

پاسخنامه تشریحی

۱ - گزینه ۳

عبارت زیر رادیکال $y = \sqrt{4+x} \rightarrow 4+x \geq 0 \rightarrow \boxed{x \geq -4}$

۲ - گزینه ۲

$$f(x) = x^2 - 1 \xrightarrow{x=0} y = -1$$

برای بررسی نقطه تقاطع با محور $x = 0$ بگذاریم:

$$g(x) = (x-1)^2 \xrightarrow{x=0} y = 1$$

پس هر دو سهمی محور y ها را قطع می کنند \Leftarrow الف نادرست است.

در هر دو سهمی a یا ضریب x^2 مثبت است. \Leftarrow هر دو سهمی \min دارند. \Leftarrow ب درست است.

اگر $x = 1$ را در هر دو سهمی بگذاریم: $g(1) = (1-1)^2 = 0$ و $f(1) = 1^2 - 1 = 0$ پس هر دو سهمی از نقطه $(1, 0)$ می گذرند. \Leftarrow پ درست است.

دامنه هر دو تابع \mathbb{R} است. ولی برد f برابر $y \geq -1$ و برد g ، $y \geq 0$ است. \Leftarrow ت نادرست است.

۳ - گزینه ۴

کافی است عبارت زیر رادیکال را بزرگتر مساوی صفر قرار دهید.

$$2 - 3x \geq 0 \Rightarrow 2 \geq 3x \Rightarrow x \leq \frac{2}{3}$$

۴ - گزینه ۱ عبارت زیر رادیکال در مخرج فقط باید بزرگتر از صفر باشد، پس داریم:

$$-3x + 7 > 0 \Rightarrow -3x > -7 \xrightarrow{\text{تقسیم طرفین بر } -3} x < \frac{7}{3}$$

جهت نامساوی عوض می شود

مجموعه ای اعداد طبیعی که در دامنه وجود دارد $\{1, 2\}$ می باشد، پس شامل دو عدد طبیعی است.

۵ - گزینه ۱ چون فرجه ها فرد هستند در بررسی دامنه ای تابع فقط ریشه های مخرج را در صورت وجود از \mathbb{R} کم می کنیم. لذا:

$$x^2 + 1 = 0 \Rightarrow x^2 = -1$$

معادله ای $x^2 = -1$ جواب حقیقی ندارد. لذا دامنه ای تابع برابر با \mathbb{R} است.

۶ - گزینه ۴ دامنه ای توابع کسری برابر است با $\mathbb{R} - \{\text{ریشه های مخرج}\}$. بنابراین:

$$x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2 \Rightarrow D_f = \mathbb{R} - \{-2\}$$

توجه کنید عبارت $3x^3 - 3$ همواره تعریف شده است و نقشی در تعیین دامنه ندارد.

۷ - گزینه ۱ برای تعیین دامنه ای تابع رادیکالی با فرجه ای زوج، کافی است عبارت زیر رادیکال را بزرگتر یا مساوی صفر قرار دهیم:

$$1 - x \geq 0 \Rightarrow x \leq 1 \quad (1)$$

هم چنین عبارت های گویا به ازای ریشه های مخرج تعریف نشده اند یعنی:

$$x^2 - 1 \neq 0 \Rightarrow x \neq \pm 1 \quad (2)$$

از دو رابطه ای ۱ و ۲ نتیجه می شود که دامنه ای تابع برابر با $\{x \mid x \in \mathbb{R}, x < 1, x \neq -1\}$ است.

۸ - گزینه ۳

برای محاسبه ای دامنه ای تابع رادیکال با فرجه ای زوج، عبارت زیر رادیکال باید نامنفی باشد. هم چنین در محاسبه دامنه ای تابع کسری، مخرج کسر باید مخالف صفر باشد. بنابراین داریم:

$$\left. \begin{array}{l} \sqrt{2-x} \Rightarrow 2-x \geq 0 \Rightarrow 2 \geq x \\ \sqrt{x+1} \Rightarrow x+1 \geq 0 \Rightarrow x \geq -1 \\ \frac{8x^2}{x-1} \Rightarrow x-1 \neq 0 \Rightarrow x \neq 1 \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{اشتراک}} \{-1 \leq x \leq 2\} - \{1\}$$

بنابراین فقط $x = 0$ در دامنه ای تعریف تابع قرار دارد.

