پاسخنامه تشریحی

۱ - گزینه ۲

در تابع اگر دو زوج مرتب دارای مؤلفه‌های اول برابر باشند باید مؤلفه‌های دوم آن‌ها نیز باهم برابر باشند.

$$(m^2-4,5)=(m^2-4,m^2-11)\Rightarrow m^2-11=5\Rightarrow m^2=16\xrightarrow{\text{جذر}} m=\pm 4$$

$m=4\Rightarrow f=\{(12,5),(12,2)\}\Rightarrow$ **تابع نیست** f

$m=-4\Rightarrow f=\{(12,5),(4,2)\}\Rightarrow$ **تابع است** f

پس فقط جواب $m=-4$ قابل قبول است.

۲ - گزینه ۴

$$f(x)=x^2-3x+2$$
$$f(x+2)=(x+2)^2-3(x+2)+2=x^2+4x+4-3x-6+2=x^2+x$$
$$f(x-2)=(x-2)^2-3(x-2)+2=x^2-4x+4-3x+6+2=x^2-7x+12$$
$$\Rightarrow f(x+2)-f(x-2)=x^2+x-(x^2-7x+12)$$
$$=x^2+x-x^2+7x-12=8x-12=4(2x-3)$$

۳ - گزینه ۲ کافی است در ضابطه‌ی f، به جای تمام xها، مقدار $(\sqrt{2}-1)$ را جایگزین کنیم:

$$f(x)=(2-x)\left|x\right|+x+\sqrt{2}$$
$$\Rightarrow f(1-\sqrt{2})=(2-(1-\sqrt{2}))\overbrace{\left|1-\sqrt{2}\right|}^{-}+(1-\sqrt{2})+\sqrt{2}$$
$$=(2-1+\sqrt{2})(-1+\sqrt{2})+1-\sqrt{2}+\sqrt{2}=\underbrace{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)}_{\text{اتحاد مزدوج}}+1=(2-1)+1=1+1=2$$

۴ - گزینه ۲

$$f(x)=\sqrt{x^2-6x+10}\Rightarrow f(3+2\sqrt{6})=\sqrt{(3+2\sqrt{6})^2-6(3+2\sqrt{6})+10}$$
$$=\sqrt{9+12\sqrt{6}+24-18-12\sqrt{6}+10}=\sqrt{25}=5$$

۵ - گزینه ۱

$$f(x)=\frac{1}{4}x^2+\left|x\right|\Rightarrow f(2-\sqrt{5})=\frac{1}{4}(2-\sqrt{5})^2+\overbrace{\left|2-\sqrt{5}\right|}^{\text{منفی}}$$
$$\Rightarrow f(2-\sqrt{5})=\frac{1}{4}(\underbrace{4+5}_{9}-4\sqrt{5})+(-2+\sqrt{5})=\frac{9}{4}-\cancel{\sqrt{5}}-2+\cancel{\sqrt{5}}$$
$$\Rightarrow f(2-\sqrt{5})=\frac{9}{4}-2=\frac{9-8}{4}=\frac{1}{4}=0/25$$

۶ - گزینه ۴ فرض می‌کنیم رابطه‌ی تابع خطی به فرم $f(x)=mx+h$ باشد، در این صورت هنگامی‌که نمودار تابع از مبدأ مختصات می‌گذرد، داریم:

$$f(0)=0$$
$$f(0)=m\times(0)+h=0\Rightarrow h=0$$
$$f(x)=mx\xrightarrow{f(3)=4}4=3m\Rightarrow m=\frac{4}{3}$$

پس رابطه‌ی تابع به فرم $f(x)=\frac{4}{3}x$ می‌باشد، داریم:

$$f(1/5)=\frac{4}{3}\times(1/5)=\frac{4}{3}\times\frac{3}{2}=2$$
$$f(-0/75)=\frac{4}{3}\times(-0/75)=\frac{4}{3}\times(-\frac{3}{4})=-1$$
$$\Rightarrow f(1/5)-f(-0/75)=2-(-1)=2+1=3$$

