پاسخنامه تشریحی

۱ - گزینه ۱

$$(A\cup(A\cap B))'\cap((B\cap A)\cup\underbrace{(B-A)}_{B\cap A'})=(A'\cap(A\cap B)')\cap(B\cap\underbrace{(A\cup A')}_{M}$$

$$=(A'\cap(A'\cup B'))\cap\underbrace{(B\cap M)}_{B}=A'\cap(A'\cup B')\cap B$$

$$=A'\cap((A'\cup B')\cap B)=A'\cap((A'\cap B)\cup\underbrace{(B'\cap B)}_{\varnothing})$$

$$=A'\cap(A'\cap B)=\underbrace{(A'\cap A')}_{A'}\cap B=A'\cap B=A'-B'$$

۲ - گزینه ۴ به کمک روابط $S_n=\frac{n}{2}(2a_1+(n-1)d)$ و $a_n=a_1+(n-1)d$ می‌توان نوشت:

$$\begin{cases}a_1+a_2+\cdots+a_5=60\\ a_4+a_5=3(\underbrace{a_1+a_2+a_3}_{a_1+a_1+d+a_1+2d})\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\frac{5}{2}(2a_1+4d)=60\\ a_1+3d+a_1+4d=3(3a_1+3d)\end{cases}$$

$$\begin{cases}5a_1+10d=60\\ 2a_1+7d-9a_1-9d=0\end{cases}\xrightarrow[\times 5]{}\begin{cases}5a_1+10d=60\\ -7a_1-2d=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}5a_1+10d=60\\ -35a_1-10d=0\end{cases}$$

$$-30a_1=60\Rightarrow 5a_1=\frac{60}{-30}=-2$$

$$-7a_1-2d=0\xrightarrow{a_1=-2}-7(-2)-2d=0\Rightarrow 14=2d\Rightarrow d=\frac{14}{2}=7$$

۳ - گزینه ۴ این مسأله نشان‌دهنده‌ی یک دنباله‌ی حسابی با جمله‌ی $a_1=750$ و قدر نسبت $d=25$ و جمله‌ی آخر $a_n=2000$ است:

$$750, 775, \ldots, 2000$$

$$a_n=a_1+(n-1)d\rightarrow 2000=750+(n-1)(25)\rightarrow 2000=750+25n-25$$

$$\rightarrow 25n=2000-750+25\rightarrow 25n=1275\rightarrow n=\frac{1275}{25}=51$$

۴ - گزینه ۲

$$S_n=\frac{n}{2}(2a_1+(n-1)d)\xrightarrow{S_5=105}105=\frac{5}{2}(2a_1+4d)\Rightarrow 105=5a_1+10d\xrightarrow{\text{تقسیم بر ۵}}\boxed{a_1+2d=21}$$

$$a_3+a_4+a_5=6(a_1+a_2)\Rightarrow a_1+2d+a_1+3d+a_1+4d=6(a_1+a_1+d)$$

$$\Rightarrow 3a_1+9d=12a_1+6d\Rightarrow 12a_1+6d-3a_1-9d=0\Rightarrow\boxed{9a_1-3d=0}$$

$$-9\ \begin{cases}a_1+2d=21\\ 9a_1-3d=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-9a_1-18d=-189\\ 9a_1-3d=0\end{cases}$$

$$-21d=-189\Rightarrow d=\frac{189}{21}=9\Rightarrow a_1+2(9)=21\Rightarrow a_1=21-18=3$$

$$\Rightarrow a_5=a_1+4d\Rightarrow a_5=3+4(9)=39$$

۵ - گزینه ۱

$$(A-B)'\cap(A\cup B)\cap A'=(A\cap B')'\cap(A\cup B)\cap A'$$

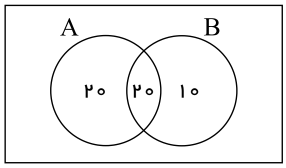
$$=(A'\cup B)\cap(A\cup B)\cap A'=\underbrace{(B\cup\varnothing)}_{B}\cap A'=B\cap A'=B-A$$

۶ - گزینه ۱ مجموعه‌ی اعداد طبیعی، زیرمجموعه‌ای از اعداد صحیح و مجموعه‌ی اعداد صحیح زیرمجموعه‌ای از اعداد حقیقی است.