۹ - گزینه ۴

$$\frac{2x}{x-3} = -1 \Rightarrow 2x = -x + 3 \Rightarrow 3x = 3 \Rightarrow x = 1$$

$$\frac{2x}{x-3} = 8 \Rightarrow 8x - 24 = 2x \Rightarrow 6x = 24 \Rightarrow x = 4$$

$$\frac{2x}{x-3} = 5 \Rightarrow 5x - 15 = 2x \Rightarrow 3x = 15 \Rightarrow x = 5$$

پس: دامنه ای $f = \{1, 4, 5\}$

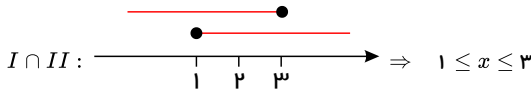
۱۰ - گزینه ۲ برای پیدا کردن دامنه ای تعریف توابع رادیکالی با فرجه ای زوج کافی است از این تابع دو رادیکال را بزرگتر مساوی صفر قرار دهیم: در این تابع دو رادیکال با فرجه ای زوج وجود دارد که

عبارت زیر هر کدام را باید بزرگتر مساوی صفر قرار دهیم.

$$2x - 2 \geq 0 \Rightarrow 2x \geq 2 \Rightarrow x \geq 1 \quad (I)$$

$$2 - \sqrt{2x - 2} \geq 0 \Rightarrow 2 \geq \sqrt{2x - 2} \xrightarrow{\text{توان ۲}} 4 \geq 2x - 2 \Rightarrow 6 \geq 2x \Rightarrow 3 \geq x \quad (II)$$

اکنون باید از جواب‌های (I) و (II) اشتراک بگیریم:



۱۱ - گزینه ۳ برای پیدا کردن دامنه‌ی تعریف توابع رادیکالی با فرجه‌ی زوج، کافی است زیر رادیکال را بزرگتر مساوی صفر قرار دهیم.

$$x - 3 \geq 0 \Rightarrow x \geq 3$$

در ضمن در توابع کسری مخرج باید مخالف صفر باشد یعنی:

$$x^2 + 2x \neq 0 \Rightarrow x(x + 2) \neq 0 \Rightarrow x \neq 0, x \neq -2$$

بنابراین دامنه‌ی تعریف توابع $x \geq 3$ است. دقت کنید که وقتی $x \geq 3$ است خودبخود x مخالف ۰ و -2 می‌باشد.

۱۲ - گزینه ۳ روش اول: برای پیدا کردن دامنه‌ی تعریف توابع رادیکالی با فرجه‌ی زوج کافی است زیر رادیکال را بزرگتر مساوی صفر قرار دهیم.

$$-3x - 4 \geq 0 \Rightarrow -3x \geq 4 \Rightarrow x \leq -\frac{4}{3}$$

$$\text{دامنه‌ی تابع} = \left\{ x \in R \mid x \leq -\frac{4}{3} \right\}$$

فقط مقدار گزینه‌ی ۳، بزرگ‌تر از $-\frac{4}{3}$ است و در دامنه‌ی تابع فوق قرار ندارد.

روش دوم: فقط $x = -1$ است که زیر رادیکال با فرجه‌ی زوج را منفی می‌کند، بنابراین در دامنه‌ی تعریف تابع قرار ندارد.

۱۳ - گزینه ۲ توجه کنید که $-\sqrt{25} = -5$ و $7^2 - 1 = 48$ و $3 \times 16 = 48$ می‌باشد، بنابراین برد این تابع دارای سه عضو -5 و 48 و 5 است.

