پاسخنامه تشریحی

۱ -

$$\sin^۲\theta + \cos^۲\theta = ۱ \rightarrow \cos^۲\theta = ۱ - \frac{۲۴}{۴۹} = \frac{۲۵}{۴۹}$$

$$\rightarrow \cos\theta = \pm\frac{۵}{۷}$$

از آن‌جا که θ در ربع دوم است، کسینوس آن منفی است؛ پس:

$$\cos\theta = -\frac{۵}{۷} \rightarrow \tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{\frac{۲\sqrt{۶}}{۷}}{-\frac{۵}{۷}} = -\frac{۲\sqrt{۶}}{۵}$$

۲ - باتوجه به مجموعه‌های اعداد داریم:

$N = \{۱, ۲, ۳, \cdots\}$
$W = \{۰, ۱, ۲, ۳, \cdots\}$
$Z = \{\cdots, -۳, -۲, -۱, ۰, ۱, ۲, ۳, \cdots\}$
$Q = \{\frac{m}{n} | \ m, n \in Z, n \neq ۰\}$
Q' = مجموعه اعدادی که نمی‌توان آن‌ها را به صورت نسبت دو عدد صحیح نشان داد
$R = Q \cup Q'$

الف) $\{۰\}$
ب) Q'
پ) $W = \{۰, ۱, ۲, ۳, \cdots\}$
ت) $\varnothing$ یا $\{\}$

۳ -

اگر M مجموعه مرجع باشد متمم مجموعه ی A را به صورت $M - A$ تعریف می‌کنیم و با A' نشان می‌دهیم.

الف) $A' = \{b, c, d\}$
ب) $B' = \{a, d, e\}$
پ) $A \cap B' = \{a, e\} \cap \{a, d, e\} = \{a, e\}$
ت) $A' \cup B = \{b, c, d\} \cup \{b, c\} = \{b, c, d\}$
ث) $A - B' = \{a, e\} - \{a, d, e\} = \varnothing$

۴ -

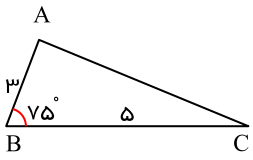
جمله ی عمومی دنباله ی حسابی
$a_n = a_۱ + (n - ۱)d$
d : قدر نسبت , $a_۱$: جمله ی اول دنباله

$a_n = b_n$

$۳n - ۳ + ۵ = ۲n - ۲ + ۷ \Rightarrow n = ۳$ سومین جمله

۵ -

می‌دانیم: $S_{\overset{\Delta}{AB}C} = \frac{۱}{۲} \times AB \times BC \times \sin\hat{B}$



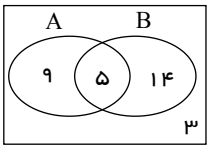
$$S = \frac{۱}{۲} \times ۳ \times ۵ \times \sin ۷۵^\circ = \frac{۱}{۲} \times ۳ \times ۵ \times \frac{۹۶}{۱۰۰} = ۷٫۲cm^۲$$

۶ - می‌دانیم: $n(A - B) = n(A) - n(A \cap B)$

اگر گروه سرود را A و گروه تئاتر را B بنامیم، داریم:

فقط سرود $n(A - B) = n(A) - n(A \cap B) = ۱۴ - ۵ = ۹$
فقط تئاتر $n(B - A) = n(B) - n(A \cap B) = ۱۹ - ۵ = ۱۴$

abdgaranedu.ir



الف) $n(A-B)=۹$

ب) $n(U)-n(A\cup B)=۳۱-(۹+۵+۱۴)=۳۱-۲۸=۳$

۷ -

$N=\{۱,۲,۳,\cdots\}$
$W=\{۰,۱,۲,۳,\cdots\}$
$Z=\{\cdots,-۳,-۲,-۱,۰,۱,۲,۳,\cdots\}$
$Q=\{\frac{m}{n}|\ m,n\in Z,n\neq ۰\}$
$Q'=$ مجموعه اعدادی که نتوانی آن‌ها را به صورت نسبت دو عدد صحیح نشان داد
$R=Q\cup Q'$

الف)نادرست: باتوجه به تعریف داریم که Q مجموعه اعدادی است که بتوان آنها را به صورت نسبت دو عدد صحیح نمایش داد و Q' مجموعه اعدادی است که نتوان آنها را به صورت نسبت دو عدد صحیح نشان داد پس اشتراک این دو مجموعه تهی است و $\{۰\}$ نادرست است (عدد صفر جزء Q' نیست)

ب) درست

پ) نادرست: $\sqrt{۱۷}$ عددی است که نمی‌توان به صورت نسبت دو عدد صحیح نشان داد پس جزء اعداد گنگ (Q') به شمار می‌آید.

