پاسخنامه تشریحی

۱ - گزینه ۳

$$f(x)=\frac{x^{۲}+۴x+۵}{x^{۲}+۴x+۷}\to f(x)=\frac{x^{۲}+۴x+۴+۱}{x^{۲}+۴x+۴+۳}$$
$$\to f(x)=\frac{(x+۲)^{۲}+۱}{(x+۲)^{۲}+۳}\Rightarrow f(\sqrt{۳}-۲)=\frac{(\sqrt{۳})^{۲}+۱}{(\sqrt{۳})^{۲}+۳}=\frac{۴}{۶}=\frac{۲}{۳}$$

۲ - گزینه ۲

ابتدا دامنهٔ تعریف تابع را به دست می‌آوریم:

$$f(x)=\frac{[x]}{\sqrt{x-x^{۲}}}\to x-x^{۲}>۰\to x^{۲}-x<۰\to x(x-۱)<۰\to ۰<x<۱$$

$$۰<x<۱\to [x]=۰\to f(x)=\frac{۰}{\sqrt{x-x^{۲}}}\to f(x)=۰$$

پس برد تابع $f(x)$ شامل یک عدد صحیح است.

۳ - گزینه ۴ زیر رادیکال دوم همواره مثبت است، فقط کافی است زیر رادیکال اول را بزرگ‌تر مساوی صفر قرار دهیم.

$$|x|-۱\geq ۰\Rightarrow |x|\geq ۱\Rightarrow x\geq ۱ \text{ یا } x\leq -۱\Rightarrow D_f=\mathbb{R}-(-۱,۱)$$

۴ - گزینه ۳ هم $x^{۲}\geq ۰$ است هم $(x^{۲}-۴)^{۲}\geq ۰$ است یعنی زیر رادیکال به خاطر منفی هرگز نمی‌تواند مثبت باشد ولی می‌تواند صفر باشد.

$$-x^{۲}(x^{۲}-۴)^{۲}=۰\Rightarrow x=۰\ ,\ x=۲\ ,\ x=-۲$$

پس دامنه‌ی تعریف این تابع ۳ عضو دارد.

۵ - گزینه ۲ چون در صورت سؤال $f(۳)$ را خواسته، ابتدا هر یک از عبارت‌های $x-۲$ و $۲-x$ را مساوی ۳ قرار می‌دهیم:

$$x-۲=۳\to x=۵\ ,\ ۲-x=۳\to x=-۱$$

$$\left.\begin{array}{l} x=۵\to ۵f(۳)+f(-۳)=۲۱\\ x=-۱\to ۵f(-۳)+f(۳)=-۳\end{array}\right\}\times(-۵)\to -۲۴f(۳)=-۱۰۸\to f(۳)=۴/۵$$

۶ - گزینه ۱ چون $D_f=\mathbb{R}-\{۳\}$ می‌باشد پس عبارت درجه دوم مخرج کسر باید ریشهٔ مضاعف ۳ داشته باشد، بنابراین داریم:

$$۲(x-۳)^{۲}=۲x^{۲}+ax+b\to ۲(x^{۲}-۶x+۹)=۲x^{۲}+ax+b$$
$$\to ۲x^{۲}-۱۲x+۱۸=۲x^{۲}+ax+b\to\begin{cases}a=-۱۲\\ b=۱۸\end{cases}\to a-b=-۳۰$$

۷ - گزینه ۳ چون در زوج مرتب اول و سوم مولفه‌های اول باهم برابرند باید مولفه‌های دوم نیز برابر باشند.

$$a^{۲}-۱=۳\to a^{۲}=۴\to\begin{cases}a=۲\ \to (۲,۳)(۲,۵)\cdots \text{ تابع نمی باشد}\\ a=-۲\to (۲,۳)(-۲,۵)(۲,۳)(۳,۴) \text{ تابع است}\end{cases}$$

پس فقط $a=-۲$ قابل قبول است.

۸ - گزینه ۱

$$\sqrt{xf(x)}:\ \text{دامنه}\to xf(x)\geq ۰\to xy\geq ۰\xrightarrow{x,y \text{ باید هم علامت باشند}}[-۲,۰]\cup[۱,۴]$$

۹ - گزینه ۳ ابتدا ضابطه‌ی $f(x)$ و از روی آن ضابطه‌ی $f(۲x)$ را بدست می‌آوریم.

$$x+۳=t\to x=t-۳\to f(t)=t-۳+\frac{۵}{t-۳}\to f(x)=x-۳+\frac{۵}{x-۳}$$
$$\to f(۲x)=۲x-۳+\frac{۵}{۲x-۳}$$
$$y=۳-f(۲x)=۳-۲x+۳-\frac{۵}{۲x-۳}\to y=۶-۲x-\frac{۵}{۲x-۳}$$

گزینه‌ی سوم در این رابطه صدق می‌کند.

