حسابان ۲

۱۰۱- گزینهٔ «۳» (عادل حسینی)

اگر چندجمله‌ای $p(x)$ بر $x-۲$ بخش‌پذیر باشد، باید داشته باشیم:

$$p(۲)=۰$$

$$\Rightarrow p(۲)=۴+۲k-۳=۲k+۱=۰\Rightarrow k=-\frac{۱}{۲}$$

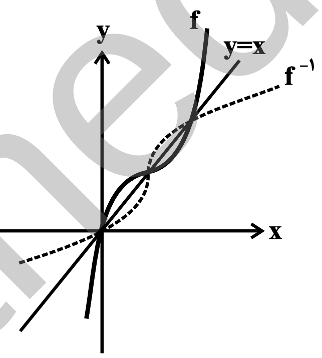
(حسابان ۲- تابع: صفحه‌های ۱۹ و ۲۰)

۱۰۲- گزینهٔ «۳» (افشین خاصه‌خان)

ضابطهٔ f را به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$f(x)=۳x-۳x^۲+x^۳=(x-۱)^۳+۱$$

مطابق شکل نمودار تابع f و وارون آن در سه نقطه متقاطع هستند.



(حسابان ۲- تابع: صفحه‌های ۱۳ و ۱۴)

۱۰۳- گزینهٔ «۳» (سعید علم‌پور)

در توابع $y=a\sin bx+c$، کم‌ترین مقدار تابع برابر $c-|a|$ و دورهٔ تناوب برابر $\frac{۲\pi}{|b|}$ است. پس داریم:

$$\begin{cases} y_{min}=۳-|-۱|=۲ \\ T=\dfrac{۲\pi}{|-\frac{۲\pi}{۳}|}=\dfrac{۲\pi}{\frac{۲\pi}{۳}}=۳\Rightarrow \dfrac{y_{min}}{T}=\dfrac{۲}{۳} \end{cases}$$

(حسابان ۲- مثلثات: صفحه‌های ۲۴ تا ۲۹)

۱۰۴- گزینهٔ «۴» (میلاد سجادی‌لاریجانی)

ابتدا ضابطهٔ تابع را به‌صورت زیر ساده می‌کنیم:

$$y=a+\sin(b\pi x+\frac{\pi}{۲})=a+\cos b\pi x$$

عرض از مبدأ تابع برابر $\frac{۳}{۲}$ است، داریم:

$$x=۰\Rightarrow a+\cos ۰=a+۱=\frac{۳}{۲}\Rightarrow a=\frac{۱}{۲}$$

از طرفی دورهٔ تناوب نمودار تابع برابر ۲ است.

$$\Rightarrow T=\frac{۲\pi}{|b|\pi}=۲\Rightarrow |b|=۱\Rightarrow b=\pm ۱$$

نمودار تابع کسینوس نسبت به محور y ها متقارن است، بنابراین هر دو مقدار b قابل قبول است. بیشترین مقدار $a+b$ به ازای $b=۱$ به‌دست خواهد آمد. $(a+b)_{max}=\frac{۱}{۲}+۱=\frac{۳}{۲}$

(حسابان ۲- مثلثات: صفحه‌های ۲۴ تا ۲۹)

۱۰۵- گزینهٔ «۲» (میلاد موسوی چاشمی)

از آنجایی که $\lim_{x\to ۳}(x-۴)=-۱$ است و حدود چپ و راست هر دو برابر $-\infty$ شده است، باید مخرج دارای ریشه مضاعف $x=۳$ باشد، درنتیجه داریم:

$$۲x^۲+ax+b=۲(x-۳)^۲\Rightarrow a=-۱۲\ ,\ b=۱۸\Rightarrow a+b=۶$$

(حسابان ۲- حدهای نامتناهی ـ حد در بی‌نهایت: صفحه‌های ۴۶ تا ۵۵)

۱۰۶- گزینهٔ «۱» (سعید علم‌پور)

ضابطهٔ تابع اول $y=x^۲+x=(x+\frac{۱}{۲})^۲-\frac{۱}{۴}$ و ضابطهٔ تابع دوم $y=x^۲+۲x=(x+۱)^۲-۱$ است. بنابراین برای تبدیل نمودار اولی به دومی، نیاز است که نمودار اولی را $\frac{۱}{۲}$ واحد به چپ و $\frac{۳}{۴}$ واحد به پایین منتقل کنیم.