۱۴ - گزینه ۲ چون رادیکال با فرجه‌ی زوج در مخرج کسر قرار دارد. پس عبارت زیر رادیکال باید بزرگ‌تر از صفر باشد:

$$\frac{3}{4} - \frac{x}{2} > 0 \Rightarrow \frac{x}{2} < \frac{3}{4} \xrightarrow{\times 4} 2x < 3 \Rightarrow x < \frac{3}{2}$$

۱۵ - گزینه ۱ گزینه‌ی ۱:

$$y = \sqrt{3 - x} \xrightarrow{\text{تعیین دامنه}} 3 - x \geq 0$$

$$\Rightarrow -x \geq -3 \Rightarrow x \leq 3 \Rightarrow \text{اعداد طبیعی موجود در دامنه} = \{1, 2, 3\}$$

گزینه‌ی ۲:

$$y = \frac{5}{4 - x} \xrightarrow{\text{تعیین دامنه}} \text{مخرج} \neq 0 \Rightarrow 4 - x \neq 0 \Rightarrow \text{دامنه} = R - \{4\}$$

$$\text{اعداد طبیعی موجود در دامنه} = \{1, 2, 3, 5, 6, \dots\}$$

گزینه‌ی ۳:

$$y = -x^2 + 3x - 1 \xrightarrow{\text{تعیین دامنه}} \text{دامنه} = R \Rightarrow \text{اعداد طبیعی موجود در دامنه} = N$$

گزینه‌ی ۴:

$$y = \frac{x - 1}{x^2 - 4} \xrightarrow{\text{تعیین دامنه}} \text{مخرج} \neq 0 \Rightarrow x^2 - 4 \neq 0 \Rightarrow x^2 \neq 4$$

$$\xrightarrow{\text{جزر}} x \neq \pm 2 \Rightarrow \text{دامنه} = R - \{\pm 2\} \Rightarrow \text{اعداد طبیعی موجود در دامنه} = \{1, 3, 4, \dots\}$$

لذا تعداد اعداد طبیعی در دامنه‌ی تابع $y = \sqrt{3 - x}$ از بقیه کم‌تر است.

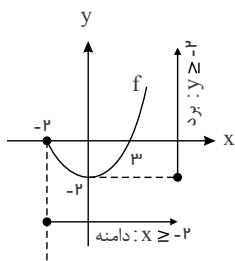
۱۶ - گزینه ۳ در توابع گزینه‌های (۱) و (۲) واضح است که دامنه برابر با $\{4, 5, 6\}$ است. در تابع گزینه (۴) خواهیم داشت:

$$y = f(x) = x + 3 \Rightarrow \begin{cases} y = 7 \Rightarrow x + 3 = 7 \Rightarrow x = 4 \\ y = 8 \Rightarrow x + 3 = 8 \Rightarrow x = 5 \\ y = 9 \Rightarrow x + 3 = 9 \Rightarrow x = 6 \end{cases}$$

پس دامنه این تابع هم $\{4, 5, 6\}$ است. در نمودار گزینه (۳) دامنه برابر است با:

$4 \leq x \leq 6$ یعنی دامنه از بی‌شمار عدد حقیقی تشکیل شده و این دامنه با $\{4, 5, 6\}$ متفاوت است.

۱۷ - گزینه ۴



می‌دانیم محدوده تغییرات x دامنه تابع است و محدوده تغییرات y برد آن. لذا با توجه به نمودار داده شده گزینه «۴» درست است.

۱۸ - گزینه ۲ به مجموعه مؤلفه‌های اول زوج‌های مرتب دامنه گفته می‌شود.

دامنه: $\{2, 3, 6, 8, 7\}$

به مجموعه مؤلفه‌های دوم زوج‌های مرتب برد گفته می‌شود.

برد: $\{b + 1, a - 4, 6, 7, 8\}$

برای اینکه دو مجموعه برابر باشد، دو حالت زیر اتفاق خواهد افتاد:

$$(الف) \begin{cases} b + 1 = 2 \Rightarrow b = 1 \\ a - 4 = 3 \Rightarrow a = 7 \end{cases}$$

$$(ب) \begin{cases} b + 1 = 3 \Rightarrow b = 2 \\ a - 4 = 2 \Rightarrow a = 6 \end{cases}$$

که در هر دو حالت $a + b$ عدد ۸ خواهد بود.

