پاسخنامه تشریحی

۱ - گزینه ۴

$$\tan 3x \cdot \tan x = 1 \to \tan 3x = \frac{1}{\tan x} \to \tan 3x = \cot x \to \tan 3x = \tan(\frac{\pi}{2} - x)$$

$$\xrightarrow{x=k\pi+\alpha} 3x = k\pi + \frac{\pi}{2} - x \to 4x = k\pi + \frac{\pi}{2} \to x = \frac{k\pi}{4} + \frac{\pi}{8}$$

۲ - گزینه ۱ می‌دانیم: $\boxed{(\sin a - \cos a)^2 = 1 - \sin 2a}$

$$\sin\alpha - \cos\alpha = \frac{1}{2} \xrightarrow{\text{توان ۲}} 1 - \sin 2\alpha = \frac{1}{4} \to \sin 2\alpha = \frac{3}{4}$$

$$\cos(\frac{3\pi}{2} - 2\alpha) = -\sin 2\alpha = -\frac{3}{4}$$

۳ - گزینه ۴ **دو طرف تساوی داده شده را به توان ۲ می‌رسانیم:**

$$(\sin x + \cos x)^2 = (\frac{5}{4})^2$$

$$\underbrace{\sin^2 x + \cos^2 x}_{1} + 2\sin x\cos x = \frac{25}{16} \Rightarrow 2\sin x\cos x = \frac{25}{16} - 1 = \frac{9}{16}$$

$$\Rightarrow 2\sin x\cos x = \frac{9}{16}$$

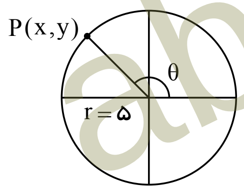
حاصل عبارت $(\sin x - \cos x)^2$ را بدست می‌آوریم:

$$\underbrace{\sin^2 x + \cos^2 x}_{1} - \underbrace{2\sin x\cos x}_{\frac{9}{16}} = 1 - \frac{9}{16} = \frac{7}{16}$$

بنابراین داریم:

$$\sin x - \cos x = \pm\sqrt{\frac{7}{16}} = \pm\frac{\sqrt{7}}{4}$$

۴ - گزینه ۲



می‌دانیم در دایره مثلثاتی با شعاع غیر از یک، $(r \neq 1)$ سینوس یک زاویه برابر است با:

$$\sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{y}{5} = \frac{1}{4} \Rightarrow y = \frac{5}{4}$$

از طرفی داریم:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \Rightarrow r^2 = x^2 + y^2$$

$$\Rightarrow x^2 = r^2 - y^2 = 5^2 - (\frac{5}{4})^2 = 25(1 - \frac{1}{16})$$

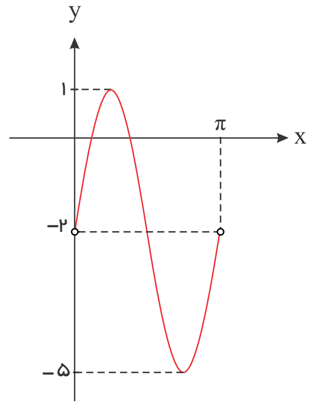
$$= 25 \times \frac{15}{16} \Rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{25 \times 15}{16}} = \pm\frac{5}{4}\sqrt{15} \xrightarrow[x<0]{\text{ربع دوم}} x = -\frac{5}{4}\sqrt{15}$$

۵ - گزینه ۲

$$f(x) = 3\sin 2x - 2 \Rightarrow T = \frac{2\pi}{2} = \pi$$

abadgaranedu.ir

برای رسم نمودار تابع f کافی است که در تابع $y=\sin x$ طول‌ها را نصف کرده و سپس عرض‌ها را سه برابر کرده و شکل را دو واحد پایین آوریم که شکل روبرو به‌دست می‌آید.



تابع $g(x)=k$ زمانی نمودار f را در دو نقطه قطع می‌کند که: $-5<k<-2$ یا $-2<k<1$

۶ ـ گزینه ۳

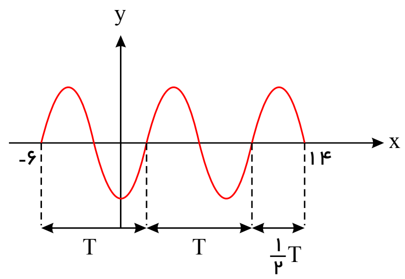
نکته: $\cos(\pi+\alpha)=-\cos\alpha$

ابتدا ضابطهٔ f را ساده‌تر می‌نویسیم:

$$f(x)=a\underbrace{\cos(\pi+bx)}_{-\cos bx}\Rightarrow f(x)=-a\cos bx$$

نمودار رسم شده، تابع را در ۲٫۵ دورهٔ تناوب نشان می دهد، پس:

$$\Rightarrow \frac{5}{2}T=14-(-6)\Rightarrow \frac{5}{2}T=20\Rightarrow T=8$$



از طرفی دورهٔ تناوب تابع از رابطهٔ $\frac{2\pi}{|b|}$ به‌دست می‌آید، پس:

$$\frac{2\pi}{|b|}=8\Rightarrow |b|=\frac{\pi}{4}$$

از طرفی مقدار تابع در $x=0$ برابر -4 است، پس:

$$f(0)=-4\Rightarrow -a\underbrace{\cos 0}_{1}=-4\Rightarrow a=4$$

در نتیجه ضابطهٔ f به‌صورت $f(x)=-4\cos\frac{\pi x}{4}$ یا $f(x)=-4\cos(-\frac{\pi x}{4})$ در می‌آید و داریم:

$$f(-\frac{32}{3})=-4\cos(\frac{\pi}{4}\times\frac{-32}{3})=-4\cos(\frac{-8\pi}{3})=-4\cos(\frac{8\pi}{3})$$
$$=-4\cos(2\pi+\frac{2\pi}{3})=-4\cos\frac{2\pi}{3}=-4\times\frac{-1}{2}=2$$

دقت کنید چون $\cos(-\theta)=\cos\theta$، جواب سؤال برای $b=-\frac{\pi}{4}$ نیز همین است.

۷ ـ گزینه ۲

می‌دانیم $\tan 2a=\frac{2\tan a}{1-\tan^2 a}$ است.

$$\tan 2x=3\tan x\rightarrow \frac{2\tan x}{1-\tan^2 x}=3\tan x\rightarrow 2\tan x=3\tan x(1-\tan^2 x)\rightarrow 2\tan x=3\tan x-3\tan^3 x\rightarrow 3\tan^3 x-\tan x=0$$
$$\rightarrow \tan x(3\tan^2 x-1)=0\rightarrow \tan x=0 \text{ یا } 3\tan^2 x-1=0$$
$$\tan x=0\rightarrow \frac{\sin x}{\cos x}=0\rightarrow \sin x=0\xrightarrow{\text{حالت خاص}} x=k\pi\rightarrow x=\pi,2\pi \text{ ۲ جواب}$$

$$3\tan^2 x-1=0\Rightarrow \tan^2 x=\frac{1}{3}\Rightarrow \tan x=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}=\tan(\pm\frac{\pi}{6})\xrightarrow{\tan x=\tan\alpha\rightarrow x=k\pi+\alpha} x=k\pi\pm\frac{\pi}{6}\rightarrow x=\frac{\pi}{6},\pi+\frac{\pi}{6},\pi-\frac{\pi}{6},2\pi-\frac{\pi}{6},2\pi+\frac{\pi}{6} \text{ ۵ جواب}$$

در کل معادله در بازهٔ $(0,\frac{5\pi}{2})$ دارای ۷ جواب است.

abadgaranedu.ir

۸ - گزینه ۲

دورهٔ تناوب تابع $y = a\cos bx + c$ به‌صورت $T = \frac{۲\pi}{|b|}$ و کمترین مقدار آن $Min = -|a| + c$ است.

$$Min = -|a| + ۲ = ۰ \Rightarrow |a| = ۲$$

باتوجه به نمودار، $\frac{۵}{۲}$ دورهٔ تناوب این تابع برابر $\frac{۱۰}{۳} = \frac{۸}{۳} - (-\frac{۲}{۳})$ است؛ درنتیجه داریم:

$$\frac{۵}{۲}T = \frac{۱۰}{۳} \Rightarrow T = \frac{۲ \times ۱۰}{۵ \times ۳} = \frac{۴}{۳}$$

از طرفی دورهٔ تناوب این تابع برابر است با $\frac{۲\pi}{|b|\pi} = \frac{۲}{|b|}$.

$$\Rightarrow \frac{۲}{|b|} = \frac{۴}{۳} \Rightarrow |b| = \frac{۶}{۴} = \frac{۳}{۲} \Rightarrow |ab| = |a||b| = ۲ \times \frac{۳}{۲} = ۳$$

۹ - گزینه ۲

$$\sin(\theta - \frac{۵\pi}{۲}) = \frac{\sqrt{۳}}{۳} \Rightarrow -\sin(\frac{۵\pi}{۲} - \theta) = \frac{\sqrt{۳}}{۳} \Rightarrow \sin(۲\pi + \frac{\pi}{۲} - \theta) = -\frac{\sqrt{۳}}{۳}$$

$$\Rightarrow \sin(\frac{\pi}{۲} - \theta) = -\frac{\sqrt{۳}}{۳} \Rightarrow \cos\theta = -\frac{\sqrt{۳}}{۳}$$

$$A = (\sin^۲\theta - \cos^۲\theta)\underbrace{(\sin^۲\theta + \cos^۲\theta)}_{۱} + \frac{۱}{\frac{۱}{\cos^۲\theta}} = \sin^۲\theta - \cos^۲\theta + \cos^۲\theta = \sin^۲\theta$$

$$A = ۱ - \cos^۲\theta = ۱ - (-\frac{\sqrt{۳}}{۳})^۲ = ۱ - \frac{۳}{۹} = ۱ - \frac{۱}{۳} = \frac{۲}{۳}$$