۷ - گزینه ۲ باتوجه به نمودار تابع $f(x)$ که از دو نقطه‌ی $A=(1,2)$ و $B=(3,-2)$ عبور می‌کند، داریم:

$$m=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{-۲-۲}{۲-۱}=\frac{-۴}{۲}=-۲$$

$$y=mx+h\xrightarrow[(۱,۲)]{m=-۲}۲=-۲(۱)+h\rightarrow h=۴$$

$\rightarrow$ معادله‌ی خط : $y=-۲x+۴$

۸ - گزینه ۳ فرض کنید عرض مستطیل برابر x و طول مستطیل برابر y باشد، معادله‌ی محیط مستطیل برابر است با:

$\text{محیط}=۲\ (\text{طول}+\text{عرض})=۲(x+y)=۲۸\Rightarrow x+y=۱۴\Rightarrow y=۱۴-x$

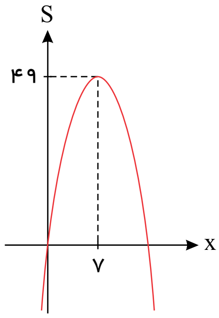
می‌دانیم که مساحت مستطیل برابر است با حاصل‌ضرب طول در عرض. بنابراین داریم:

$$S=xy=x(۱۴-x)=۱۴x-x^۲$$

سهمی مورد نظر را رسم می‌کنیم:

$$\text{رأس سهمی}=\frac{-b}{۲a}=\frac{-۱۴}{-۲}=۷$$

$$S(۷)=۱۴(۷)-۷^۲=۴۹$$



بیش‌ترین مقدار مساحت برابر ۴۹ و عرض مستطیل مورد نظر برابر ۷ می‌باشد. در نتیجه طول مستطیل نیز برابر ۷ می‌شود و خواهیم داشت:

$$\frac{\text{طول}}{\text{عرض}}=\frac{۷}{۷}=۱$$

این سؤال با یک نکته‌ی دیگر نیز قابل حل است که درواقع نتیجه‌ی حل معادله‌ی درجه ۲ است. هرگاه جمع دو عدد ثابت باشد، بیش‌ترین ضرب زمانی اتفاق می‌افتد که دو عدد نزدیک باشند.

۹ - گزینه ۳ چون در هر ماه مقداری ثابت به حساب شخص اضافه می‌شود در نتیجه میزان حساب شخص یک تابع خطی است که شیب آن برابر پول اضافه شده در هر ماه است و مقدار ثابت آن مقدار پول اولیه است که در حساب او بوده است.

۱۰ - گزینه ۳

$$\text{فرض می‌کنیم}: f(x)=mx+h\rightarrow\begin{cases}f(\frac{۳}{۲})=۰\Rightarrow\frac{۳}{۲}m+h=۰ & (۱)\\ f(۲)=۳\Rightarrow ۲m+h=۳ & (۲)\end{cases}\xrightarrow{\times(-۱)}\begin{cases}\frac{۳}{۲}m+h=۰\\ ۲m+h=۳\end{cases}$$

$$\begin{cases}\frac{۳}{۲}m+h=۰\\ -۲m-h=-۳\end{cases}$$

$$\frac{۳}{۲}m+\cancel{h}-۲m-\cancel{h}=-۳$$

$$-\frac{۱}{۲}m=-۳\rightarrow\cdots$$

$$\xrightarrow{(۲),(۱)}m=۶\,,\,h=-۹$$

$$f(x)=۶x-۹$$

$$x=۱\Rightarrow f(۱)=۶\times۱-۹=۶-۹=-۳\Rightarrow f(۱)=-۳$$

۱۱ - گزینه ۲ باتوجه به رابطه‌ی تابع دما برحسب درجه‌ی سانتی‌گراد داریم:

$$\begin{cases}F_۱=\frac{۹}{۵}C_۱+۳۲\\ F_۲=\frac{۹}{۵}C_۲+۳۲\end{cases}\Rightarrow F_۲-F_۱=(\frac{۹}{۵}C_۲+۳۲)-(\frac{۹}{۵}C_۱+۳۲)$$

$$\Rightarrow F_۲-F_۱=\frac{۹}{۵}C_۲+۳۲-\frac{۹}{۵}C_۱-۳۲=\frac{۹}{۵}(C_۲-C_۱)$$

$$\Rightarrow\Delta F=\frac{۹}{۵}\Delta C\xrightarrow{\Delta F=۱۸}۱۸=\frac{۹}{۵}\Delta C\Rightarrow\Delta C=\frac{۱۸\times۵}{۹}=۱۰$$