که با توجه به ضابطه داده شده $f(8)$ برابر عدد ۷ خواهد بود.

$$f(a + b) = f(8) = 7$$

۱۹ - گزینه ۴ نمودار تابع شامل تعداد محدودی نقطه است لذا با توجه به مختصات نقطه‌ها دامنه تابع تنها شامل $D_f = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3\}$ و برد آن نیز شامل اعضای $R_f = \{-1, 0, 1, 2\}$ است.

۲۰ - گزینه ۳ برای تعیین دامنه ابتدا عبارت زیر رادیکال را بزرگتر یا مساوی صفر قرار می‌دهیم. یعنی: $x - 1 \geq 0 \Rightarrow x \geq 1$ و سپس مخرج را مساوی صفر قرار می‌دهیم تا ریشه‌های مخرج را به دست آوریم و از اشتراک این دو دامنه تعیین می‌کنیم:

$$\sqrt{x-1} - 2 = 0 \Rightarrow \sqrt{x-1} = 2 \xrightarrow{\text{طرفین را به توان ۲ می‌رسانیم}} x - 1 = 4 \Rightarrow x = 5$$

پس x باید ۵ باشد، چون به ازای آن مخرج صفر می‌شود. بنابراین به طور کلی دامنه تمام اعداد بزرگتر یا مساوی ۱ و مخالف ۵ می‌شود. یعنی:

$$D = \mathbb{R} \geq 1 - \{5\}$$

۲۱ - گزینه ۳ می‌دانیم که مؤلفه‌های دوم زوج‌های مرتب یک مجموعه (y) برد می‌باشند، بنابراین داریم:

$$f(x, y) = \{(1, 2), (5, 3), (-4, 0), (1, \sqrt{4})\}$$

می‌دانیم که $\sqrt{4} = 2$ می‌باشد. پس:

$$f(x, y) = \{(1, 2), (5, 3), (-4, 0), (1, 2)\} = \{(1, 2), (5, 3), (-4, 0)\}$$

بنابراین:

$$R_f = \{2, 3, 0\}$$

۲۲ - گزینه ۲

$$y = \frac{1}{3-x} \quad 3 + x = 0 \Rightarrow x = -3 \Rightarrow D_f = \mathbb{R} - \{-3\}$$

مجموعه اعداد طبیعی یعنی $N = \{1, 2, \dots\}$ زیرمجموعه $\{-3\}$ می‌باشد.

گزینه «۱»: نادرست است زیرا:

$$y = \sqrt{x-3} \Rightarrow x - 3 \geq 0 \Rightarrow x \geq 3$$

مجموعه اعداد بزرگتر مساوی ۳، $(x \geq 3)$ اعداد ۱ و ۲ که جزء اعداد طبیعی می‌باشند را شامل نمی‌شود.

گزینه «۳»: نادرست است زیرا:

$$y = \sqrt{3-x} \Rightarrow 3 - x \geq 0 \Rightarrow -x \geq -3 \Rightarrow x \leq 3$$

مجموعه اعداد کوچکتر مساوی ۳، $(x \leq 3)$ اعداد ۱ و ۲ از مجموعه اعداد طبیعی را شامل می‌شود.

گزینه «۴»: نادرست است زیرا:

$$y = \frac{1}{3-x} \quad 3 - x = 0 \Rightarrow x = 3 \Rightarrow D_f = \mathbb{R} - \{3\}$$

مجموعه $\mathbb{R} - \{3\}$ عدد ۳ که جزء اعداد طبیعی است را شامل نمی‌شود.