۷ - گزینه ۲

می‌دانیم:
$$\boxed{\begin{array}{c}n(A')=n(U)-n(A)\\ A\cap B'=A-B\end{array}}$$

با توجه به نمودار ون داریم:



n(U)= ۶۵

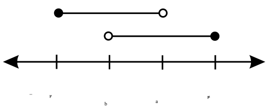
$n(A') = n(U) - n(A) \Rightarrow 25 = 65 - n(A) \Rightarrow n(A) = 40$

$n(A \cap B') = n(B - A) = 10$

$n(A \cup B) = 20 + 20 + 10 = 50$

۸ - گزینه ۴ برای آنکه اشتراک بازه‌های $[-2, a)$ و $(b, 4]$ برابر با $\left(-\frac{2}{3}, 1\right)$ باشد، باید روی محور چنین وضعیتی داشته باشند:

بنابراین اشتراک آنها (b, a) است:



$$(b, a) = \left(-\frac{2}{3}, 1\right) \Rightarrow \begin{cases} b = -\frac{2}{3} \\ a = 1 \end{cases}$$

$$(-2a - 1, b) = (-2 \times 1 - 1, -\frac{2}{3}) = (-3, -\frac{2}{3})$$

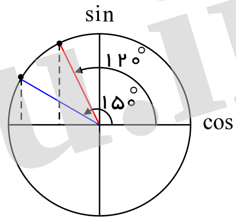
$$(b - a) = (-\frac{2}{3}, 1)$$

پس:

$$(-2a - 1, b) \cup (b, a) = (-3, -\frac{2}{3}) \cup (-\frac{2}{3}, 1)$$

$$= (-3, 1) - \{-\frac{2}{3}\}$$

۹ - گزینه ۳



$$120^\circ \le \alpha \le 150^\circ$$

$$\cos 150 \le \cos \alpha \le \cos 120$$

$$\frac{-\sqrt{3}}{2} \le \cos \alpha \le \frac{-1}{2}$$

$$\frac{-\sqrt{3}}{2} \le 2m - 1 \le \frac{-1}{2}$$

$$\xrightarrow{+1} \frac{2 - \sqrt{3}}{2} \le 2m \le \frac{1}{2} \xrightarrow{\div 2} \frac{2 - \sqrt{3}}{4} \le m \le \frac{1}{4}$$

۱۰ - گزینه ۲

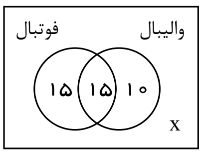
$$-2 \le \sqrt[4]{x} \le 3 \Rightarrow 0 \le \sqrt[4]{x} \le 3 \xrightarrow{\text{به توان ۴}} 0 \le x \le 3^4 \Rightarrow 0 \le x \le 81$$

تعداد اعداد صحیح در این بازه: $81 - 0 + 1 = 82$

۱۱ - گزینه ۱

می‌دانیم: $\boxed{n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)}$

با رسم نمودار ون داریم:



n(U)= ۶۰

$$x = 60 - (15 + 15 + 10) = 20$$

۱۲ - گزینه ۲ می دانیم: $\boxed{\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b} \quad (a, b > 0 \to n \text{ زوج})}$

$$\frac{\sqrt{2} + \sqrt{8} + \sqrt{18}}{\sqrt{50} - \sqrt{8}} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{2 \times 4} + \sqrt{2 \times 9}}{\sqrt{2 \times 25} - \sqrt{2 \times 4}} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{4}\sqrt{2} + \sqrt{9}\sqrt{2}}{\sqrt{25}\sqrt{2} - \sqrt{4}\sqrt{2}}$$

$$= \frac{\sqrt{2} + 2\sqrt{2} + 3\sqrt{2}}{5\sqrt{2} - 2\sqrt{2}} = \frac{6\sqrt{2}}{3\sqrt{2}} = 2$$

۱۳ - گزینه ۴ می‌دانیم: $\boxed{\text{اگر مجموعه‌ی } X \text{ زیرمجموعه } Y \text{ باشد، آنگاه اشتراک آن‌ها } X \text{ خواهد بود.}}$

طبق فرض: $B \subseteq A \Rightarrow A \cap B = B$

و از آنجا که B متناهی است، $A \cap B$ متناهی خواهد بود.

۱۴ - گزینه ۴ می‌دانیم: $\boxed{\text{در هر مثلث قائم‌الزاویه : } \tan\alpha = \frac{\text{طول ضلع مقابل}}{\text{طول ضلع مجاور}} \;,\; \cot\alpha = \frac{\text{طول ضلع مجاور}}{\text{طول ضلع مقابل}}}$

با استفاده از قضیهٔ فیثاغورس در مثلث OAB داریم:

$$OA^۲ + AB^۲ = OB^۲ \Rightarrow ۴^۲ + ۳^۲ = OB^۲ \Rightarrow OB = ۵$$

به‌همین طریق در مثلث قائم‌الزاویهٔ OBC نیز داریم:

$$OB^۲ + BC^۲ = OC^۲ \Rightarrow BC^۲ = OC^۲ - OB^۲ \Rightarrow BC^۲ = ۳۴ - ۲۵ \Rightarrow BC = ۳$$