۱۲ - گزینه ۳

$$y=mx^۲-nx+۱\Rightarrow x_S=\frac{-b}{۲a}\Rightarrow ۱=\frac{n}{۲m}\Rightarrow n=۲m\quad(۱)$$

$$y=mx^۲-nx+۱\xrightarrow{(۱,-۲)\in\text{سهمی}}m(۱)^۲-n(۱)+۱=-۲\Rightarrow m-n=-۳\quad(۲)$$

$$\xrightarrow{۲,۱}\begin{cases} n = ۲m \\ m - n = -۳ \end{cases} \rightarrow \begin{cases} n - ۲m = ۰ \\ m - n = -۳ \end{cases}$$

$$\cancel{n} - ۲m + m - \cancel{n} = -۳$$

$$-m = -۳ \rightarrow m = ۳$$

$$\xrightarrow{(۱)} n = ۲m \xrightarrow{m=۳} n = ۶ \rightarrow \frac{m}{n} = \frac{۳}{۶} = \frac{۱}{۲}$$

۱۳ - گزینه ۴

$$\left.\begin{aligned} &y = x^۲ - ۶x + ۷ = x^۲ - ۶x + ۹ - ۹ + ۷ \\ &= (x-۳)^۲ - ۲ \Rightarrow \text{رأس سهمی} : (۳,-۲) \\ &y = x^۲ + ۴x - ۵ = x^۲ - ۴x + ۴ - ۴ - ۵ \\ &= (x-۲)^۲ - ۹ \Rightarrow \text{رأس سهمی} : (۲,-۹) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \text{اختلاف } y\text{ها } |-۲-(-۹)| = |-۲+۹| = ۷$$

۱۴ - گزینه ۲ ابتدا از روی تعریف ضابطه‌ی تابع را می‌نویسیم:

$$\underset{}{\overset{\text{دو برابر مربع عدد}}{۲x^۲}} \rightarrow \overset{\text{۵ از دو برابر مربع عدد تفاضل}}{۲x^۲ - ۵} \rightarrow \overset{\text{ریشه‌ی سوم تفاضل ۵}}{\text{از دو برابر مربع عدد}}\ \sqrt[۳]{۲x^۲-۵}$$

$$f(x) = \sqrt[۳]{۲x^۲ - ۵} \Rightarrow f(۴) = \sqrt[۳]{۲ \times (۴)^۲ - ۵} = \sqrt[۳]{۳۲ - ۵} = \sqrt[۳]{۲۷} = \sqrt[۳]{۳^۳}$$

$$\Rightarrow f(۴) = ۳$$

۱۵ - گزینه ۴ در گزینه‌ی «۱» همگی xها مختلف‌اند پس تابع است.

در گزینه‌ی «۲» می‌دانیم $(\sqrt{۵})^۰ = ۱$ پس $x = ۱$ دو بار تکرار شده که y هر دو نیز عدد ۵ است. لذا زوج مرتب $(۱,۵)$ دوبار تکرار می‌شود پس تابع است.

در گزینه‌ی «۳» اگر $\frac{۱}{\sqrt{۲}}$ را گویا کنیم خواهیم داشت:

$$\frac{۱}{\sqrt{۲}} = \frac{۱}{\sqrt{۲}} \times \frac{\sqrt{۲}}{\sqrt{۲}} = \frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

پس زوج مرتب $(۳,\frac{\sqrt{۲}}{۲})$ دوبار تکرار شده لذا تابع است. (مشابه گزینه‌ی ۲)

در گزینه‌ی «۴» زوج‌های $(۱,۷)$ و $(۱,۸)$، عضوهای اولشان مساوی است ولی عضوهای دوم نامساوی دارند، لذا تابع نیست.

