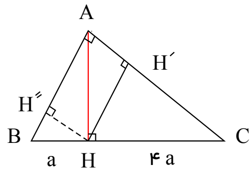
پاسخنامه تشریحی

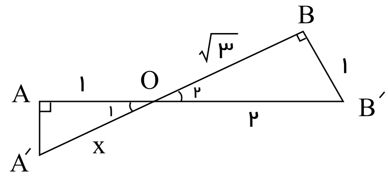
۱ - گزینه ۴ از فرض تست نتیجه می‌گیریم مساحت مثلث ABH مساوی $\frac{۱}{۴}$ مساحت مثلث AHC است، پس $CH = ۴BH$ داریم:

$AH^{۲} = a \times ۴a = ۴a^{۲} \Rightarrow AH = ۲a$



$$\overset{\triangle}{AHB} \sim \overset{\triangle}{AHC} \Rightarrow \text{نسبت تشابه} = \frac{AH}{HC} = \frac{۲a}{۴a} = \frac{۱}{۲} \Rightarrow \frac{HH''}{HH'} = \frac{۱}{۲}$$

۲ - گزینه ۲ ابتدا با رابطه‌ی فیثاغورس اندازه‌ی OB را بدست می‌آوریم.



$$OB = \sqrt{۴ - ۱} = \sqrt{۳}$$

$$\left.\begin{array}{l} \hat{O}_۱ = \hat{O}_۲ \\ \hat{A} = \hat{B} \end{array}\right\} \Rightarrow \overset{\triangle}{AOA'} \sim \overset{\triangle}{OBB'} \Rightarrow \overset{\triangle}{OBB'}$$

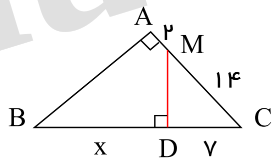
$$\Rightarrow \frac{AA'}{BB'} = \frac{A'O}{OB'} = \frac{AO}{OB} \Rightarrow \frac{x}{۲} = \frac{۱}{\sqrt{۳}} \Rightarrow x = \frac{۲\sqrt{۳}}{۳}$$

۳ - گزینه ۲

می دانیم در دو مثلث متشابه نسبت محیط ها با نسبت اضلاع برابر است در اینجا محیط مثلث دوم برابر $۱۲ = ۵ + ۴ + ۳$ است. پس محیط مثلث اول $۷/۲ = \frac{۳}{۵} \times ۱۲$ و یا $۹ = \frac{۳}{۴} \times ۱۲$ است. پس محیط بیش تر ۹ خواهد بود و حالت $۱۲ = \frac{۳}{۳} \times ۱۲$ برهم منطبق می شوند که قابل قبول نیست.

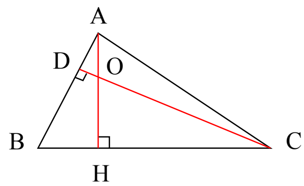
۴ - گزینه ۴

$$\left.\begin{array}{l} \hat{C} = \hat{C} \\ \hat{D} = \hat{A} \end{array}\right\} \Rightarrow \overset{\triangle}{MDC} \sim \overset{\triangle}{ABC} \Rightarrow \frac{DC}{AC} = \frac{MC}{BC} \Rightarrow \frac{۷}{۱۶} = \frac{۱۴}{۷ + x} \Rightarrow \frac{۱}{۱۶} = \frac{۲}{۷ + x} \Rightarrow ۷ + x + ۳۲ \Rightarrow x = ۲۵$$



۵ - گزینه ۴ در مثلث قائم الزاویه ی AOD و HOC دو زاویه‌ی مساوی دارند پس متشابهند.

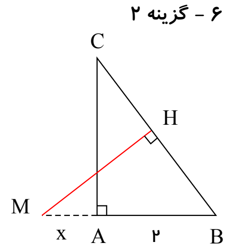
$$\Delta ADO \sim \Delta HOC \Rightarrow \frac{OH}{OD} = \frac{HC}{AD} = \frac{OC}{OD} \Rightarrow \frac{۳۶}{\frac{۱۲}{۵}} = \frac{HC}{۱۲} \Rightarrow HC = ۵ \times ۳۶ = ۱۸۰$$



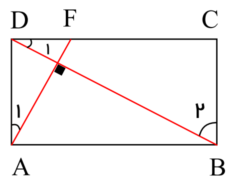
۶ - گزینه ۲

$$BC^{۲} = ۳۶ + ۴ \Rightarrow BC = ۲\sqrt{۱۰} \Rightarrow BH = CH = \sqrt{۱۰}$$

$$\left.\begin{array}{l} \angle B = \angle B \\ \angle H = \angle A = ۹۰^\circ \end{array}\right\} \Rightarrow \overset{\triangle}{BMH} \sim \overset{\triangle}{ABC} \Rightarrow \frac{BH}{AB} = \frac{BM}{BC} \Rightarrow \frac{\sqrt{۱۰}}{۲} = \frac{X + ۲}{۲\sqrt{۱۰}} \Rightarrow X = ۸$$



۷ - گزینه ۲ $\Delta ADF \sim \Delta DBC$ زیرا دو زاویه‌ی مساوی دارند.