۱۰ - گزینه ۲ می‌دانیم که $\sin ۲a = ۲\sin a\cos a$ و $\frac{۱}{\sin^۲ a} = ۱ + \cot^۲ a$ است.

$$\sqrt{۱ + ۳\sin ۲x} < \sin x\sqrt{۱ + \cot^۲ x} \rightarrow \sqrt{۱ + ۳\sin ۲x} < \sin x\sqrt{\frac{۱}{\sin^۲ x}} \rightarrow \sqrt{۱ + ۳\sin ۲x} < \sin x\frac{۱}{|\sin x|}$$

دو حالت را بررسی می‌کنیم:

الف) $\sin x > ۰ \rightarrow \sqrt{۱ + ۳\sin ۲x} < \sin x \times \frac{۱}{\sin x} \rightarrow \sqrt{۱ + ۳\sin ۲x} < ۱ \rightarrow ۱ + ۳\sin ۲x < ۱ \rightarrow ۳\sin ۲x < ۰ \rightarrow ۶\underbrace{\sin x}_{+}\cos x \rightarrow \cos x < ۰$

$\rightarrow$ انتهای کمان x در ناحیهٔ دوم است .

ب) $\sin x < ۰ \rightarrow \sqrt{۱ + ۳\sin ۲x} < \sin x \times \frac{۱}{-\sin x} \rightarrow \sqrt{۱ + ۳\sin ۲x} < -۱$: امکان ندارد

پس انتهای کمان x در ناحیهٔ دوم دایرهٔ مثلثاتی واقع شده است.

۱۱ - گزینه ۳ می‌دانیم که $\cos ۲x = ۲\cos^۲ x - ۱$ است.

$$f(x) = ۲ - ۴\cos^۲ x = ۲(۱ - ۲\cos^۲ x) = -۲\cos ۲x \Rightarrow f(x) = -۲\cos ۲x$$

$$g(x) = f(x + \frac{\pi}{۴}) \rightarrow g(x) = -۲\cos(\frac{\pi}{۲} + ۲x) \Rightarrow g(x) = ۲\sin ۲x$$

تلاقی: $f(x) = g(x) \Rightarrow -۲\cos ۲x = ۲\sin ۲x \xrightarrow{\div \cos ۲x} \tan ۲x = -۱ = \tan(-\frac{\pi}{۴}) \xrightarrow{\tan x = \tan\alpha \to x = k\pi + \alpha} ۲x = k\pi - \frac{\pi}{۴} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{۲} - \frac{\pi}{۸}$

۱۲ - گزینه ۲

می‌دانیم: $\boxed{\cos ۲a = \cos^۲ a - \sin^۲ a}$

$$\sin^۲ x - \cos^۲ x = \sin(\frac{۳\pi}{۲} + x) \Rightarrow -\cos ۲x = -\cos x \Rightarrow \cos ۲x = \cos x$$

$$\xrightarrow{x = ۲k\pi \pm \alpha} ۲x = ۲k\pi \pm x \Rightarrow \begin{cases} x = ۲k\pi \\ \text{یا} \\ x = \frac{۲k\pi}{۳} \end{cases} \rightarrow x = \frac{۲k\pi}{۳}$$

$x = \frac{۲k\pi}{۳}$ جواب‌های $x = ۲k\pi$ را پوشش می‌دهد.

abadgaranedu.ir

۱۳ - گزینه ۳

$$\frac{\sin ۱۶۰^\circ - \cos ۲۰۰^\circ}{\cos ۱۱۰^\circ + \sin ۷۰^\circ} = \frac{\sin(۱۸۰^\circ - ۲۰^\circ) - \cos(۱۸۰^\circ + ۲۰^\circ)}{\cos(۹۰^\circ + ۲۰^\circ) + \sin(۹۰^\circ - ۲۰^\circ)} = \frac{\sin ۲۰^\circ + \cos ۲۰^\circ}{-\sin ۲۰^\circ + \cos ۲۰^\circ}$$

$$\xlongequal{\div \cos ۲۰^\circ} \frac{\tan ۲۰^\circ + ۱}{-\tan ۲۰^\circ + ۱} = \frac{\frac{۳۶}{۱۰۰} + ۱}{-\frac{۳۶}{۱۰۰} + ۱} = \frac{۱۳۶}{۶۴} = \frac{۱۷}{۸}$$

۱۴ - گزینه ۳

می دانیم: $\boxed{\tan ۲a = \frac{۲\tan a}{۱ - \tan^۲ a}}$

$$\sqrt{۳}(\tan^۲ x - ۱) + ۲\tan x = ۰ \to ۲\tan x = \sqrt{۳}(۱ - \tan^۲ x)$$
$$\to \frac{۲\tan x}{۱ - \tan^۲ x} = \sqrt{۳} \Rightarrow \tan ۲x = \sqrt{۳} = \tan\frac{\pi}{۳} \xrightarrow{x = k\pi + \alpha} ۲x = k\pi + \frac{\pi}{۳} \to x = \frac{k\pi}{۲} + \frac{\pi}{۶}$$