ت) نادرست: از آنجایی که می‌دانیم جذر ۱۶ دو عدد $+۴$ و -۴ می‌شود و هر دو اعداد صحیح هستند پس $\sqrt{۱۶}$ عددی صحیح است.

۸ -

$N=\{۱,۲,۳,\cdots\}$
$W=\{۰,۱,۲,۳,\cdots\}$
$Z=\{\cdots,-۳,-۲,-۱,۰,۱,۲,۳,\cdots\}$
$Q=\{\frac{m}{n}|\ m,n\in Z,n\neq ۰\}$
$Q'=$ مجموعه اعدادی که نتوانی آن‌ها را به صورت نسبت دو عدد صحیح نشان داد
$R=Q\cup Q'$

الف) نادرست: $\sqrt{۵}$ را نمی‌توان به صورت نسبت دو عدد صحیح با مخرج غیر صفر نشان داد.

ب) نادرست: $N=\{۱,۲,۳,\cdots\}$

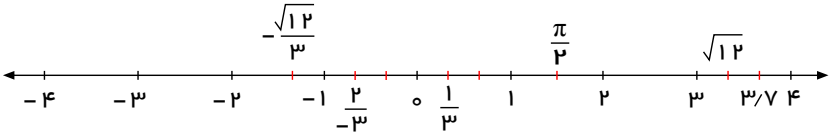
پ) نادرست: $\frac{۳}{۲}$ یک عدد گویا است و جزء اعداد گویا (Q) به حساب می‌آید.

ت) نادرست: $\sqrt{۵}$ عددی گنگ است و $\frac{-\sqrt{۵}}{۲}$ که نسبت $-\sqrt{۵}$ به ۲ است نسبت عددی گنگ به عددی صحیح است؛ پس $\frac{-\sqrt{۵}}{۲}$ گویا نیست.

ث) صحیح: می‌دانیم π عددی گنگ است پس تمامی نسبت‌های آن نیز گنگ است و $\frac{\pi}{۱۶}$ عددی گنگ به شمار می‌آید.

ج) نادرست:با توجه به $Z=\{\cdots,-۱,۰,۱,\cdots\}$ ؛ ۳٫۹ عددی اعشاری است و جزء مجموعه اعداد صحیح نیست.

۹ -



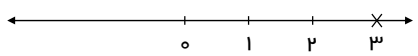
$\sqrt{۱۲}\sim ۳٫۴$ $\quad\frac{-\sqrt{۱۲}}{۳}\sim\frac{-۳٫۴}{۳}\sim -۱٫۱$ $\quad\frac{\pi}{۲}\sim\frac{۳٫۱۴}{۲}\sim ۱٫۵۷$

۱۰ - می‌خواهیم روی محور اعداد محل تقریبی $۲\sqrt{۲}-۳$ را مشخص کنیم. باید ابتدا ۳ واحد روی محور جلو رفته و سپس $۲\sqrt{۲}$ واحد به عقب برگردیم. بنا بر قضیه فیثاغورس طول وتر مثلث قائم‌الزاویه‌ای که اضلاع قائمه‌اش ۱ واحد باشد، $\sqrt{۲}$ واحد است. همچنین می‌دانیم $-۲\sqrt{۲}$ برابر است با $-\sqrt{۲}-\sqrt{۲}$