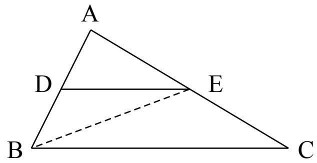
$$\left\{\begin{array}{l} \angle D = \angle C = ۹۰^\circ \\ \angle D_۱ = \angle A_۱ \end{array}\right. \Rightarrow \overset{\triangle}{ABD} \sim \overset{\triangle}{ADC}$$

$$\Rightarrow \frac{AD}{DC} = \frac{DF}{BC} = \frac{AF}{DB} \Rightarrow \frac{AD}{۳AD} = \frac{DF}{\frac{۱}{۳}AB}$$

پس $DF = \frac{۱}{۹}AB$ و $AB = ۹DF$ بنابراین $DC = ۹DF$

نکته: اگر طول مستطیل K برابر عرض مستطیل بود $DC = K^۲ DF$ است.

۸ - گزینه ۲ در دو مثلث با ارتفاع های یکسان نسبت مساحت‌ها برابر نسبت قاعده‌هاست.



$$\frac{S_{EBC}}{S_{AEB}} = \frac{EC}{AE} = \frac{BD}{AD} = \frac{۵}{۴}$$
$$\frac{S_{EBD}}{S_{AEB}} = \frac{BD}{AB} = \frac{۵}{۹}$$

دو رابطه‌ی فوق را بر هم تقسیم می کنیم:

$$\frac{\frac{S_{EBC}}{S_{AEB}}}{\frac{S_{EBD}}{S_{AEB}}} = \frac{\frac{۵}{۴}}{\frac{۵}{۹}} \Rightarrow \frac{S_{EBC}}{S_{EBD}} = \frac{۹}{۴} = ۲/۲۵$$

۹ - گزینه ۳

دو مثلث ADE , DEC دارای ارتفاع یکسان از رأس D می باشند اگر ارتفاع رسم شده از D برابر h باشد داریم:

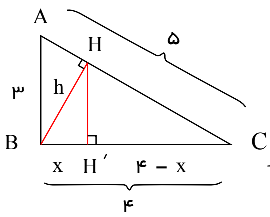
$$\left.\begin{array}{l} S_{DEC} = \dfrac{EC \cdot h}{۲} \\ S_{ADE} = \dfrac{AE \cdot h}{۲} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{S_{DEC}}{S_{ADE}} = \frac{EC}{AE} = \frac{۶۰}{۱۰۰} = \frac{۳}{۵} \Rightarrow \frac{AC}{AE} = \frac{۸}{۵} \quad (I)$$

چون $BC \| DE$ پس دو مثلث ABC و ADE متشابهند و نسبت تشابه آنها $\frac{۵}{۸}$ است.

$$\frac{S_{ABC}}{S_{ADE}} = (\frac{AC}{AE})^۲ = \frac{۶۴}{۲۵} \xrightarrow{\text{تفضیل از صورت}} \frac{S_{BDEC}}{S_{ADE}} = \frac{۳۹}{۲۵} = ۱/۵۶$$

۱۰ - گزینه ۴

وتر AC در مثلث قائم الزاویه‌ی ABC به کمک رابطه ی فیثاغورس بدست می آید.



$$AC = \sqrt{۳^۲ + ۴^۲} = ۵$$

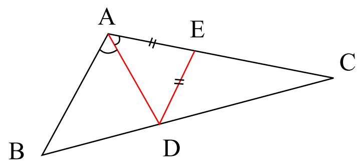
از طرفی داریم:

$$BH \times AC = AB \times BC \Rightarrow ۵h = ۳ \times ۴ \Rightarrow h = \frac{۱۲}{۵}$$

$$B\overset{\triangle}{H}C : BH^۲ = BH' \times BC \Rightarrow (\frac{۱۲}{۵})^۲ = ۴x \Rightarrow x = \frac{۳۶}{۲۵} = ۱/۴۴$$