(حسابان ۲- تابع: صفحه‌های ۱ تا ۱۲)

۱۰۷- گزینهٔ «۳» (حمیدرضا نوش‌کاران)

$$\begin{cases} \text{مجانب افقی}: \lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{ax^۳+۳x^۲}{۴x^۳+۱}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{ax^۳}{۴x^۳}=\dfrac{a}{۴}\Rightarrow y=\dfrac{a}{۴} \\ f(۱)=\dfrac{a+۳}{۵} \end{cases}$$

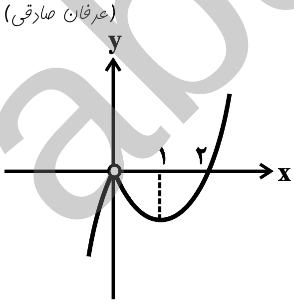
$$\xrightarrow{\text{تقاطع مورد نظر}}\frac{a}{۴}=\frac{a+۳}{۵}\Rightarrow a=۱۲$$

(حسابان ۲- حدهای نامتناهی ـ حد در بی‌نهایت: صفحه‌های ۵۹ تا ۶۹)

۱۰۸- گزینهٔ «۲» (عرفان صادقی)

$$f(x)=\begin{cases} -x(x-۲) & ;\ x<۰ \\ x(x-۲) & ;\ x\geq ۰ \end{cases}$$

نمودار تابع f مطابق شکل روبه‌رو است. می‌بینیم که تابع روی بازهٔ $[۰,۱]$ اکیداً نزولی است.



(حسابان ۲- تابع: صفحه‌های ۱۵ تا ۱۸)

۱۰۹- **گزینهٔ «۳»** *(مهدی ملارمضانی)*

دورهٔ تناوب تابع تانژانت برابر π است، پس داریم:

$$\tan(x-\frac{۳\pi}{۴})=\tan(x-\frac{۳\pi}{۴}+\pi)=\tan(x+\frac{\pi}{۴})$$

پس معادله به‌صورت زیر است:

$$\tan ۳x=-\tan ۲x=\tan(-۲x)\Rightarrow ۳x=k\pi-۲x\Rightarrow x=\frac{k\pi}{۵}$$

به ازای $k=۳$ جواب $x=\frac{۳\pi}{۵}$ به دست می‌آید.

(حسابان ۲- مثلثات: صفحه‌های ۳۵ تا ۴۴)

۱۱۰- **گزینهٔ «۴»** *(حمیدرضا نوش‌کاران)*

$$\sin\theta+\cos\theta=\sqrt{۲}\sin(\theta+\frac{\pi}{۴})$$

$$\Rightarrow \sin ۲x+\cos ۲x=\sqrt{۲}\sin(۲x+\frac{\pi}{۴})=\sqrt{۲}$$

$$\Rightarrow \sin(۲x+\frac{\pi}{۴})=۱\Rightarrow ۲x+\frac{\pi}{۴}=۲k\pi+\frac{\pi}{۲}\Rightarrow x=k\pi+\frac{\pi}{۸}$$

(حسابان ۲- مثلثات: صفحه‌های ۳۵ تا ۴۴)

۱۱۱- **گزینهٔ «۲»** *(علی شهرابی)*

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{a(x-۱)^۳+۶x(x^۲+x)}{(۲x-۱)^۲}$$

$$=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{ax^۳-۳ax^۲+۳ax-a+۶x^۳+۶x^۲}{۴x^۲-۴x+۱}$$

$$=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{(a+۶)x^۳+(-۳a+۶)x^۲+۳ax-a}{۴x^۲-۴x+۱}=b$$