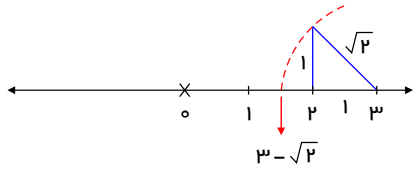
بنابراین در طی سه مرحله داریم:

abadgaranedu.ir

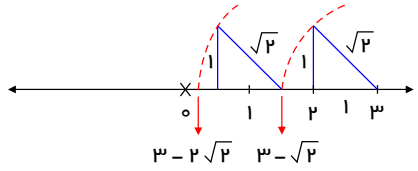
۱)



۲)



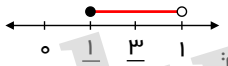
۳)



۱۱ - الف)درست: با مقایسه دو عدد $\frac{۱}{۳}$, $\frac{۳}{۵}$ داریم:

$$\begin{cases} \frac{۳}{۵} = \frac{۹}{۱۵} \\ \frac{۱}{۳} = \frac{۵}{۱۵} \\ ۱ = \frac{۱۵}{۱۵} \end{cases} \Rightarrow \quad ۱ > \frac{۳}{۵} > \frac{۱}{۳}$$

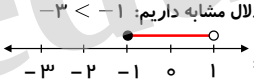
یا باتوجه به شکل داریم:



پس الف درست است.

ب)نادرست: با استدلال مشابه داریم: $۱ - > -۳$

و یا باتوجه به شکل:



پس ب نادرست است.

پ) نادرست: توجه کنید که $\{-۱,۱\}$ مجموعه‌ای است شامل دو عضو $-۱,۱$ اما $(-۱,۱)$ بازه‌ای باز است از -۱ تا ۱ همچنین $[-۱,۱]$ بازه ای بسته است از -۱ تا ۱ که هر دو بازه شامل تمام اعداد حقیقی بین -۱ تا ۱ هستند.

پس صفر جزء $\{-۱,۱\}$ نیست اما جزء $(-۱,۱)$ یا $[-۱,۱]$ هست.

ت)درست: باتوجه به توضیحات مورد پ

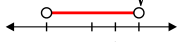
ث) نادرست: بازه نیم باز $[-۳,۲)$ شامل عدد -۳ است و شامل عدد ۲ نیست و بازه نیم باز $[-۳,۲)$ شامل عدد -۳ نیست و شامل عدد ۲ است. و از آنجا که در بازه‌ی اول عددی (-۳) هست که در بازه‌ی دوم نیست، پس بازه‌ی اول زیر مجموعه‌ای از بازه‌ی دوم نیست.

توجه شود که نبودن عدد ۲ در بازه‌ی اول و بودن آن در بازه‌ی دوم مشکلی برای مسئله ایجاد نمی‌کند و شرط لازم و کافی برای اینکه بازه‌ای زیرمجموعه بازه‌ی دیگر باشد فقط و فقط این است که هرچه در بازه‌ی اول هست در بازه‌ی دوم نیز باشد.

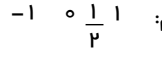
ج) درست: تهی زیرمجموعه‌ی همه مجموعه‌هاست.

چ) درست: $\{۱,۲\}$ فقط شامل دو عدد ۱ و ۲ است که در بازه‌ی بسته‌ی $[۱,۲]$ نیز موجود است پس $\{۱,۲\} \subset [۱,۲]$

ح) نادرست: بازه‌ی نیم باز $[-\sqrt{۵},\sqrt{۵})$ شامل عدد $\sqrt{۵}$ نیست.

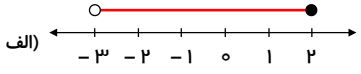


خ) درست: باتوجه به شکل داریم:



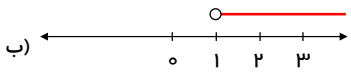
۱۲ - باتوجه به شکل هر بازه و مقادیر تقریبی هر عدد داریم: $-\sqrt{۳} = -۱٫۷ , \frac{\sqrt{۲}}{۲} = ۰٫۷ , \sqrt{۲} = ۱٫۴ , \sqrt{۷} \simeq ۲٫۶$

الف)



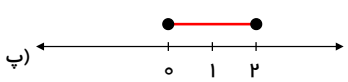
اعداد موجود در بازه ⟵ $-\frac{۲}{۳}, \sqrt{۲}, \frac{\sqrt{۲}}{۲}, -\sqrt{۳}, \frac{۱}{۲}, ۰٫۷$