در نتیجه:

$$\tan\alpha = \frac{AB}{OA} = \frac{۳}{۴}, \cot\beta = \frac{OB}{BC} = \frac{۵}{۳} \Rightarrow \tan\alpha + \cot\beta = \frac{۳}{۴} + \frac{۵}{۳} = \frac{۲۹}{۱۲}$$

۱۵ - گزینه ۱

می دانیم: $\boxed{\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}}$

$$(\frac{۱}{\cos x} - \tan x)(\frac{۱-(۱-\sin x)}{۱-\sin x}) = (\frac{۱}{\cos x} - \frac{\sin x}{\cos x})(\frac{\sin x}{۱-\sin x})$$
$$= (\frac{۱-\sin x}{\cos x})(\frac{\sin x}{۱-\sin x}) = \frac{\sin x}{\cos x} = \tan x$$

۱۶ - گزینه ۱

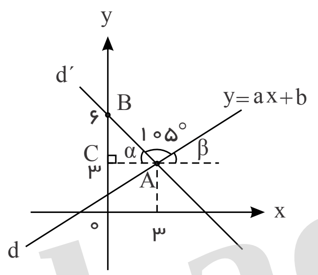
می‌دانیم: $\boxed{\text{اعداد بین صفر و یک هرچه به توان بزرگتری برسند، کوچکتر می‌شوند و هرچه ریشهٔ بزرگ‌تری از آنها بگیریم، بزرگتر می‌شوند.}}$

$$۰ < a < ۱ \Rightarrow ۰ < \cdots < a^۳ < a^۲ < a < \sqrt{a} < \sqrt[۳]{a} < \cdots < ۱$$

۱۷ - گزینه ۳

می‌دانیم: $\boxed{\text{شیب خطی که با جهت مثبت محور } x\text{ها زاویهٔ } \alpha \text{ بسازد برابر است با } m = \tan\alpha \text{ ؛ معادلهٔ خط با شیب } m \text{ و عرض از مبدأ } b \text{ برابر است با } y = mx + b}$

مطابق شکل زیر، در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC داریم:



$$\tan\alpha = \frac{BC}{AC} = \frac{۳}{۳} = ۱ \xrightarrow[\alpha]{\text{حاده است}} \alpha = ۴۵^\circ$$

زاویه‌ای که خط d با جهت مثبت محور xها می‌سازد را به‌دست می‌آوریم:

$$\alpha + ۱۰۵^\circ + \beta = ۱۸۰^\circ \xrightarrow{\alpha = ۴۵^\circ} \beta = ۳۰^\circ$$

۱۸ - گزینه ۱

می دانیم: $\boxed{(a-b)^۳ = a^۳ - ۳a^۲b + ۳ab^۲ - b^۳}$

$$x^۳ - ۳\sqrt{۳}x^۲ + ۹x - ۳\sqrt{۳} = (x - \sqrt{۳})^۳ \xrightarrow{x = ۲+\sqrt{۳}} (۲ + \sqrt{۳} - \sqrt{۳})^۳ = ۲^۳ = ۸$$

۱۹ - گزینه ۱ می‌دانیم: $\boxed{\sin\alpha > ۰ \Rightarrow ۰^\circ < \alpha < ۱۸۰^\circ}$

$$\sin ۲\alpha > ۰^\circ \Rightarrow ۰^\circ < ۲\alpha < ۱۸۰^\circ \Rightarrow ۰^\circ < \alpha < ۹۰^\circ \quad (I)$$
$$\sin\alpha\tan\alpha > ۰ \Rightarrow \sin\alpha \cdot \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} > ۰ \Rightarrow \frac{\sin^۲\alpha}{\cos\alpha} > ۰ \Rightarrow \cos\alpha > ۰ \Rightarrow \begin{cases} \alpha \text{ ربع اول} \\ \alpha \text{ ربع چهارم} \end{cases} \quad (II)$$
$$(I) \cap (II) : ۰^\circ < \alpha < ۹۰^\circ \;\; \alpha \text{ ربع اول}$$

۲۰ - گزینه ۴

اگر a,b,c جملات متوالی یک دنباله‌ی هندسی باشند $b^۲ = ac$ است پس:

$$x^۲ = \underbrace{(۲-\sqrt{۳})(۲+\sqrt{۳})}_{\text{مزدوج}} \Rightarrow x^۲ = ۴ - ۳ = ۱ \Rightarrow x = \pm ۱ \xrightarrow{x>۰} x = ۱$$

بنابراین $q = \frac{۲+\sqrt{۳}}{۱} = ۲ + \sqrt{۳}$ است.

$y =$ جمله‌ی سوم $\times$ قدر نسبت

ریاضی

$\Rightarrow y = (۲ + \sqrt{۳})(۲ + \sqrt{۳}) = ۴ + ۲\sqrt{۳} + ۲\sqrt{۳} + ۳ \Rightarrow y = ۷ + ۴\sqrt{۳}$