۱۱ - گزینه ۲ بنابر قضیه ی خطوط موازی و مورب نتیجه می گیریم $\hat{D}_۱ = \hat{A}_۱$ چون AD نیمساز است پس $\hat{D}_۲ = \hat{A}_۲$ بنابراین $DE = AE$ داریم:

$$۵AB = ۳AC = ۶۰ \Rightarrow \begin{cases} AC = ۲۰ \\ AB = ۱۲ \end{cases}$$



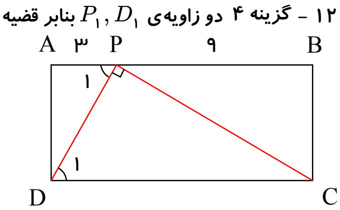
$$DE \| AB \xrightarrow{\text{قضیه‌ی تالس}} \frac{DE}{AB} = \frac{EC}{AC}$$

$$\frac{DE}{۱۲} = \frac{EC}{۲۰} \overset{DE=AE}{\Rightarrow} \frac{AE}{۱۲} = \frac{EC}{۲۰}$$

$$\Rightarrow \frac{AE}{EC} = \frac{۱۲}{۲۰} \xrightarrow{\text{ترکیب در صورت}} \frac{AC}{EC} = \frac{۳۲}{۲۰} \Rightarrow \frac{۲۰}{EC} = \frac{۳۲}{۲۰} \Rightarrow EC = ۱۲/۵$$

۱۲ - گزینه ۴ دو زاویه‌ی $P_۱, D_۱$ بنابر قضیه‌ی خطوط موازی و مورب مساویند پس دو مثلث قائم الزاویه‌ی ADP , PDC متشابهند.

$$A\overset{\triangle}{P}D \sim D\overset{\triangle}{P}C \Rightarrow \frac{DP}{DC} = \frac{AP}{DP} \Rightarrow DP^۲ = AP \cdot DC = ۱۲ \times ۳ = ۳۶ \Rightarrow PD = ۶$$

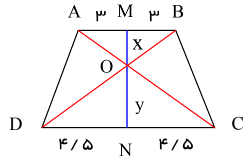


۱۳ - گزینه ۱ اگر c واسطه ی هندسی a و b باشد داریم:

$$c = \sqrt{ab} = \sqrt{\sqrt{۳} \times \frac{\sqrt{۳}}{۴}} = \sqrt{\frac{۳}{۴}} = \frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

۱۴ ـ گزینه ۳

خطی که وسط‌های دو قاعده را به هم وصل می‌کند از نقطه‌ی تلاقی دو قطر می‌گذرد.

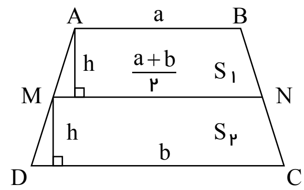


$$\overset{\triangle}{OMB} \sim \overset{\triangle}{OND} \Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{۳}{۴/۵} \xrightarrow[\text{مخرج}]{\text{ترکیب در}} \frac{x}{\underbrace{x+y}_{۱۲}} = \frac{۳}{۷/۵} \rightarrow x = ۴/۸$$

۱۵ ـ گزینه ۳

$$BC' \parallel BC \Rightarrow \frac{AB'}{BB'} = \frac{AC'}{CC'} \Rightarrow \frac{۳}{۷} = \frac{AC'}{CC'} \Rightarrow AC' = \frac{۳}{۷}CC'$$

۱۶ ـ گزینه ۲



$$\frac{S_۱}{S_۲} = \frac{\frac{(\frac{a+b}{۲}+a)}{۲} \times h}{\frac{(\frac{a+b}{۲}+b)}{۲} \times h} = \frac{۳}{۵} \Rightarrow \frac{۳a+b}{۳b+a} = \frac{۳}{۵} \Rightarrow ۱۵a + ۵b = ۹b + ۳a \Rightarrow ۱۲a = ۴b \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{۱}{۳}$$

۱۷ ـ گزینه ۴ هر دو مستطیل دلخواه در حالت کلی متشابه نیستند چون ممکن است اضلاع نظیر متناسب نداشته باشند.

۱۸ ـ گزینه ۱ در مثلث متساوی الساقین میانه، ارتفاع و نیمساز وارد بر قاعده بر هم منطبق‌اند و یقیناً هم طولند.