۲۳ - گزینه ۱ دامنه به مجموعه مقادیری گفته می‌شود که x می‌تواند اختیار کند و حوزه مقادیر (y) مجموعه مقادیری است که y می‌تواند اختیار کند، بنابراین:

$$y \in \{0, 1\} \begin{cases} y = 0 \Rightarrow 1 - x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1 \\ y = 1 \Rightarrow 1 - x^2 = 1 \Rightarrow x^2 = 0 \Rightarrow x = 0 \end{cases} \Rightarrow D_f = \{-1, 0, 1\}$$

۲۴ - گزینه ۴

عبارت زیر رادیکال باید بزرگتر مساوی صفر باشد، بنابراین داریم:

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 8} \rightarrow x^2 + 8 \geq 0 \rightarrow x^2 \geq -8 \rightarrow x^2 \geq (-2)^2 \rightarrow x \geq -2$$

۲۵ - گزینه ۴ تابع فوق رادیکالی با فرجه زوج است. بنابراین زیر رادیکال را باید بزرگتر یا مساوی صفر قرار دهیم:

$$f(x) = \sqrt{x - 9} \rightarrow x - 9 \geq 0 \rightarrow x \geq 9$$

۲۶ - گزینه ۳ تابع فوق رادیکالی با فرجه فرد است. بنابراین رادیکال را نادیده در نظر می‌گیریم و چون عبارت زیر رادیکال کسری است،

دامنه {ریشه‌های مخرج} - $D_f = \mathbb{R} - \{ \frac{2}{3} \}$ می‌شود. بنابراین:

$$3x - 2 = 0 \rightarrow 3x = 2 \rightarrow x = \frac{2}{3} \rightarrow D = \mathbb{R} - \left\{ \frac{2}{3} \right\}$$

۲۷ - گزینه ۳ تابع فوق رادیکالی با فرجه فرد است. بنابراین رادیکال را نادیده در نظر می‌گیریم و چون عبارت زیر رادیکال خطی است دامنه \mathbb{R} است.

۲۸ - گزینه ۴ چون رادیکال با فرجه زوج در مخرج است. زیر رادیکال را فقط بزرگتر از صفر قرار می‌دهیم:

$$y = \frac{|1-x|}{\sqrt{x-|x|}} \rightarrow x - |x| > 0 \rightarrow x > |x|$$

این نامعادله هیچ جوابی ندارد. چون هیچ عددی از قدرمطلق خودش بزرگ‌تر نمی‌شود.

۲۹ - گزینه ۱ تابع فوق رادیکالی با فرجه زوج است. بنابراین زیر رادیکال که کسر $\frac{x^2+1}{x-1}$ است، را باید بزرگتر یا مساوی صفر قرار دهیم. اما صورت کسر یعنی x^2+1 همواره مثبت است

(چون x^2 همیشه مثبت و ۱ هم که مثبت است). پس برای آنکه کسر مثبت باشد، باید مخرج مثبت باشد، یعنی:

$$x - 1 > 0 \rightarrow x > 1$$

۳۰ - گزینه ۳ در تابع فوق رادیکال با فرجه زوج در مخرج قرار گرفته است. پس زیر رادیکال را فقط بزرگتر از صفر قرار می‌دهیم:

$$2x + 4 > 0 \rightarrow 2x > -4 \rightarrow x > -\frac{4}{2} \rightarrow x > -2$$

۳۱ - گزینه ۱

$$f(x) = \sqrt{1-x^2} \quad f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$1 - x^2 \geq 0 \rightarrow -x^2 \geq -1 \rightarrow x^2 \leq 1 \rightarrow -1 \leq x \leq 1 \xrightarrow{\text{چون } x \in \mathbb{N}} D_f = \{1\}$$

۳۲ - گزینه ۳

$$f(x) = 2x - 1$$

$$A = \{-1, 2, 3\} \begin{cases} f(-1) = 2(-1) - 1 = -3 \\ f(2) = 2(2) - 1 = 3 \\ f(3) = 2(3) - 1 = 5 \end{cases}$$

پس برد تابع یعنی $\mathbb{R} = \{-3, 3, 5\}$ می‌باشد.

$$B = \{a^2 + 1, \cancel{0}, -b^2\} = \{-3, 3, \cancel{0}\} \rightarrow \begin{cases} -b^2 = -3 \rightarrow \boxed{b^2 = 3} \\ a^2 + 1 = 3 \rightarrow \boxed{a^2 = 2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow a^2 + b^2 = 2 + 3 = 5$$