۱۵ - گزینه ۳ تمام زوایا را برحسب ۲۵° می‌نویسیم .

$$\frac{\sin ۱۵۵^\circ - ۳\cos ۲۴۵^\circ}{\cos ۲۹۵^\circ - ۲\sin ۶۵^\circ} = \frac{\sin(\pi - ۲۵) - ۳\cos(\frac{۳\pi}{۲} - ۲۵)}{\cos(\frac{۳\pi}{۲} + ۲۵) - ۲\sin(\frac{\pi}{۲} - ۲۵)} = \frac{\sin ۲۵ + ۳\sin ۲۵}{\sin ۲۵ - ۲\cos ۲۵} = \frac{۴\sin ۲۵}{\sin ۲۵ - ۲\cos ۲۵}$$

صورت و مخرج کسر را بر $\cos ۲۵$ تقسیم می کنیم: $\frac{۴\tan ۲۵}{\tan ۲۵ - ۲} = \frac{۴(۰/۴۸)}{۰/۴۸ - ۲} = \frac{۱/۹۲}{-۱/۵۲} = -\frac{۱۹۲}{۱۵۲} = -\frac{۲۴}{۱۹}$

۱۶ - گزینه ۴ می‌دانیم: $\boxed{\sin ۲a = \frac{۲\tan a}{۱ + \tan^۲ a} \quad \text{و} \quad \cos ۲a = \frac{۱ - \tan^۲ a}{۱ + \tan^۲ a}}$

$$۳\sin x - ۴\cos x = ۵ \Rightarrow ۳\left(\frac{۲\tan\frac{x}{۲}}{۱ + \tan^۲\frac{x}{۲}}\right) - ۴\left(\frac{۱ - \tan^۲\frac{x}{۲}}{۱ + \tan^۲\frac{x}{۲}}\right) = ۵$$

$$\xrightarrow{\times(۱ + \tan^۲\frac{x}{۲})} ۶\tan\frac{x}{۲} - ۴(۱ - \tan^۲\frac{x}{۲}) = ۵(۱ + \tan^۲\frac{x}{۲})$$

$$\to \tan^۲\frac{x}{۲} - ۶\tan\frac{x}{۲} + ۹ = ۰ \to (\tan\frac{x}{۲} - ۳)^۲ = ۰ \to \tan\frac{x}{۲} - ۳ = ۰ \to \tan\frac{x}{۲} = ۳$$

می‌دانیم: $\tan x = \frac{۲\tan\frac{x}{۲}}{۱ - \tan^۲\frac{x}{۲}} = \frac{۲(۳)}{۱ - ۹} = -\frac{۳}{۴}$

$$\cos ۲x = \frac{۱ - \tan^۲ x}{۱ + \tan^۲ x} = \frac{۱ - \frac{۹}{۱۶}}{۱ + \frac{۹}{۱۶}} = \frac{\frac{۷}{۱۶}}{\frac{۲۵}{۱۶}} = \frac{۷}{۲۵} = ۰/۲۸$$

۱۷ - گزینه ۳

$$\cos ۲۱۵^\circ = \cos(۲۷۰^\circ - ۵۵^\circ) = -\sin ۵۵^\circ$$
$$\sin ۳۰۵^\circ = \sin(۳۶۰^\circ - ۵۵^\circ) = -\sin ۵۵^\circ$$
$$\cos ۳۲۵^\circ = \cos(۲۷۰^\circ + ۵۵^\circ) = \sin ۵۵^\circ$$

پس : $\frac{\sin ۵۵^\circ + ۲\cos ۲۱۵^\circ}{۳\sin ۳۰۵^\circ - \cos ۳۲۵^\circ} = \frac{\sin ۵۵^\circ - ۲\sin ۵۵^\circ}{-۳\sin ۵۵^\circ - \sin ۵۵^\circ} = \frac{-\sin ۵۵^\circ}{-۴\sin ۵۵^\circ} = \frac{۱}{۴} = a$

۱۸ - گزینه ۴

می‌دانیم: $\boxed{\cos ۲a = ۱ - ۲\sin^۲ a}$

$$\cos ۴x + ۲\sin^۲ x = ۱ \to \cos ۴x = ۱ - ۲\sin^۲ x \to \cos ۴x = \cos ۲x$$

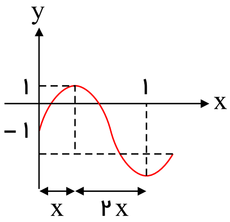
$$\xrightarrow{x = ۲k\pi \pm \alpha} \begin{cases} ۴x = ۲k\pi + ۲x \to ۲x = ۲k\pi \to x = k\pi \\ ۴x = ۲k\pi - ۲x \to ۶x = ۲k\pi \to x = \frac{k\pi}{۳} \end{cases}$$

دقت کنید که جواب‌های $x = k\pi$ همگی در $x = \frac{k\pi}{۳}$ قرار دارند بنابراین جواب کلی معادله $x = \frac{k\pi}{۳}$ است.