۱۹ ـ گزینه ۱

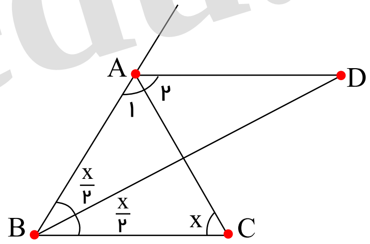
$\widehat{B} = \widehat{C}$ را x فرض می‌کنیم:

$$\widehat{A}_۱ = ۱۸۰^\circ - ۲x \ , \ \widehat{A}_۲ = x$$

در مثلث ABD داریم:

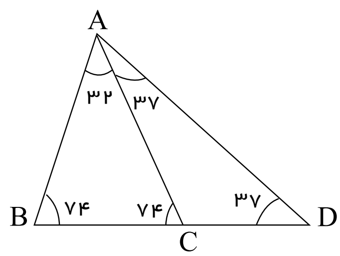
$$\frac{\widehat{B}}{۲} + \widehat{A}_۱ + \widehat{A}_۲ + \widehat{D} = ۱۸۰^\circ \Rightarrow \frac{x}{۲} + (۱۸۰ - ۲x) + x + \widehat{D} = ۱۸۰ \Rightarrow \widehat{D} = \frac{x}{۲}$$

$$\frac{\widehat{B}}{۲} = \widehat{D} \Rightarrow AB = AD = AC$$

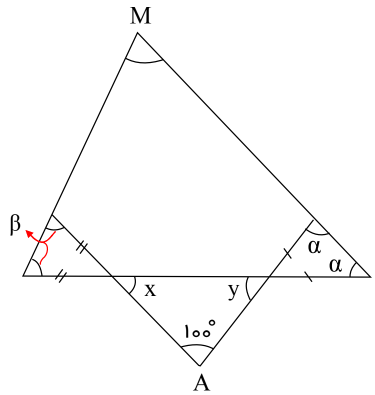


۲۰ ـ گزینه ۳

$$\left.\begin{array}{l} A\widehat{C}B = \dfrac{۱۸۰^\circ - ۳۲^\circ}{۲} = ۷۴^\circ \\ A\widehat{C}D \text{ زاویه خارجی مثلث } A\widehat{C}B \end{array}\right\} A\widehat{D}C = \frac{A\widehat{C}B}{۲} \Rightarrow ADC = \frac{۷۴^\circ}{۲} = ۳۷^\circ$$

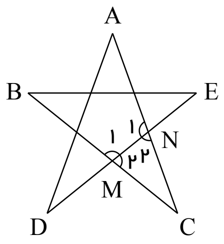


۲۱ ـ گزینه ۴ در دو مثلث متساوی الساقین فرض کنیم زوایای مجاور به قاعده در آنها β, α باشد با توجه به شکل $x + ۲\beta = ۱۸۰ \ , \ y + ۲\alpha = ۱۸۰$ داریم:



$$\begin{array}{l} x + y = ۸۰^\circ \Rightarrow ۲\alpha + ۲\beta + (x+y) = ۲ \times ۱۸۰^\circ \\ \Rightarrow ۲(\alpha + \beta) = ۳۶۰^\circ - ۸۰^\circ = ۲۸۰^\circ \\ \Rightarrow \alpha + \beta = ۱۴۰^\circ \Rightarrow M = ۴۰^\circ \end{array}$$

۲۲ - گزینه ۱



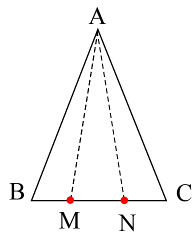
$\widehat{M}_۲$ زاویه‌ی خارجی مثلث $M\overset{\Delta}{E}B$ است: $\widehat{M}_۲ = \widehat{E} + \widehat{B}$

$\widehat{N}_۲$ زاویه‌ی خارجی مثلث $A\widehat{D}N$ است: $\widehat{N}_۲ = \widehat{A} + \widehat{D}$

و در مثلث $M\overset{\Delta}{N}C$ داریم:

$$\hat{C} + \hat{M} + \hat{N} = ۱۸۰^\circ \Rightarrow \hat{C} + \hat{A} + \hat{D} + \hat{E} + \hat{B} = ۱۸۰^\circ$$

۲۳ - گزینه ۳



$$\begin{cases} AB = AC \\ BM = NC \\ \widehat{B} = \widehat{C} \end{cases} \xrightarrow{\text{ض ز ض}} A\overset{\Delta}{B}M \cong A\overset{\Delta}{N}C \xrightarrow{\text{تساوی اجزای متناظر}} AM = AN$$

۲۴ - گزینه ۳

$$\frac{S_۱}{S_۲} = \frac{۴۹}{۱۲۸} \Rightarrow \frac{a_۱}{a_۲} = \sqrt{\frac{۴۹}{۱۲۸}} = \frac{۷}{۸\sqrt{۲}} \Rightarrow \frac{۲۱}{a_۲} = \frac{۷}{۸\sqrt{۲}} \Rightarrow a_۲ = ۲۴\sqrt{۲}$$

۲۵ - گزینه ۱

در دو مثلث متشابه اضلاع متناسبند.