ب)



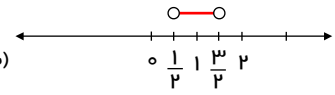
اعداد موجود در بازه ⟵ $۵, \sqrt{۷}, ۲٫۵, ۶٫۰۲۲ \times ۱۰^{۲۳}, \sqrt{۲}, ۱۰۰۰$

پ)

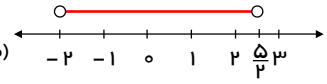


اعداد موجود در بازه ⟵ $\sqrt{۲}, \frac{\sqrt{۲}}{۲}, \frac{۱}{۲}, ۰٫۷$

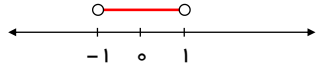
abadgaranedu.ir

ت) 

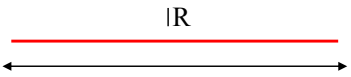
اعداد موجود در بازه ⟵ $\sqrt{۲}, \frac{\sqrt{۲}}{۲}, ۰/۷$

ث) 

اعداد موجود در بازه ⟵ $\frac{-۲}{۳}, \sqrt{۲}, \frac{\sqrt{۲}}{۲}, -\sqrt{۳}, \frac{۱}{۲}, ۰/۷$

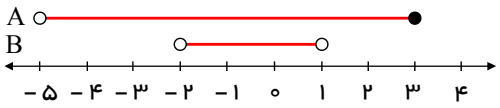
ج) 

اعداد موجود در بازه ⟵ $\frac{-۲}{۳}, \frac{\sqrt{۲}}{۲}, \frac{۱}{۲}, ۰/۷$

چ) 

اعداد موجود در بازه ⟵ تمام اعداد داده شده

۱۳ - باتوجه به شکل داریم:



الف) $A \cap B = (-۲, ۱)$

ب) $A \cup B = (-۵, ۳]$

ج) $A - B = (-۵, -۲] \cup [۱, ۳]$

د) $B - A = \varnothing$

۱۴ -

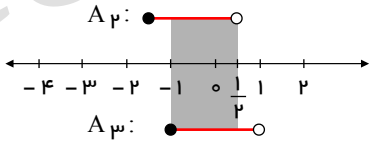
الف) $R - [۰, ۱) = (-\infty, ۰) \cup [۱, +\infty)$

ب) $R - (-۱, ۱) = (-\infty, -۱] \cup [۱, +\infty)$

۱۵ - باتوجه به معلومات سوال ابتدا $A_۱$, $A_۲$, $A_۳$ را تشکیل می‌دهیم:

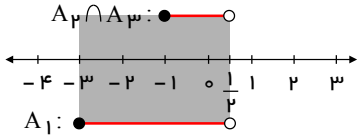
$$A_۱ = \left[\frac{-۳}{۱}, \frac{۱-۱}{۲}\right) = [-۳, ۰)$$
$$A_۲ = \left[\frac{-۳}{۲}, \frac{۲-۱}{۲}\right) = \left[\frac{-۳}{۲}, \frac{۱}{۲}\right)$$
$$A_۳ = \left[\frac{-۳}{۳}, \frac{۳-۱}{۲}\right) = [-۱, ۱)$$

حال $A_۲ \cap A_۳$ را با استفاده از محور بدست می‌آوریم:



$$A_۲ \cap A_۳ = \left[-۱, \frac{۱}{۲}\right)$$

و اجتماع آن را با $A_۱$ رسم می‌کنیم:



$$A_۱ \cup (A_۲ \cap A_۳) = \left[-۳, \frac{۱}{۲}\right)$$

اعداد صحیح موجود در این بازه عبارتند از: $-۳, -۲, -۱, ۰$

⇐ در این بازه ۴ عدد صحیح موجود است.

۱۶ -

الف) $A = \{۱, ۲, ۳, ۴, ۵\}$ متناهی

ب)متناهی

پ) $Z - W = \{\cdots, -۳, -۲, -۱\}$ نامتناهی

ت) $\{۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶\}$ متناهی

ث) متناهی: دقت کنید بزرگ بودن یک عدد یا سخت بودن شمارش آن به معنای نامتناهی بودن آن عدد نیست.