۱۶ - گزینه ۴ نمودار رابطه‌ای تابع است که هر خط موازی محور yها نمودار تابع را حداکثر در یک نقطه قطع کند باتوجه به این مفهوم، فقط نمودار رابطه‌ی گزینه‌ی «۴» تابع است.

۱۷ - گزینه ۲ اگر اعضای مجموعه‌ی A را $\{۱,۲,۳\}$ و اعضای مجموعه‌ی B را $\{a,b\}$ در نظر بگیریم، تابع مورد نظر f می‌تواند به صورت‌های زیر باشد:

$$f_۱ = \{(۱,a),(۲,a),(۳,a)\}, f_۲ = \{(۱,b),(۲,b),(۳,b)\}, f_۳ = \{(۱,a),(۲,a),(۳,b)\},$$

$$f_۴ = \{(۱,a),(۲,b),(۳,a)\}, f_۵ = \{(۱,b),(۲,a),(۳,a)\},$$

$$f_۶ = \{(۱,b),(۲,a),(۳,b)\}, f_۷ = \{(۱,b),(۲,b),(۳,a)\}, f_۸ = \{(۱,a),(۲,b),(۳,b)\}$$

۱۸ - گزینه ۴ اگر رابطه‌ی f تابع باشد، دو زوج مرتب $(۲,x+y),(۲,۳x-y)$ که دارای مؤلفه اول یکسان می‌باشند. باید مؤلفه دوم یکسان نیز داشته باشند، پس داریم:

$$۳x - y = x + y \Rightarrow ۳x - y = y + y \Rightarrow ۲x = ۲y \Rightarrow x = y$$

حال باتوجه به این‌که $x = y$ می‌باشد. تابع را به این‌صورت می‌نویسیم:

$$f = \{(۲,۲x),(۲x,۳x),(۲x,۶),(۲,۲x)\}$$

حال برای این‌که رابطه تابع باشد باید مؤلفه دوم دو زوج مرتب $(۲x,۶),(۲x,۳x)$ نیز با یکدیگر برابر باشند، داریم:

$$۳x = ۶ \Rightarrow x = ۲ \Rightarrow x = y = ۲ \Rightarrow f = \{(۲,۴),(۴,۶)\} \Rightarrow x + y = ۲ + ۲ = ۴$$

۱۹ - گزینه ۳

برای محاسبه‌ی دامنه‌ی تابع رادیکال با فرجه‌ی زوج، عبارت زیر رادیکال باید نامنفی باشد. هم‌چنین در محاسبه دامنه‌ی تابع کسری، مخرج کسر باید مخالف صفر باشد. بنابراین داریم:

$$\left.\begin{aligned} &\sqrt{۲-x} \Rightarrow ۲ - x \geq ۰ \Rightarrow ۲ \geq x \\ &\sqrt{x+۱} \Rightarrow x + ۱ \geq ۰ \Rightarrow x \geq -۱ \\ &\frac{۸x^۲}{x-۱} \Rightarrow x - ۱ \neq ۰ \Rightarrow x \neq ۱ \end{aligned}\right\} \xrightarrow{\text{اشتراک}} \{-۱ \leq x \leq ۲\} - \{۱\}$$

بنابراین فقط $x = ۰$ در دامنه‌ی تعریف تابع قرار دارد.

۲۰ - گزینه ۴

$$\left.\begin{aligned} &f(۱) = |۱-۲| = |-۱| = ۱\ ,\ g(۵) = \sqrt{(۳\times۵)+۱} = \sqrt{۱۶} = ۴ \\ &f(-۱) = |-۱-۲| = |-۳| = ۳\ ,\ g(۰) = \sqrt{(۳\times۰)+۱} = \sqrt{۱} = ۱ \end{aligned}\right. \Rightarrow A = \frac{۱+۴}{۳\times۱} = \frac{۵}{۳}$$