۱۰ - گزینه ۱

$$f(x)=x+\sqrt{-x^{۲}-۲x+۳}$$

دامنهٔ تابع رادیکالی با فرج زوج برابر است با: $-x^۲ - ۲x + ۳ \geq ۰ \xrightarrow{x(-)}$

$x^۲ + ۲x - ۳ \leq ۰ \to (x-۱)(x+۳) \leq ۰$

x	$-\infty$		-۳		۱		$+\infty$
P		+	●	-	●	+	
			ج	ج	ج		

$\to D_f = [-۳, ۱] = [a, b] \to b - a = ۱ - (-۳) = ۴$

۱۱ - گزینه ۱

$y = \sqrt{f(x) - x} \to f(x) - x \geq ۰ \to f(x) \geq x$

$\to$ نقاطی قابل قبول هستند که نمودار تابع بالای $y = x$ (نیمساز ربع اول و سوم) باشد.

$\to x \in (-\infty, -۲] \cup [۲, ۴]$

۱۲ - گزینه ۳ نمودار تابع $y = \dfrac{x-۳}{x}$ محور yها را قطع نمی‌کند، چون شامل هیچ نقطه‌ای با طول صفر نیست.

۱۳ - گزینه ۴

$$f(x) = \frac{x+a}{bx-۲} \xrightarrow{f(۰)=۰} ۰ = \frac{۰+a}{b(۰)-۲} \to \boxed{a=۰} \quad (۱)$$

$D_f = \mathbb{R} - \{-۲\} \to$ ریشهٔ مخرج است. $x = -۲ \to b(-۲) - ۲ = ۰ \to \boxed{b=-۱} \quad (۲)$

$$\xrightarrow{(۱),(۲)} f(x) = \frac{x}{-x-۲} \to f(۱) = \frac{۱}{-۱-۲} \to f(۱) = -\frac{۱}{۳}$$

۱۴ - گزینه ۴ اگر تعداد پنالتی‌هایی که از این به بعد بزند را x درنظر بگیریم نسبت پنالتی‌های گل‌شده به کل پنالتی‌ها به‌صورت زیر است، داریم:

$$P(A) = \frac{۳+x}{۵+x} = \frac{۹۰}{۱۰۰}$$

$$\to ۹(۵+x) = ۱۰(۳+x) \to ۴۵ + ۹x = ۳۰ + ۱۰x \to \boxed{x = ۱۵}$$

۱۵ - گزینه ۴ شرط تساوی دو تابع به صورت مقابل است:

$$\begin{cases} D_f = D_g \\ f_{\text{ساده شده}} = g_{\text{ساده شده}} \end{cases}$$

ابتدا دامنهٔ توابع را بررسی می‌نماییم، اگر دامنه‌ها برابر نباشند دو تابع برابر نیستند.

$$(۱) \begin{cases} f(x) = x \to D_f = \mathbb{R} \\ g(x) = (\sqrt{x})^۲ \to D_g = [۰, +\infty) \end{cases} \quad D_f \neq D_g$$

$$(۲) \begin{cases} f(x) = \dfrac{۱}{x-۱} \quad D_f = \mathbb{R} - \{۱\} \\ g(x) = \dfrac{x+۱}{x^۲-۱} \quad D_g = \mathbb{R} - \{\pm ۱\} \end{cases} \quad D_f \neq D_g$$

$$(۳) \begin{cases} f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x}} \quad D_f = (۰, +\infty) \\ g(x) = \sqrt{x} \quad D_g = [۰, +\infty) \end{cases} \quad D_f \neq D_g$$

$$(۴) \begin{cases} f(x) = \dfrac{۳|x|}{x} \quad D_f = \mathbb{R} - \{۰\} \to f(x) \begin{cases} ۳ & x > ۰ \\ -۳ & x < ۰ \end{cases} \\ g(x) = \dfrac{۳x}{|x|} \quad D_g = \mathbb{R} - \{۰\} \to g(x) \begin{cases} ۳ & x > ۰ \\ -۳ & x < ۰ \end{cases} \end{cases}$$