۱۹ - گزینه ۳ می‌دانیم: $\boxed{y = \sin ax \to T = \frac{۲\pi}{|a|}}$

نکته: در منحنی‌های متناوب دو برابر فاصله‌ی طولی ماکسیمم و مینیمم، طول دوره‌ی تناوب آن تابع است.

abadgaranedu.ir



باتوجه به شکل دوره‌ی تناوب تابع برابر $۴x$ می‌باشد $۳x=۱$ است، پس $x=\frac{۱}{۳}$ به‌دست می‌آید بنابراین دوره‌ی تناوب تابع $T=۴x=\frac{۴}{۳}$ خواهد بود. از ضابطه‌ی تابع دوره‌ی تناوب برابر $T=\frac{۲\pi}{|b\pi|}$ به دست می‌آید:

$$\frac{۲\pi}{|b\pi|}=\frac{۲}{|b|}=\frac{۴}{۳}\Rightarrow |b|=\frac{۳}{۲}\Rightarrow \begin{cases} b=\frac{۳}{۲}\\ \text{یا}\\ b=\frac{-۳}{۲}\end{cases}$$

اگر $b=\frac{۳}{۲}$ باشد، مقدار تابع در $x=\frac{۱}{۳}$ برابر ۱ است بنابراین همین عدد برای b صحیح است.

$$y(\frac{۱}{۳})=a\sin\frac{\pi}{۲}-۱=۱\Rightarrow a-۱=۱\Rightarrow a=۲$$

$$\Rightarrow a+b=۲+\frac{۳}{۲}=\frac{۷}{۲}=۳٫۵$$

توجه کنید که اگر $b=\frac{-۳}{۲}$ باشد به طور مشابه $a=-۲$ به دست می‌آید که $a+b=-\frac{۷}{۲}$ می‌شود که در گزینه‌ها نیست.

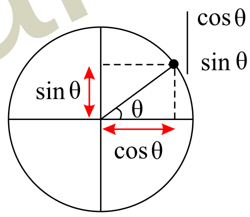
۲۰ – گزینه ۳ ابتدا زاویه را از درجه به رادیان تبدیل می‌کنیم.

$$\frac{D}{۱۸۰}=\frac{R}{\pi}\Rightarrow\frac{۵۰}{۱۸۰}=\frac{R}{\pi}\Rightarrow R=\frac{۵\pi}{۱۸}$$

شعاع دایره: $\theta_{\text{برحسب رادیان}}=\frac{L}{r}\Rightarrow\frac{۵\pi}{۱۸}=\frac{۱۰}{r}\Rightarrow r\pi=۳۶\Rightarrow r=\frac{۳۶}{\pi}$

$$\left.\begin{array}{l} S=\text{مساحت دایره}=\pi r^۲\\ P=\text{محیط دایره}=۲\pi r\end{array}\right\}\Rightarrow\frac{S}{P}=\frac{r}{۲}=\frac{\frac{۳۶}{\pi}}{\frac{۲}{۱}}=\frac{۱۸}{\pi}$$

۲۱ – گزینه ۲ اگر زاویه‌ی θ در موقعیت استاندارد باشد، نقطه‌ی انتهایی کمان θ دایره‌ی مثلثاتی را طبق شکل مقابل در نقطه‌ی $\left|\begin{array}{l}\cos\theta\\ \sin\theta\end{array}\right.$ قطع می‌کند.



پس $\sin\theta=\frac{۱}{۳}$ ، $\cos\theta=\frac{-۲\sqrt{۲}}{۳}$ است.

$$\cot\theta=\frac{\cos\theta}{\sin\theta}=\frac{\frac{-۲\sqrt{۲}}{۳}}{\frac{۱}{۳}}=-۲\sqrt{۲}\ ,\ \cos(\frac{۳\pi}{۲}-\theta)=-\sin\theta=-\frac{۱}{۳}$$

$$A=\frac{۱+\cot^۲\theta}{\cos(\frac{۳\pi}{۲}-\theta)}=\frac{۱+(-۲\sqrt{۲})^۲}{-\frac{۱}{۳}}=\frac{۹}{-\frac{۱}{۳}}=-۲۷$$

۲۲ – گزینه ۲ می‌دانیم: $\boxed{\cos ۲a=\cos^۲ a-\sin^۲ a}$

$$f(x)=\cos^۴ x-\sin^۴ x=\underbrace{(\cos^۲ x+\sin^۲ x)}_{۱}(\cos^۲ x-\sin^۲ x)=\cos ۲x$$

دوره‌ی تناوب تابع $y=\cos bx$ برابر $T=\frac{۲b}{|b|}$ است بنابراین دوره‌ی تناوب این تابع برابر $T=\frac{۲\pi}{|۲|}=\pi$ است.