۲۱ ـ گزینه ۴

$f(x)=2x^2-x \to f(x+1)=2(x+1)^2-(x+1)=2(x^2+2x+1)-x-1$

$\to f(x+1)=2x^2+4x+2-x-1 \to f(x+1)=2x^2+3x+1$

$f(x)=2x^2-x \to f(1)=2(1)^2-1=2-1=1$

پس: $f(x+1)-f(1)=2x^2+3x+1-1=2x^2+3x$

۲۲ ـ گزینه ۱

$f(x)=\sqrt{5x-1} \to f(1)=\sqrt{(5\times 1)-1}=\sqrt{4}=2$

$g(x)=2\sqrt{x} \to g(1)=2\sqrt{1}=2\times 1=2$

$\Rightarrow f(1)\times g(1)=4=2k+2 \Rightarrow 2k=2 \Rightarrow k=1$

۲۳ ـ گزینه ۲ برای به دست آوردن نقاط برخورد دو تابع، ابتدا رابطه‌ی دو تابع را برابر یکدیگر قرار می‌دهیم:

$$\begin{cases} y=\frac{x^2}{2} \\ y=4-\frac{x^2}{2} \end{cases} \Rightarrow \frac{x^2}{2}=4-\frac{x^2}{2} \xrightarrow{\times 2} x^2=8-x^2 \to 2x^2=8 \to x^2=4 \to x=\pm 2$$

حال طول نقاط برخورد دو تابع را در یکی از ضابطه‌ها قرار می‌دهیم تا عرض نقاط برخورد دو تابع به دست آید.

$$y=\frac{x^2}{2} \xrightarrow{x=\pm 2} y=\frac{(\pm 2)^2}{2}=\frac{4}{2}=2$$

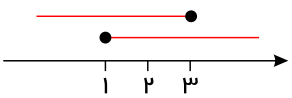
۲۴ ـ گزینه ۲ برای پیدا کردن دامنه‌ی تعریف توابع رادیکالی با فرجه‌ی زوج کافی است زیر رادیکال را بزرگتر مساوی صفر قرار دهیم؛ در این تابع دو رادیکال با فرجه‌ی زوج وجود دارد که عبارت زیر هر کدام را باید بزرگتر مساوی صفر قرار دهیم.

$2x-2\geq 0 \Rightarrow 2x\geq 2 \Rightarrow x\geq 1 \quad (I)$

$2-\sqrt{2x-2}\geq 0 \Rightarrow 2\geq\sqrt{2x-2} \xrightarrow{\text{توان } 2} 4\geq 2x-2 \Rightarrow 6\geq 2x \Rightarrow 3\geq x \quad (II)$

اکنون باید از جواب‌های (I) و (II) اشتراک بگیریم:

$I\cap II:$



$\Rightarrow \quad 1\leq x\leq 3$

۲۵ ـ گزینه ۳ برای پیداکردن دامنه‌ی تعریف توابع رادیکالی با فرجه‌ی زوج، کافی است زیر رادیکال را بزرگتر مساوی صفر قرار دهیم.

$x-3\geq 0 \to x\geq 3$

در ضمن در توابع کسری مخرج باید مخالف صفر باشد یعنی:

$x^2+2x\neq 0 \to x(x+2)\neq 0 \to x\neq 0, x\neq -2$

بنابراین دامنه‌ی تعریف توابع $x\geq 3$ است. دقت کنید که وقتی $x\geq 3$ است خودبخود x مخالف ۰ و ۲− می‌باشد.

۲۶ ـ گزینه ۳ فقط گزینه‌ی سوم است که برای همه‌ی مقادیر x و y صدق می‌کند.

$$y=2x^2-1 \to \begin{cases} x=1 \to y=2(1)^2-1=1 \\ x=2 \to y=2(2)^2-1=7 \\ x=3 \to y=2(3)^2-1=17 \\ x=4 \to y=2(4)^2-1=31 \\ x=1 \to y=2(5)^2-1=49 \end{cases}$$

۲۷ ـ گزینه ۳ روش اول: برای پیدا کردن دامنه‌ی تعریف توابع رادیکالی با فرجه‌ی زوج کافی است زیر رادیکال را بزرگترمساوی صفر قرار دهیم.