۳۳ - گزینه ۱

$$f(x) = 2x^2 - 1 \Rightarrow \begin{cases} f(-2) = 2(-2)^2 - 1 = 8 - 1 = 7 \\ f(-1) = 2(-1)^2 - 1 = 2 - 1 = 1 \\ f(0) = 2(0)^2 - 1 = 0 - 1 = -1 \\ f(1) = 2(1)^2 - 1 = 2 - 1 = 1 \\ f\left(\frac{1}{2}\right) = 2\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 1 = \frac{2}{4} - 1 = \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\text{برد } R = \left\{ 7, 1, -1, -\frac{1}{2} \right\}$$

با توجه به برد $f(x)$ که شامل دو عدد حسابی است گزینه «۱» صحیح است.

۳۴ - گزینه ۳

$$f(x) = \frac{x-1}{x}$$

$$\left. \begin{aligned}
 x = \frac{1}{2} &\Rightarrow f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\frac{1}{2} - 1}{\frac{1}{2}} = \frac{-\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = -1 \\
 x = 1 &\Rightarrow f(1) = \frac{1 - 1}{1} = \frac{0}{1} = 0 \\
 x = -1 &\Rightarrow f(-1) = \frac{-1 - 1}{-1} = \frac{-2}{-1} = 2 \\
 x = 2 &\Rightarrow f(2) = \frac{2 - 1}{2} = \frac{1}{2}
 \end{aligned} \right\} \Rightarrow R_f = \left\{-1, 0, \frac{1}{2}, 2\right\}$$

۳۵ - گزینه ۳ با توجه به نمودار برای به دست آوردن دامنه تابع کافی است، نقاط نمودار را روی محور x مشخص کنیم و برای به دست آوردن برد تابع کافی است، نقاط نمودار را روی محور y ها مشخص کنیم.

نکته: نقطه انتهایی نمودار توخالی است! و $x = 2$ جزء دامنه نیست و $y = -1$ جزء برد نیست.

$$D_f: [-3, 2) = \{-3 \leq x < 2\}$$

$$R_f: (-1, 3] = \{-1 < x \leq 3\}$$

۳۶ - گزینه ۲ دامنه تابع \mathbb{R} است و سه برابر مکعب هر عدد مثل x را به صورت $3x^3$ نمایش می دهیم و نصف آن عدد برابر $\frac{x}{2}$ است.

۳۷ - گزینه ۲

$$\left. \begin{aligned}
 4x - 12 \geq 0 &\rightarrow 4x \geq 12 \rightarrow x \geq 3 \\
 x - 3 \neq 0 &\rightarrow x \neq 3
 \end{aligned} \right\} \rightarrow \boxed{x > 3}$$

۳۸ - گزینه ۲

$$x = 3 \rightarrow f(3) = |3 - 7| + 2 = +4 + 2 = 6$$

$$x = 6 \rightarrow f(6) = |6 - 7| + 2 = 1 + 2 = 3$$

$$x = 1 \rightarrow f(1) = |1 - 7| + 2 = 6 + 2 = 8$$

بنابراین هر دو تابع برابر مجموعه $\{6, 3, 8\}$ است.

۳۹ - گزینه ۴

چون تابع خطی است: $f(x) = ax + b$ و چون شیب برابر ۲ است:

$$f(x) = 2x + b$$

$$2(2) + b = 6 \Rightarrow b = 2$$

از طرفی $f(2) = 6$ می باشد، بنابراین داریم:

$$f(x) = 2x + 2$$

در نتیجه $f(x)$ برابر است با:

$$0 \leq x \leq 5 \xrightarrow{\times 2} 0 \leq 2x \leq 10 \xrightarrow{+2} 2 \leq 2x + 2 \leq 12$$

با استفاده از دامنه داده شده، تابع را می سازیم:

$$\Rightarrow 2 \leq f(x) \leq 12$$