۲۳ – گزینه ۴ می‌دانیم: $\boxed{\sin ۲a=\frac{۲\tan a}{۱+\tan^۲ a}\ ,\ \tan ۲a=\frac{۲\tan a}{۱-\tan^۲ a}}$

$$\frac{\tan^۲ x}{۱-\tan^۴ x}=\frac{\tan^۲ x}{(۱+\tan^۲ x)(۱-\tan^۲ x)}=\frac{\tan x}{۱+\tan^۲ x}\times\frac{\tan x}{۱-\tan^۲ x}$$

$$=\frac{۱}{۲}\times\frac{۲\tan x}{۱+\tan^۲ x}\times\frac{۱}{۲}\times\frac{۲\tan x}{۱-\tan^۲ x}=\frac{۱}{۴}\sin ۲x\cdot\tan ۲x\overset{x=\frac{\pi}{۱۲}}{=\!=\!=}\frac{۱}{۴}\sin\frac{\pi}{۶}\cdot\tan\frac{\pi}{۶}$$

$$=\frac{۱}{۴}(\frac{۱}{۲})(\frac{\sqrt{۳}}{۳})=\frac{\sqrt{۳}}{۲۴}$$

abadgaranedu.ir

۲۴ - گزینه ۳ می‌دانیم: $\boxed{\begin{array}{l}\sin 2a = 2\sin a\cos a \\ 1+\cos 2a = 2\cos^2 a\end{array}}$

$$\frac{\sin 20^\circ}{1+\cos 20^\circ} = \frac{2\sin 10^\circ \cos 10^\circ}{2\cos^2 10^\circ} = \frac{\sin 10^\circ}{\cos 10^\circ} = \tan 10^\circ$$

۲۵ - گزینه ۳

$$f(x) = a\sin(\frac{\pi}{2}+bx) \xrightarrow{\sin(\frac{\pi}{2}+\alpha)=\cos\alpha} f(x) = a\cos bx$$

نمودار تابع از نقطه‌ی $\left|\begin{array}{l}0\\-2\end{array}\right.$ عبور می‌کند بنابراین این نقطه در تابع صدق می‌کند.

$$\left|\begin{array}{l}0\\-2\end{array}\right. \xrightarrow{\text{صدق}} -2 = a\cos 0 \to a=-2 \to f(x) = -2\cos bx$$

می‌دانیم دوره‌ی تناوب $y=\cos bx$ برابر $T=\frac{2\pi}{|b|}$ است و از روی نمودار داریم:

$$\frac{3T}{4} = \frac{\pi}{2} \to T = \frac{2\pi}{3} \to \frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{3} \to |b| = 3 \to b = \pm 3$$

$$\text{پس}: f(x) = -2\cos(\pm 3x) \xrightarrow{\cos(-\alpha)=\cos\alpha} f(x) = -2\cos 3x \to f(\frac{\pi}{12}) = -2\cos\frac{\pi}{4} = -2(\frac{\sqrt{2}}{2}) = -\sqrt{2}$$

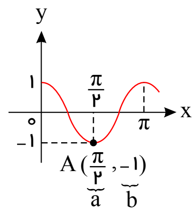
۲۶ - گزینه ۴ می‌دانیم: $\boxed{\cos 2a = 1-2\sin^2 a}$

ابتدا تابع داده شده را ساده می‌کنیم: $y = 1-2\sin^2 x = \cos 2x$

می‌دانیم دوره‌ی تناوب $y=\cos ax$ از رابطه‌ی $T=\frac{2\pi}{|a|}$ بدست می‌آید و Max تابع $y=\cos 2x$ برابر ۱ و Min آن برابر ۱- است.

$$T = \frac{2\pi}{|a|} = \frac{2\pi}{|2|} = \pi \;,\; Max = 1 \;,\; Min = -1$$

شکل تابع را رسم کرده و مختصات نقطه‌ی A را پیدا می‌کنیم:



$$\to A\left|\begin{array}{l}\frac{\pi}{2} \to a\\ -1 \to b\end{array}\right. \to a\times b = -\frac{\pi}{2}$$

۲۷ - گزینه ۳

می‌دانیم: $\boxed{\cot a - \tan a = 2\cot 2a \;,\; \sin 2a = \frac{2\tan a}{1+\tan^2 a}}$

$$\sin 2x = \frac{4}{5} \to \frac{2\tan x}{1+\tan^2 x} = \frac{4}{5} \to 4+4\tan^2 x = 10\tan x$$

$$\to 4\tan^2 x - 10\tan x + 4 = 0 \to 2\tan^2 x - 5\tan x + 2 = 0 \xrightarrow{\Delta=b^2-4ac=25-16=9} \tan x = \frac{5\pm 3}{4} = 2 \,,\, \frac{1}{2}$$

$$\text{پس:}\begin{cases}\cot\frac{x}{2} - \tan\frac{x}{2} = 2\cot x = 2(\frac{1}{\tan x}) \overset{\tan x=2}{=\!=\!=} 1\\ \cot\frac{x}{2} - \tan\frac{x}{2} = 2\cot x = 2(\frac{1}{\tan x}) \overset{\tan x=\frac{1}{2}}{=\!=\!=} 4\end{cases}$$

