1 + 3d + a_1 + 4d + a_1 + 5d = 60 \rightarrow 3a_1 + 12d = 60$$

دو معادله را در دستگاه قرار می‌دهیم و حل می‌کنیم.

$$\times (-1) \begin{cases} 3a_1 + 3d = 33 \\ 3a_1 + 12d = 60 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -3a_1 - 3d = -33 \\ 3a_1 + 12d = 60 \end{cases}$$

$$\frac{9d = 27 \rightarrow d = 3}{9d = 27 \rightarrow d = 3}$$

با استفاده از یکی از معادلات  $a_1$  را به دست می‌آید.

$$3a_1 + 3d = 33 \xrightarrow{d=3} 3a_1 + 9 = 33 \rightarrow 3a_1 = 24 \rightarrow a_1 = 8$$

حال جمله هشتم را محاسبه می‌کنیم.

$$a_8 = a_1 + 7d = 8 + 7(3) = 8 + 21 = 29$$

۷ - گزینه ۲

$$S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d) \xrightarrow{S_5=105} 105 = \frac{5}{2}(2a_1 + 4d) \Rightarrow 105 = 5a_1 + 10d \xrightarrow{\text{تقسیم بر 5}} a_1 + 2d = 21$$

$$a_7 + a_9 + a_{11} = 6(a_1 + a_7) \Rightarrow a_1 + 2d + a_1 + 3d + a_1 + 4d = 6(a_1 + a_1 + d)$$

$$\Rightarrow 3a_1 + 9d = 12a_1 + 6d \Rightarrow 12a_1 + 6d - 3a_1 - 9d = 0 \Rightarrow 9a_1 - 3d = 0$$

$$-9 \begin{cases} a_1 + 2d = 21 \\ 9a_1 - 3d = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -9a_1 - 18d = -189 \\ 9a_1 - 3d = 0 \end{cases}$$

$$-21d = -189 \Rightarrow d = \frac{189}{21} = 9 \Rightarrow a_1 + 2(9) = 21 \Rightarrow a_1 = 21 - 18 = 3$$

$$\Rightarrow a_5 = a_1 + 4d \Rightarrow a_5 = 3 + 4(9) = 39$$

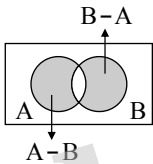
۸ - گزینه ۱

$$\text{متمم} = ((B-A)' - A')' = ((B \cap A')' \cap A')' = ((B \cap A')')' \cup (A')' = (B \cap A') \cup A$$

$$= (B \cup A) \cap (A' \cup A) = B \cup A = A \cup B$$

۹ - گزینه ۴

$A$  و  $B$  را روی نمودار ون ببینید:  $A - B$  و  $B - A$  هیچ عضو مشترکی ندارند، پس وقتی  $B - A$  را از  $A - B$  کم می‌کنیم، چیزی از  $A - B$  کم نمی‌شود و  $A - B$  تغییری نمی‌کند.



$$(A - B) - (B - A) = A - B$$

در نتیجه:

از طرفی:

$$(A \cap B') - (B - A) = (A - B) - (B - A) = A - B$$

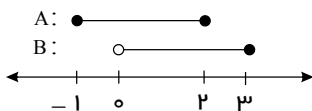
۱۰ - گزینه ۱

$$(A - B)' \cap (A \cup B) \cap A' = (A \cap B')' \cap (A \cup B) \cap A'$$

$$= (A' \cup B) \cap (A \cup B) \cap A' = \underbrace{(B \cup \emptyset)}_B \cap A' = B \cap A' = B - A$$

۱۱ - گزینه ۲

بازه‌ها را روی محور نمایش می‌دهیم و گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:



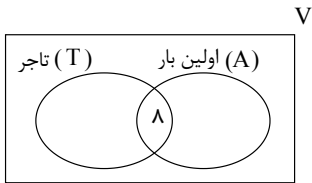
۱)  $A \cup B = [-1, 3]$

۲)  $B - A = (2, 3]$

۳)  $B \cap A = (0, 2]$

۴)  $A - B = [-1, 0]$

۱۲ - گزینه ۲ با توجه به نمودار ون داریم:



$$n(V) = 72, n(T) = 23, n(T \cap A) = 8$$

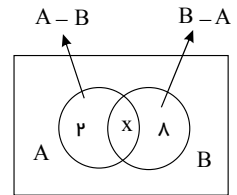
$$n(T \cup A) = n(T) + n(A) - n(T \cap A) = 23 + 12 - 8 = 27$$

$$n(T \cup A)' = n(V) - n(T \cup A) = 72 - 27 = 45$$

$$\left. \begin{aligned} n(A) &= 2 + x \\ n(B) &= 8 + x \\ n(B) &= 3n(A) \end{aligned} \right\} \Rightarrow 8 + x = 3(2 + x) \Rightarrow 8 + x = 6 + 3x \Rightarrow 2x = 2 \Rightarrow x = 1$$

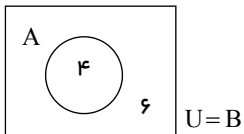
$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) = 3 + 9 - 1 = 11$$

۱۳ - گزینه ۴

نمودار زیر را رسم می‌کنیم و تعداد اعضای  $A \cap B$  را  $x$  می‌نامیم.