ج) نامتناهی: تمام بازه‌های اعداد حقیقی نامتناهی هستند.

چ) متناهی: باتوجه به توضیحات مورد ث، تعداد مورچه‌های هر شهر، هر قدر زیاد هم که باشد در نهایت عددی مشخص است.

۱۷ - الف) نادرست: از اشتراک دو مجموعه متناهی و نامتناهی، همواره مجموعه‌ای متناهی به دست می آید.

ب) درست: برای مثال $N \subseteq W$

پ) نادرست:اگر $A \subseteq B$ و B متناهی باشد، A حتماً متناهی خواهد بود.

ت) درست

ث) نادرست: تهی مجموعه‌ای بدون عضو و متناهی است چرا که تعداد اعضای آن صفر است و صفر عددی متناهی است.

۱۸ - قطعاً A یک مجموعه نامتناهی است که توانسته یک زیرمجموعه نامتناهی را در بر بگیرد.

abadgaranedu.ir

۱۹ - A می‌تواند متناهی یا نامتناهی باشد زیرا هم مجموعه های متناهی و هم مجموعه‌های نامتناهی توانایی در برگرفتن زیرمجموعه‌ای متناهی را دارند.

۲۰ - الف) درست

ب) درست: $A \cap B$ زیرمجموعه A و B است و وقتی نامتناهی باشد، حداقل یکی از دو مجموعه نامتناهی است.

پ) نادرست: کم کردن یک مجموعه متناهی از یک مجموعه نامتناهی، آن را متناهی نمی‌کند.

ت) نادرست: از اجتماع یک مجموعه متناهی با یک مجموعه نامتناهی همواره مجموعه‌ای نامتناهی به وجود می‌آید.

۲۱ -

الف) $A \cap B = [-۳, ۳]$ نامتناهی

ب) $A \cup B = (-\infty, ۵)$ نامتناهی

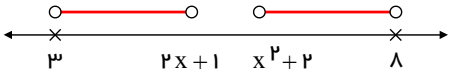
پ) $B - C = (-\infty, ۳)$ نامتناهی

ت) $D \cup B = (-\infty, ۵]$ نامتناهی

ث) $D - B = (۳, ۵]$ نامتناهی

ج) $B \cup C = (-\infty, +\infty) = R$ نامتناهی

۲۲ -



باتوجه به شکل مشخص است برای تهی بودن اشتراک دو بازه، باید انتهای بازه سمت چپ، مقدار عددی کمتر از ابتدای بازه سمت راست روی محور داشته باشد.

بنابراین :

$$x^۲ + ۲ > ۲x + ۱ \Rightarrow x^۲ - ۲x + ۲ - ۱ > ۰$$
$$\Rightarrow x^۲ - ۲x + ۱ > ۰ \Rightarrow (x-۱)^۲ > ۰$$

باتوجه به اینکه تمام عبارت‌های درجه دوم نامنفی هستند، پس به ازای تمام مقادیر x، اشتراک دو بازه داده شده، تهی خواهد بود.

۲۳ - الف) بله: مجموعه اعداد فرد $A' =$ مجموعه اعداد زوج $A =$

ب) بله: $B' = \{۱, ۲, ۳\}$ $B = \{۴, ۵, ۶, ۷, \cdots\}$

پ) خیر، باتوجه به اینکه مجموعه مرجع، مجموعه‌ای نامتناهی است، پس هر مجموعه متناهی مانند C که با اعضای مجموعه C بسازیم، تعداد اعضایش قابل شمارش و محدود خواهند بود، در نتیجه باقیمانده اعضای مجموعه C' بی شمار خواهند بود و C' نامتناهی خواهد شد.

۲۴ - راه اول: ابتدا باتوجه به A ، A' را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$A' = \{x \in R \,|\, x < ۱ \text{ یا } x > ۳\}$$

و سپس آن را به صورت بازه نمایش می‌دهیم:

$$A' = (-\infty, ۱) \cup (۳, +\infty)$$

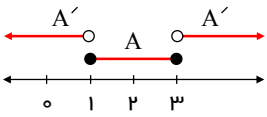
راه دوم: ابتدا A را به صورت بازه می‌نویسیم:

$$A = [۱, ۳]$$

سپس A' را بدست می‌آوریم:

$$A' = (-\infty, ۱) \cup (۳, +\infty)$$

راه سوم: با توجه به محور اعداد:



$$A' = (-\infty, +۱) \cup (۳, +\infty)$$

۲۵ - مجموعه $A = \{-۱, ۰, ۱\}$ را در نظر بگیرید.