$-3x-4\geq 0 \Rightarrow -3x\geq 4 \Rightarrow x\leq -\frac{4}{3}$

دامنه‌ی تابع $=\left\{x\in R \,\middle|\, x\leq -\frac{4}{3}\right\}$

فقط مقدار گزینه‌ی «۳» بزرگ‌تر از $-\frac{4}{3}$ است و در دامنه‌ی تابع فوق قرار ندارد.

روش دوم: فقط $x=-1$ است که زیر رادیکال با فرجه‌ی زوج را منفی می‌کند، بنابراین در دامنه‌ی تعریف تابع قرار ندارد.

۲۸ ـ گزینه ۲ هنگامی مجموعه‌ای از زوج‌های مرتب تشکیل تابع می‌دهند که هیچ دو زوج مرتب متمایزی در آن مؤلفه‌های اول برابر نداشته باشد و اگر مؤلفه‌های اول آن‌ها با هم برابر بود حتما مؤلفه‌های دوم آن‌ها نیز با هم برابر باشند.

$$\begin{cases} (5, a^2-1)\in f \\ (5, 48)\in f \end{cases} \Rightarrow a^2-1=48 \Rightarrow a^2=49 \Rightarrow a=\pm 7$$

$a = ۷ \Rightarrow f = \{(۵,۴۸),(۷,۳),(۷,۲)\} \rightarrow$ تابع نیست

$a = -۷ \Rightarrow f = \{(۵,۴۸),(-۷,۳),(۷,۲)\} \rightarrow$ تابع است

پس $a = -۷$ قابل قبول است.

۲۹ - گزینه ۲ با کمی دقت می‌توان متوجه شد که ضابطه‌ی تابع به صورت $y = x^۳ + ۱$ است.

$$y = x^۳ + ۱ \xrightarrow{x=۴} y = ۴^۳ + ۱ = ۶۴ + ۱ \rightarrow y = ۶۵ = a$$
$$y = x^۳ + ۱ \xrightarrow{x=b-۱} ۱۲۶ = (b-۱)^۳ + ۱ \rightarrow ۱۲۵ = (b-۱)^۳ \rightarrow ۵^۳ = (b-۱)^۳ \rightarrow b - ۱ = ۵ \rightarrow b = ۶$$

پس $a + b = ۷۱$ است.

۳۰ - گزینه ۲ درآمد با y و تعداد نفراتی که به سینما رفته‌اند را با n نشان داده‌ایم و قیمت بلیط سینما ۵۰۰۰ تومان است. پس تابع $y = ۵۰۰۰n$ نوشته می‌شود.

۳۱ - گزینه ۴

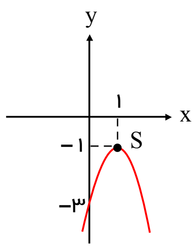
در سهمی $y = -۲x^۲ + ۴x - ۳$، ضریب $x^۲$ منفی بوده، پس سهمی دارای max است.

طول رأس: $x = \dfrac{-b}{۲a} = \dfrac{-۴}{۲ \times (-۲)} = ۱ \xrightarrow{\text{در تابع قرار می دهیم}} y = -۲(۱)^۲ + ۴(۱) - ۳ = -۲ + ۴ - ۳ = -۱$

پس رأس سهمی $S(۱,-۱)$ می‌باشد:

$$y = -۲x^۲ + ۴x - ۳ \xrightarrow[x=۰]{\text{محل برخورد سهمی با محور عرض‌ها}} y = -۳ \Rightarrow (۰,-۳)$$

حال اگر نمودار سهمی را با مشخصات فوق رسم کنیم، نمودار تقریبی آن به صورت زیر است:



ملاحظه می‌شود که نمودار سهمی از نواحی سوم و چهارم محورهای مختصات می‌گذرد.