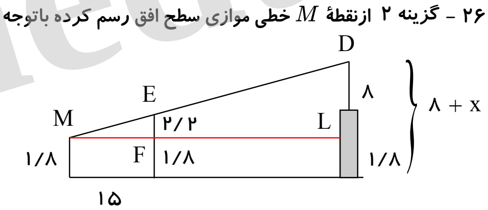
$$\frac{۹}{x-۲} = \frac{۱۲}{x} \Rightarrow ۹x = ۱۲x - ۲۴ \Rightarrow x = ۸$$

$$\text{نسبت تشابه} = k = \frac{۶}{۹} = \frac{۲}{۳} \Rightarrow \text{نسبت مساحت} = k^۲ = (\frac{۲}{۳})^۲ = \frac{۴}{۹}$$

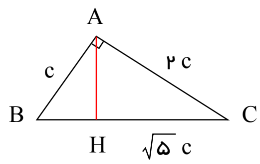
۲۶ - گزینه ۲ ازنقطهٔ M خطی موازی سطح افق رسم کرده باتوجه به شکل و قضیه‌ی تالس داریم:

$$EF \parallel DL \Rightarrow \frac{EF}{DL} = \frac{MF}{ML} \Rightarrow \frac{۲/۲}{۸ + x - ۱/۸} = \frac{۱۵}{۱۸۰} = \frac{۱}{۱۲} \Rightarrow x = ۲۰/۲$$

$x =$ طول برج

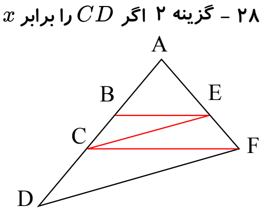


۲۷ - گزینه ۳ بنابر قضیه‌ی فیثاغورس نتیجه می‌شود $BC = \sqrt{۵}c$ داریم:



$$\Delta ABH \sim \Delta ABC \Rightarrow \frac{S_{ABC}}{S_{ABH}} = (\frac{BC}{AB})^۲ = (\frac{\sqrt{۵}c}{c})^۲ = ۵$$

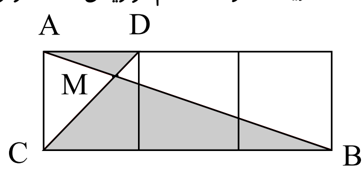
۲۸ - گزینه ۲ اگر CD را برابر x در نظر بگیریم داریم:



$$\begin{cases} BE \| CF \Rightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{AE}{AF} \\ CE \| DF \Rightarrow \frac{AE}{AF} = \frac{AC}{AD} \end{cases} \Rightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{AC}{AD} \Rightarrow AC^۲ = AB \times AD \Rightarrow ۸^۲ = ۵AD \Rightarrow AD = \frac{۶۴}{۵}$$

$$CD = AD - AC = \frac{۶۴}{۵} - ۸ = \frac{۲۴}{۵} = ۴/۸$$

۲۹ - گزینه ۲ در مثلث قائم الزاویه ی ABC وتر AB برابر $\sqrt{۱۰} = \sqrt{۱+۹}$ است.



$$\left.\begin{array}{l} AD \| BC \underset{\text{مورب}}{\xrightarrow{AB}} \hat{A} = \hat{B} \\ AD \| BC \underset{\text{مورب}}{\xrightarrow{DC}} \hat{D} = \hat{C} \end{array}\right\} \xrightarrow{(\text{زز})} A\overset{\Delta}{D}M \sim B\overset{\Delta}{C}M \Rightarrow$$

$$\frac{AM}{MB} = \frac{AD}{BC} \Rightarrow \frac{AM}{\sqrt{۱۰} - AM} = \frac{۱}{۳} \Rightarrow ۳AM = \sqrt{۱۰} - AM$$

$$۴AM = \sqrt{۱۰} \Rightarrow AM = \frac{۱}{۴}\sqrt{۱۰}$$

هندسه

۳۰ - گزینه ۲ با توجه به تعریف تشابه که دو چند ضلعی را متشابه گوییم وقتی زوایای نظیر مساوی داشته باشند و اضلاع نظیر به نظیر متناسب داشته باشند پس گزینه‌ی ۲ درست است.