با فرض $\mathbb{Z}$ به عنوان مجموعه‌ی مرجع، A' به شکل مقابل خواهد بود:

$$A' = \mathbb{Z} - \{-۱, ۰, ۱\} = \{\cdots, -۳, -۲\} \cup \{۲, ۳, ۴, \cdots\}$$

با فرض $\mathbb{R}$ به عنوان مجموعه‌ی مرجع، A' به شکل مقابل خواهد بود:

$$A' = \mathbb{R} - \{-۱, ۰, ۱\} = (-\infty, -۱) \cup (-۱, ۰) \cup (۰, ۱) \cup (۱, +\infty)$$

با توجه به مثال مشخص شد که متمم هر مجموعه، بسته به مجموعه‌ی مرجع متفاوت می‌شود.

۲۶ -

$$\begin{cases} U = \{a, b, c, d, e, f\} \\ A = \{a, b, c\} \Rightarrow A' = \{d, e, f\} \\ B = \{c, d, f\} \Rightarrow B' = \{a, b, e\} \end{cases}$$

الف) $\left.\begin{array}{l} A - B = \{a, b, c\} - \{c, d, f\} = \{a, b\} \\ A \cap B' = \{a, b, c\} \cap \{a, b, e\} = \{a, b\} \end{array}\right\} \Rightarrow A - B = A \cap B'$

abadgaranedu.ir

ب) $A' = \{d, e, f\} \Rightarrow (A')' = \{a, b, c\} = A \Rightarrow (A')' = A$

پ) $\left.\begin{matrix}(A \cup B)' = (\{a, b, c, d, f\})' = \{e\} \\ A' \cap B' = \{d, e, f\} \cap \{a, b, e\} = \{e\}\end{matrix}\right\} \Rightarrow (A \cup B)' = A' \cap B'$

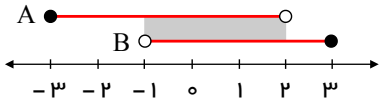
ت) $(A \cap B)' = (\{a, b, c\} \cap \{c, d, f\})' = (\{c\}') = \{a, b, d, e, f\}$

$A' \cup B' = \{d, e, f\} \cup \{a, b, e\} = \{a, b, d, e, f\} \Rightarrow (A \cap B)' = A' \cup B'$

ث) $\{a, b, c\} - \{d, e, f\} = \{a, b, c\} \Rightarrow A - A' = A$

۲۷ -

باتوجه به محور اعداد داریم:



$A \cap B = (-۱, ۲) \Rightarrow (A \cap B)' = (-\infty, -۱] \cup [۲, +\infty)$

۲۸ -

$A = \{\cdots, -۶, -۵, -۴\} \rightarrow A' = \{-۳, -۲, -۱, ۰, ۱, \cdots\}$

$A' - B = \{-۳, -۲, -۱, ۰, ۱, ۲, \cdots\} - \{-۳, -۲, -۱\} = \{۰, ۱, ۲, \cdots\} = W$ مجموعه اعداد حسابی

۲۹ - بنا به تعریف، دو مجموعه‌ی مجزا به دو مجموعه‌ای که فاقد عضو مشترک باشند گفته می‌شود از این رو اشتراک آن دو مجموعه تهی است و داریم: $n(A \cap B) = ۰$

و باتوجه به رابطه اصلی تعداد عضوهای اجتماع دو مجموعه خواهیم داشت:

$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) = n(A) + n(B)$

۳۰ - طبق رابطه‌ی تعداد عضوهای اجتماع دو مجموعه داریم:

$$\boxed{n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)}$$

$۱۴ = ۱۰ + n(B) - ۳ \Rightarrow n(B) = ۱۴ - ۱۰ + ۳ = ۷$

abadgaranedu.ir