برای اینکه حاصل حد مقدار حقیقی b باشد، لازم است عبارت‌های صورت و مخرج هم درجه باشند، پس باید ضریب $x^۳$، صفر باشد:

$$a+۶=۰\Rightarrow a=-۶$$

با جای‌گذاری $a=-۶$، داریم:

$$b=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{۲۴x^۲-۱۸x+۶}{۴x^۲-۴x+۱}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{۲۴x^۲}{۴x^۲}=\frac{۲۴}{۴}=۶$$

(حسابان ۲- حدهای نامتناهی ـ حد در بی‌نهایت: صفحه‌های ۵۹ تا ۶۶)

۱۱۲- **گزینهٔ «۱»** *(امیر وفائی)*

دامنهٔ تابع f به‌صورت $[-b,+\infty)$ می‌باشد که با توجه به نمودار، دامنهٔ آن $[-۱,+\infty)$ است. پس:

$$-b=-۱\Rightarrow b=۱$$

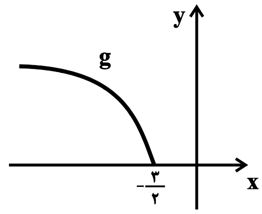
مقدار تابع در $x=-۱$ برابر -۳ است، داریم:

$$f(-۱)=c=-۳\Rightarrow f(x)=a\sqrt{x+۱}-۳$$

عرض از مبدأ نیز برابر -۵ است.

$$\Rightarrow f(۰)=a-۳=-۵\Rightarrow a=-۲$$

حال نمودار تابع $g(x)=\sqrt{abx+c}=\sqrt{-۲x-۳}$ به‌صورت زیر خواهدبود. دقت کنید که دامنهٔ آن $[-\infty,-\frac{۳}{۲}]$ است.



هم‌چنین می‌توان گفت نمودار g از انتقال ۳ واحد نمودار تابع $y=\sqrt{x}$ به سمت راست و سپس $-\frac{۱}{۲}$ برابر کردن طول نقاط آن به‌دست می‌آید.

(حسابان ۲- تابع: صفحه‌های ۱ تا ۱۲)

۱۱۳- **گزینهٔ «۴»** *(حمید علیزاده)*

$$\cot(۲۰^\circ+x)=\frac{\sqrt{۳}}{۶}\Rightarrow \tan(۲۰^\circ+x)=\frac{۶}{\sqrt{۳}}=۲\sqrt{۳}$$

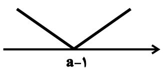
$$\Rightarrow \tan(۴۰^\circ-x)=\tan(۶۰^\circ-۲۰^\circ-x)=\tan(۶۰^\circ-(۲۰^\circ+x))$$

$$=\frac{\tan۶۰^\circ-\tan(۲۰^\circ+x)}{۱+\tan۶۰^\circ\tan(۲۰^\circ+x)}=\frac{\sqrt{۳}-۲\sqrt{۳}}{۱+(\sqrt{۳})(۲\sqrt{۳})}=-\frac{\sqrt{۳}}{۷}$$

(حسابان ۲- مثلثات: صفحهٔ ۴۲)

۱۱۴- **گزینهٔ «۱»** *(سعید علم‌پور)*

تابع $y=|x-a+۱|=|x-(a-۱)|$ نموداری به فرم



دارد.

و برای آنکه در بازهٔ $[-\frac{۳}{۴},۱]$ اکیداً صعودی باشد، باید $a-۱\le-\frac{۳}{۴}$ باشد.