۳۲ - گزینه ۱ با توجه به جدول داده شده، می‌توان ضابطه‌ی تابع را به‌صورت $f(x) = x^۲ - x$ حدس زد.

$$f(۸) = ۸^۲ - ۸ = ۶۴ - ۸ = ۵۶ \Rightarrow a = ۵۶$$
$$f(۱۲) = (۱۲)^۲ - ۱۲ = ۱۴۴ - ۱۲ = ۱۳۲ \Rightarrow b = ۱۳۲$$

پس: $a + b = ۵۶ + ۱۳۲ = ۱۸۸$

۳۳ - گزینه ۳ برای آن‌که مجموعه‌ای از زوج‌های مرتب تشکیل تابع دهند باید هیچ دو زوج مرتب متمایزی مؤلفه‌ی اول برابر نداشته باشند پس اگر مؤلفه‌ی اول دو زوج با هم برابر بود حتماً مؤلفه‌ی دوم آن‌ها نیز باید با هم برابر باشد، بنابراین خواهیم داشت:

$$(۵, ۴b - ۲) = (۵, ۰) \Rightarrow ۴b - ۲ = ۰ \Rightarrow ۴b = ۲ \Rightarrow b = \frac{۲}{۴} = \frac{۱}{۲}$$

$$(۳, a + ۱) = (۳, ۳a + b) \Rightarrow a + ۱ = ۳a + b \xrightarrow{b=\frac{۱}{۲}} a + ۱ = ۳a + \frac{۱}{۲}$$

$$\Rightarrow ۱ - \frac{۱}{۲} = ۳a - a \Rightarrow ۲a = \frac{۱}{۲} \Rightarrow a = \frac{\frac{۱}{۲}}{\frac{۲}{۱}} = \frac{۱}{۴}$$

پس: $a \times b = \frac{۱}{۲} \times \frac{۱}{۴} = \frac{۱}{۸}$

۳۴ - گزینه ۲ چون رادیکال با فرجه‌ی زوج در مخرج کسر قرار دارد. پس عبارت زیر رادیکال باید بزرگ‌تر از صفر باشد:

$$\frac{۳}{۴} - \frac{x}{۲} > ۰ \Rightarrow \frac{x}{۲} < \frac{۳}{۴} \xrightarrow{\times ۴} ۲x < ۳ \rightarrow x < \frac{۳}{۲}$$

۳۵ - گزینه ۱

$$f(x) = (x - ۱)(x + ۱) = x^۲ - ۱$$

$$\begin{cases} f(\sqrt{۲} - ۱) = (\sqrt{۲} - ۱)^۲ - ۱ = ۲ + ۱ - ۲\sqrt{۲} - ۱ = ۲ - ۲\sqrt{۲} \\ f(\sqrt{۳}) = (\sqrt{۳})^۲ - ۱ = ۳ - ۱ = ۲ \end{cases}$$

پس: $f(\sqrt{۲} - ۱) - f(\sqrt{۳}) = ۲ - ۲\sqrt{۲} - ۲ = -۲\sqrt{۲}$

۳۶ ـ گزینه ۱

$$f(\sqrt{۲}-۱)=\left|\frac{\sqrt{۲}-۲(\sqrt{۲}-۱)}{۴}-۲\right|=\left|\frac{\sqrt{۲}-۲\sqrt{۲}+۲}{۴}-۲\right|=\left|\frac{-\sqrt{۲}+۲}{۴}-۲\right|$$

$$=\left|\frac{-\sqrt{۲}+۲-۸}{۴}\right|=\underbrace{\left|\frac{-\sqrt{۲}-۶}{۴}\right|}_{-}=\frac{\sqrt{۲}+۶}{۴}$$

توجه کنید اگر عبارت داخل قدرمطلق، منفی باشد قرینه‌ی عبارت از قدر مطلق بیرون می‌آید.

۳۷ ـ گزینه ۳

$$f(x)=ax^{۲}+۳x-۱\xrightarrow{f(۲)=۱}۴a+۶-۱=۱\Rightarrow ۴a=-۴\Rightarrow a=-۱$$