$$\begin{aligned} A' &= U - A \\ A \cup B &= B \Leftrightarrow A \subseteq B \end{aligned} \quad \text{۱۴ - گزینه ۳ می‌دانیم:}$$

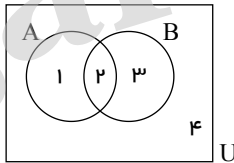
$$A \cup B \subseteq B \Rightarrow A \subseteq B$$

در حالتی که  $B$  مجموعه مرجع باشد، تعداد اعضای  $A'$  حداقل مقدار خود را دارد.بنابراین فرض می‌کنیم  $U = B$  و داریم:

$$n(A') = n(U) - n(A) = n(B) - n(A) = 10 - 4 = 6$$

۱۵ - گزینه ۴

با توجه به نمودار ون داریم:



$$(A - (A - B)) \cup (A \cap B)' \rightarrow (1, 2 - (1, 2 - 2, 3)) \cup (1, 2 \cap 2, 3)'$$

$$\rightarrow (1, 2 - 1) \cup (2)' \rightarrow (2) \cup (1, 3, 4) = 1, 2, 3, 4 \rightarrow \{ \}$$

۱۶ - گزینه ۱ جمله‌ی هشتم دنباله  $1, 3, \dots$ ،  $+4$  عبارت است از:

$$t_n = t_1 + (n-1)d = -1 + 7 \times 4 = 27$$

حال ببینیم جمله‌ی چندم از دنباله‌ی هندسی  $a_n = \frac{1}{3} \times 9^{n-1}$  برابر با ۲۷ است:

$$27 = \frac{1}{3} \times 9^{n-1} \Rightarrow 81 = 9^{n-1} \Rightarrow 9^2 = 9^{n-1} \Rightarrow 2 = n - 1 \Rightarrow n = 3$$

۱۷ - گزینه ۴ به گزینه‌ها توجه کنید:

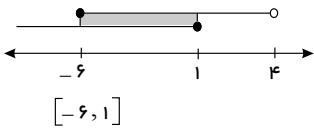
(۱) دو مجموعه‌ی نامتناهی می‌توانند با هم هیچ اشتراکی نداشته باشند؛ یعنی اشتراک آن‌ها تهی باشد که متناهی است. (نادرست)

(۲) دو مجموعه‌ی نامتناهی می‌توانند با هم برابر باشند و تفاضلشان تهی باشد که متناهی است. (نادرست)

(۳) اگر  $A$  تهی باشد،  $A$  زیرمجموعه‌ی همه‌ی مجموعه‌هاست. یعنی  $B$  می‌تواند متناهی یا نامتناهی باشد.(۴) اگر  $A \subseteq B$ ، آنگاه  $A \cap B = A$  خواهد بود. طبق متن گزینه‌ی  $A$  نامتناهی است و  $B$  مجموعه‌ای است که آن را در بر گرفته است؛ پس  $B$  الزاماً نامتناهی است.۱۸ - گزینه ۴ مجموعه‌ی  $A$  شامل اعضای است که هم طبیعی هستند و هم مجذور آنها از ۱۰۰ کوچکتر است؛ پس  $A$  عبارتست از:  $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ اگر  $\mathbb{N}$  را مرجع بدانیم،  $A'$  برابر است با مجموعه‌ای شامل اعضای  $\mathbb{N}$  که در  $A$  نیستند؛ یعنی:  $A' = \{10, 11, 12, \dots\} = \{x \in \mathbb{N} \mid x > 9\}$

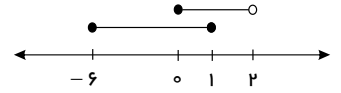
دقت:  $x > 9$  در مجموعه اعداد طبیعی، یعنی اعداد طبیعی پس از ۹، یعنی از ۱۰ به بعد (و خود ۱۰)

۱۹ - گزینه ۱ ابتدا حاصل  $(-\infty, 1] \cap (-6, 4)$  را با استفاده از محور بدست می‌آوریم:



$$[-6, 1] - [0, 2) = [-6, 0)$$

حال، اعضای بازه  $(0, 2)$  را از این بازه کم می‌کنیم:



باز هم استفاده از محور، بهترین راه حل است.

دقت: چون خود صفر را از بازه  $[-6, 1]$  خارج کرده‌ایم، جای خالی آن باقیمانده و انتهای بازه، باز است.

$$\begin{array}{c} +5 \quad +5 \\ \underbrace{\quad} \quad \underbrace{\quad} \\ 6, 11, 16, \dots \end{array}$$

۲۰ - گزینه ۲ دنباله‌ی تعداد پاره‌خط‌های هر مرحله را می‌نویسیم،  $6, 11, 16, \dots$  این یک الگوی خطی (دنباله حسابی) با قدر نسبت ۵ است و می‌دانیم که جمله عمومی دنباله حسابی عبارتست از:

$$t_n = 5n + b \quad \text{یعنی} \quad t_n = an + b$$

$$t_1 = 5 \times 1 + b = 6 \quad \text{برای محاسبه } b, \text{ جمله اول را در } t_n \text{ قرار می‌دهیم:}$$

$$\Rightarrow b = 6 - 5 = 1 \Rightarrow t_n = 5n + 1$$

و مرحله‌ی دهم عبارتست از:

$$t_{10} = 5 \times 10 + 1 = 51$$