۲۸ - گزینه ۳ می‌دانیم: $\boxed{1+\cot^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha} \;,\; \sin 2a = 2\sin a\cos a}$

$$(1+\cot^2 x)\sin(\pi+2x) = 2 \to \frac{1}{\sin^2 x}(-\sin 2x) = 2$$

$$\to 2\sin^2 x = -\sin 2x \to 2\sin^2 x = -2\sin x\cos x$$

$$\to 2\sin^2 x + 2\sin x\cos x = 0 \to 2\sin x(\sin x + \cos x) = 0$$

$$\to \begin{cases} 2\sin x = 0 \to \sin x = 0 \quad \text{(مخرج را صفر می‌کند) غ‌ق}\\ \sin x + \cos x = 0 \to \sin x = -\cos x \xrightarrow{\div \cos x} \tan x = -1 = \tan(\frac{-\pi}{4})\\ \xrightarrow{x=k\pi+\alpha} x = k\pi - \frac{\pi}{4} \to \begin{array}{c|cc} k & 1 & 2\\ \hline x & \frac{3\pi}{4} & \frac{7\pi}{4}\end{array}\end{cases}$$

abadgaranedu.ir

ریاضی کنکور

بنابراین مجموع جواب‌ها $\frac{۵\pi}{۲} = \frac{۷\pi}{۴} + \frac{۳\pi}{۴}$ است.

۲۹ - گزینه ۲ می‌دانیم: $\boxed{\cot a - \tan a = ۲\cot ۲a}$

$$\tan\frac{x}{۲} - \cot\frac{x}{۲} = -(\cot\frac{x}{۲} - \tan\frac{x}{۲}) = -۲\cot x = -۲(\frac{۱}{\tan x}) = -۲(\frac{۳}{۴}) = -\frac{۳}{۲}$$

۳۰ - گزینه ۴ می‌دانیم: $\boxed{\cot a + \tan a = \frac{۲}{\sin ۲a}\ ,\ \cot a - \tan a = ۲\cot ۲a\ ,\ a^۲ + b^۲ = (a+b)^۲ - ۲ab}$

$$\tan^۴\frac{\pi}{۸} - \cot^۴\frac{\pi}{۸} = (\tan^۲\frac{\pi}{۸} + \cot^۲\frac{\pi}{۸})(\tan^۲\frac{\pi}{۸} - \cot^۲\frac{\pi}{۸})$$

$$= ((\tan\frac{\pi}{۸} + \cot\frac{\pi}{۸})^۲ - ۲\underbrace{\tan\frac{\pi}{۸}\cot\frac{\pi}{۸}}_{۱})(\tan\frac{\pi}{۸} + \cot\frac{\pi}{۸})(\tan\frac{\pi}{۸} - \cot\frac{\pi}{۸})$$

$$= ((\frac{۲}{\sin\frac{\pi}{۴}})^۲ - ۲)(\frac{۲}{\sin\frac{\pi}{۴}})(-۲\cot\frac{\pi}{۴})$$

$$= ((\frac{۲}{\frac{\sqrt{۲}}{۲}})^۲ - ۲)(\frac{۲}{\frac{\sqrt{۲}}{۲}})(-۲(۱)) = (۶)(\frac{۴}{\sqrt{۲}})(-۲) = \frac{-۴۸}{\sqrt{۲}} \times \frac{\sqrt{۲}}{\sqrt{۲}} = -۲۴\sqrt{۲}$$

که جواب حاصل -۲۴ برابر $\sqrt{۲}$ است.

۳۱ - گزینه ۲

می‌دانیم: $\boxed{\cos^۲ a - \sin^۲ a = \cos ۲a}$

$$\sin x(۱ + \sin x) = \cos^۲ x \to \sin x + \sin^۲ x = \cos^۲ x \to \sin x = \cos^۲ x - \sin^۲ x$$

$$\to \cos ۲x = \sin x \to \cos ۲x = \cos(\frac{\pi}{۲} - x)$$

$$\xrightarrow{x = ۲k\pi \pm \alpha} ۲x = ۲k\pi \pm (\frac{\pi}{۲} - x) \to \begin{cases} ۲x = ۲k\pi + \frac{\pi}{۲} - x \to x = \frac{۲k\pi}{۳} + \frac{\pi}{۶} \\ ۲x = ۲k\pi - \frac{\pi}{۲} + x \to x = ۲k\pi - \frac{\pi}{۲} \end{cases}$$

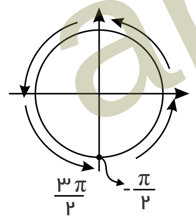
جواب‌های $x = \frac{۲k\pi}{۳} + \frac{\pi}{۶}$ جواب‌های $x = ۲k\pi - \frac{\pi}{۲}$ را نیز شامل می‌شود پس جواب کلی معادله به‌صورت $x = \frac{۲k\pi}{۳} + \frac{\pi}{۶}$ است.