پس: $f(x)=-x^{۲}+۳x-۱\xrightarrow{x=-۳}f(-۳)=-۹-۹-۱=-۱۹$

۳۸ ـ گزینه ۲

$$f(۱)=(۱)^{۲}-۳(۱)+۵=۱-۳+۵=۳$$

$$f(\frac{۱}{۲})=(\frac{۱}{۲})^{۲}-۳(\frac{۱}{۲})+۵=\frac{۱}{۴}-\frac{۳\times۲}{۲\times۲}+\frac{۵\times۴}{۱\times۴}=\frac{۱-۶+۲۰}{۴}=\frac{۱۵}{۴}$$

$$g(-\frac{۳}{۲})=-(-\frac{۳}{۲}+\frac{۴}{۱})^{۲}-۳\times(-\frac{۳}{۲})=-(\frac{۵}{۲})^{۲}-(-\frac{۹}{۲})=-\frac{۲۵}{۴}+\frac{۹\times۲}{۲\times۲}=-\frac{۷}{۴}$$

$$g(-۴)=-(-۳+۴)^{۲}-۳\times(-۳)=-(۱)^{۲}-(-۹)=-۱+۹=۸$$

پس: $\dfrac{f(۱)+g(-\frac{۳}{۲})}{f(\frac{۱}{۲})-g(-۳)}=\dfrac{\frac{۳\times۴}{۱\times۴}+(-\frac{۷}{۴})}{\frac{۱۵}{۴}-\frac{۸\times۴}{۱\times۴}}=\dfrac{\frac{۵}{۴}}{-\frac{۱۷}{۴}}=-\dfrac{۴\times۵}{۴\times۱۷}=-\dfrac{۵}{۱۷}$

۳۹ ـ گزینه ۳

توجه کنید که $\sqrt{u^{۲}}=|u|=\begin{cases}u & u\geq ۰\\ -u & u<۰\end{cases}$ است.

$$f(۱۴-۴\sqrt{۳})=\sqrt{۱۴-۴\sqrt{۳}-۱}+|۶-۱۴+۴\sqrt{۳}|$$

$$=\sqrt{۱۳-۴\sqrt{۳}}+|-۸+۴\sqrt{۳}|=\sqrt{(۱-۲\sqrt{۳})^{۲}}+\underbrace{|-۸+۴\sqrt{۳}|}_{-}$$

$$=\underbrace{|۱-۲\sqrt{۳}|}_{-}-(-۸+۴\sqrt{۳})=۲\sqrt{۳}-۱+۸-۴\sqrt{۳}=۷-۲\sqrt{۳}$$

توجه: $(۱-۲\sqrt{۳})^{۲}=۱+۱۲-۴\sqrt{۳}=۱۳-۴\sqrt{۳}$

۴۰ ـ گزینه ۱ گزینه‌ی «۱»:

$$y=\sqrt{۳-x}\xrightarrow{\text{تعیین دامنه}}۳-x\geq ۰$$

$$\Rightarrow -x\geq -۳\Rightarrow x\leq ۳\Rightarrow \text{اعداد طبیعی موجود در دامنه}=\{۱,۲,۳\}$$

گزینه‌ی «۲»:

$$y=\frac{۵}{۴-x}\xrightarrow{\text{تعیین دامنه}}\text{مخرج}\neq ۰\Rightarrow ۴-x\neq ۰\Rightarrow \text{دامنه}=R-\{۴\}$$

اعداد طبیعی موجود در دامنه $=\{۱,۲,۳,۵,۶,\cdots\}$

گزینه‌ی «۳»:

$$y=-x^{۲}+۳x-۱\xrightarrow{\text{تعیین دامنه}}\text{دامنه}=R\Rightarrow \text{اعداد طبیعی موجود در دامنه}=N$$

گزینه‌ی «۴»:

$$y=\frac{x-۱}{x^{۲}-۴}\xrightarrow{\text{تعیین دامنه}}\text{مخرج}\neq ۰\Rightarrow x^{۲}-۴\neq ۰\Rightarrow x^{۲}\neq ۴$$

$$\xrightarrow{\text{جذر}}x\neq \pm ۲\Rightarrow \text{دامنه}=R-\{\pm ۲\}\Rightarrow \text{اعداد طبیعی موجود در دامنه}=\{۱,۳,۴,\cdots\}$$

لذا تعداد اعداد طبیعی در دامنه‌ی تابع $y=\sqrt{۳-x}$ از بقیه کم‌تر است.