

پاسخنامه تشریحی

۱ - گزینه ۴

$$a = 4^{1-x}, b = 2^{x+1} \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{4^{1-x}}{2^{x+1}} = \frac{2^{2-2x}}{2^{x+1}} = \frac{1}{2} = 2^{-2}$$

$$\Rightarrow 2^{2-2x-(x+1)} = 2^{-2} \Rightarrow 2^{-2x-x-1} = 2^{-2}$$

$$\Rightarrow 3x = -3 \Rightarrow x = -1$$

$$a = 4^0 = 1, b = 2^0 = 1$$

$$a + b + x = 1 + 1 + (-1) = 1$$

حال با جایگذاری مقدار x در $a = 4^{1-x}$ و $b = 2^{x+1}$ داریم:

۲ - گزینه ۳ ابتدا طرفین هر سه تساوی را در هم ضرب می‌کنیم:

$$\begin{cases} a^x bc = -75 \\ ab^x c = 15 \\ abc^x = -45 \end{cases} \Rightarrow (a^x bc)(ab^x c)(abc^x) = -75 \times 15 \times (-45)$$

$$\Rightarrow a^x b^x c^x = 75 \times 15 \times 45$$

$$\Rightarrow a^x b^x c^x = 3^3 \times 5^2 \times 3 \times 5 \times 3^2 \times 5$$

$$\Rightarrow a^x b^x c^x = 3^6 \times 5^4 = 15^6$$

$$\Rightarrow abc = 15$$

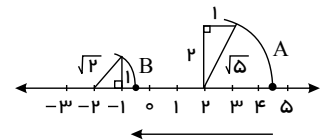
۳ - گزینه ۲ برای به دست آوردن عدد متناظر برای بردار \vec{AB} کافی است محل قرار گرفتن نقاط A و B را به دست آوریم.

$$B \text{ نقطه: } 1^2 + 1^2 = x^2 \Rightarrow x^2 = 2 \Rightarrow x = \sqrt{2}$$

$$B \text{ نقطه: } -2 + \sqrt{2}$$

$$A \text{ نقطه: } 2^2 + 1^2 = y^2 \Rightarrow y^2 = 5 \Rightarrow y = \sqrt{5}$$

$$A \text{ نقطه: } 2 + \sqrt{5}$$



حال برای به دست آوردن عدد متناظر با بردار \vec{AB} داریم:

$$(A) \text{ نقطه ابتدا} - (B) \text{ نقطه انتها} = 2 + \sqrt{5} - (-2 + \sqrt{2})$$

$$= -2 + \sqrt{2} - 2 - \sqrt{5} = -4 + \sqrt{2} - \sqrt{5} = -4 - \sqrt{5} + \sqrt{2}$$

۴ - گزینه ۳

$$x^{2-\sqrt{3}} = 2$$

$$\frac{\text{دو طرف تساوی}}{2+\sqrt{3}} \rightarrow (x^{2-\sqrt{3}})^{2+\sqrt{3}} = 2^{2+\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow x^{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})} = x^{2^2-(\sqrt{3})^2} = x^{4-3} = x^1 = 2^{2+\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow x = 2^2 \times 2^{\sqrt{3}} = 4 \times 2^{\sqrt{3}}$$

۵ - گزینه ۴ چون توان زیررادیکال و فرجه زوج هستند. پس:

$$\sqrt[4]{(x-1)^4} = |x-1| \begin{cases} x-1 & x \geq 1 \\ -x+1 & x < 1 \end{cases}$$

- ۶

$$(\sqrt{3} + \sqrt{12} + \sqrt{75}) \div \sqrt{3} = (\sqrt{3} + 2\sqrt{3} + 5\sqrt{3}) \div \sqrt{3} = 8$$

۷ - بیست و دو عدد اول را لیست کرده‌ایم:

۱۲, ۵, ۲۵, ۲۹, ۸۵, ۸۹, ۱۴۵, ۴۲, ۲۰, ۴, ۱۶, ۳۷, ۵۸, ۸۹, ۱۴۵, ۴۲, ۲۰, ۴, ۱۶, ۳۷, ۵۸, ۸۹

یعنی اعداد ۸۹, ۱۴۵, ۴۲, ۲۰, ۴, ۱۶, ۳۷, ۵۸ و ۱۴۵ از عدد پنجم به بعد مرتباً تکرار می‌شود. یعنی اعداد ۶ام و ۱۴ام و ۲۲ام و ۳۰ام و ۳۸ام و... و ۱۹۹۸ام همگی ۸۹ هستند بنابراین عدد ۲۰۰۵ برابر با ۸۹ است.

- ۸

$$\text{الف) } (3)^{-2} = \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}$$

$$\text{ب) } 5^{-3} = \frac{1}{5^3} = \frac{1}{125}$$

$$\text{ج) } \left(\frac{y}{2}\right)^{-4} = \left(\frac{2}{y}\right)^4 = \frac{16}{y^4}$$

$$\text{د) } \left(-\frac{4}{5}\right)^{-3} = \left(-\frac{5}{4}\right)^3 = -\frac{125}{64}$$

۹ - این بار در مقایسه اعداد باید از روش‌های خلاقانه استفاده کنیم:

$$15^{26} \square 32^{24}$$

$$(15^2)^{13} (2^5)^{24}$$

$$225^{13} 2^{120}$$

$$225^{13} (2^8)^{15}$$

$$225^{13} < 2^{120}$$

هم توان و هم پایه ۲۵۶^{۱۵} بزرگتر است.

$$6^{22} \square 15^7$$

$$3^{22} \times 2^{22} \quad 3^7 \times 5^7$$

$$3^{22} \times 2 \times 2^{21} \quad 3^7 \times 5^7$$

$$3^{22} \times 2 \times (2^3)^7 \quad 3^7 \times 5^7$$

$$3^{22} \times 2 \times 8^7 > 3^7 \times 5^7$$

توان برابر اما پایه ۸^۷ بزرگتر است.

پایه‌ها برابر اما توان ۳^{۲۲} بزرگتر

۱۰ - با توجه به فرض شروع به حل می‌کنیم.

$$[(3^{2x} - 3)^x]^{3^x} \stackrel{3^x=6}{=} [(6 - 3)^x - 3^x]^{3^x} \stackrel{3^x=6}{=} [(3^x - 3)^x]^{3^x}$$

$$\stackrel{3^x=6}{=} [(6 - 3)^x]^{3^x} \stackrel{3^x=6}{=} [3^x]^{3^x} = 6^{3^x}$$

۱۱ - هر سه عبارت را به توان دو می‌رسانیم.

$$4 < \sqrt{x} < 7 \rightarrow 16 < x < 49$$

حالا تعداد را بدست می‌آوریم:

$$x \text{ تعداد عدد طبیعی} = \frac{48 - 17}{1} + 1 = 31 + 1 = 32$$

- ۱۲

$$\frac{3^{-2} \times 2^{-10}}{3^4 \times 3^3 \times 2^{-8}} = 3^{-9} \times 2^{-2}$$