۳۲ - گزینه ۱ ابتدا معادله داده شده را به کمک اتحاد جمله مشترک تجزیه می‌کنیم:

$$\sin^۲ x + (۲ - m)\sin x - ۲m = (\sin x + ۲)(\sin x - m) = ۰$$

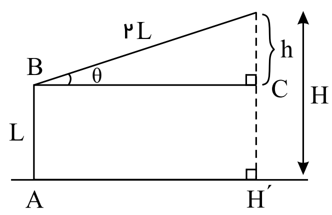
$$\Rightarrow \begin{cases} \sin x + ۲ = ۰ \Rightarrow \sin x = -۲ \to \text{جواب ندارد.} \\ \sin x - m = ۰ \Rightarrow \sin x = m \end{cases}$$

با حرکت روی دایره مثلثاتی از $\frac{-\pi}{۲}$ تا $\frac{۳\pi}{۲}$ می‌بینیم تنها در صورتی که $m = ۱$ باشد معادلهٔ $\sin x = m$ دارای یک جواب $x = \frac{\pi}{۲}$ خواهد بود.



۳۳ - گزینه ۳ ابتدا ارتفاع نوک گیرهٔ این روبات تا سطح زمین را به‌صورت تابعی از θ می‌نویسیم:

$$h = ۲L\sin\theta \Rightarrow H = L + ۲L\sin\theta$$



می‌دانیم بیش‌ترین مقدار ممکن زمانی رخ می‌دهد که $\sin\theta = ۱$ باشد که در این‌صورت: $H = ۳L$

پس طبق فرض، روبات در حالتی قرار دارد که:

$$H = \frac{۳L}{۲} \Rightarrow L + ۲L\sin\theta = \frac{۳L}{۲} \Rightarrow ۲L\sin\theta = \frac{L}{۲} \Rightarrow \sin\theta = \frac{۱}{۴}$$

abadgaranedu.ir

$$\Rightarrow \cos\theta = \sqrt{۱ - \sin^۲\theta} = \frac{\sqrt{۱۵}}{۴}$$

درنتیجه:

$$AH' = BC = ۲L\cos\theta = ۲L \times \frac{\sqrt{۱۵}}{۴} = \frac{\sqrt{۱۵}}{۲}L$$

۳۴ ـ گزینه ۱

$$\underbrace{\sin^۲ ۳x - ۲\sin ۳x}\ \underbrace{-۲\sin x + \sin x \sin ۳x} = ۰ \rightarrow \sin ۳x(\sin ۳x - ۲) + \sin x(\sin ۳x - ۲) = ۰$$

$$\rightarrow (\sin ۳x - ۲)(\sin ۳x + \sin x) = ۰$$

$$\rightarrow \begin{cases} \sin ۳x = ۲ > ۱ \quad \text{امکان ندارد.} \\ \sin ۳x = -\sin x = \sin(-x) \rightarrow \begin{cases} \xrightarrow{x = ۲k\pi + \alpha} ۳x = ۲k\pi - x \rightarrow x = \frac{k\pi}{۲} \\ \xrightarrow{x = ۲k\pi + \pi - \alpha} ۳x = ۲k\pi + \pi + x \rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{۲} \end{cases} \end{cases}$$

۳۵ ـ گزینه ۳ می‌دانیم: $\boxed{\tan a + \cot a = \frac{۲}{\sin ۲a}\ ,\ \sin u \cos u = \frac{۱}{۲}\sin ۲u}$

$$\frac{\tan\frac{x}{۲} + \cot\frac{x}{۲}}{\cos x \cos ۲x} = ۸ \rightarrow \frac{\frac{۲}{\sin x}}{\cos x \cos ۲x} = ۸ \rightarrow \frac{۲}{\underbrace{\sin x \cos x}_{\frac{۱}{۲}\sin ۲x} \cos ۲x} = ۸ \rightarrow \frac{۲}{\underbrace{\frac{۱}{۲}\sin ۲x \cos ۲x}_{\frac{۱}{۲}\sin ۴x}} = ۸$$

$$\rightarrow \frac{۲}{\frac{۱}{۴}\sin ۴x} = ۸ \rightarrow \frac{۸}{\sin ۴x} = ۸ \rightarrow \sin ۴x = ۱ \xrightarrow[x = ۲k\pi + \frac{\pi}{۲}]{\text{حالت خاص}} ۴x = ۲k\pi + \frac{\pi}{۲} \rightarrow x = \frac{k\pi}{۲} + \frac{\pi}{۸}$$

$$\rightarrow \begin{cases} k = ۰ \rightarrow x = \frac{\pi}{۸} \\ k = ۱ \rightarrow x = \frac{۵\pi}{۸} \end{cases} \rightarrow$$ معادله در بازه‌ی $[۰, \pi]$ دارای دو جواب است.

abadgaranedu.ir