پس داریم:

$$a-۱\le-\frac{۳}{۴}\Rightarrow a\le\frac{۱}{۴}$$

(حسابان ۲- تابع: صفحه‌های ۱۵ تا ۱۸)

۱۱۵- **گزینهٔ «۴»** *(سعید علم‌پور)*

$$D_f=\{x\in\mathbb{R}\,|\,\frac{\pi}{x}\ne k\pi+\frac{\pi}{۲}\}$$

$$\Rightarrow \frac{۱}{x}\ne k+\frac{۱}{۲}\Rightarrow x\ne\frac{۱}{k+\frac{۱}{۲}}$$

حال با فرض اینکه مقادیر x در بازهٔ $(-\frac{۲}{۳},-\frac{۱}{۷})$ باشند، داریم:

$$-\frac{۲}{۳}<\frac{۱}{k+\frac{۱}{۲}}<-\frac{۱}{۷}\Rightarrow -۷<k+\frac{۱}{۲}<-\frac{۳}{۲}\Rightarrow -\frac{۱۵}{۲}<k<-۲$$

$$\xrightarrow{k\in\mathbb{Z}}-۷\le k\le-۳$$

بنابراین ۵ نقطه از نقاط بازهٔ $(-\frac{۲}{۳},-\frac{۱}{۷})$ عضو دامنهٔ f نیستند.

(حسابان ۲- مثلثات: صفحه‌های ۲۹ تا ۳۵)

۱۱۶- گزینهٔ «۲» *(علی سلامت)*

وقتی $x \to +\infty$، حد تابع $g(x)=\frac{2x+1}{x+3}$ برابر ۲ است.

$$g(x)=\frac{2(x+3)-5}{x+3}=2-\frac{5}{x+3}$$

وقتی $x \to +\infty$، تابع $y=\frac{5}{x+3}$ با مقادیر مثبت به صفر میل می‌کند، بنابراین تابع با مقادیر کم‌تر از ۲، به ۲ نزدیک می‌شود.

$$\lim_{x\to+\infty} f\left(\frac{2x+1}{x+3}\right)=\lim_{x\to 2^-} f(x)=+\infty$$

(حسابان ۲- حدهای نامتناهی - حد در بی‌نهایت؛صفحه‌های ۴۹ تا ۵۵)

۱۱۷- گزینهٔ «۳» *(علی شهرابی)*

ضابطهٔ f را ساده‌تر می‌نویسیم:

$$f(x)=\frac{4x^2+4x+1+4x^2-12x+9}{2x^2+6x+k}=\frac{8x^2-8x+10}{2x^2+6x+k}$$

معادلهٔ مجانب افقی این تابع را به‌دست می‌آوریم:

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{8x^2}{2x^2}=4 \Rightarrow \text{مجانب افقی}: y=4$$

فرض کنید مجانب‌های قائم f، $x=a$ و $x=b$ باشند. مختصات نقاط A و B به‌صورت $A(a,4)$ و $B(b,4)$ در می‌آید.

مساحت مثلث OAB برابر است با $\frac{|a-b|\times 4}{2}$ که باید با عدد $2\sqrt{15}$ برابر باشد:

$$2|a-b|=2\sqrt{15}\Rightarrow |a-b|=\sqrt{15}$$

در عبارت درجه دوم Ax^2+Bx+C، قدرمطلق تفاضل ریشه‌ها، از رابطه $\frac{\sqrt{\Delta}}{|A|}$ به‌دست می‌آید، پس داریم:

$$\frac{\sqrt{\Delta}}{2}=\sqrt{15}\Rightarrow\sqrt{\Delta}=2\sqrt{15}\Rightarrow\Delta=36-8k=60\Rightarrow k=-3$$

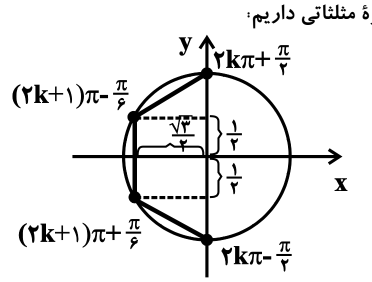
(حسابان ۲- حدهای نامتناهی - حد در بی‌نهایت؛ صفحه‌های ۵۵ تا ۵۷ و ۶۷ و ۶۸)

۱۱۸- گزینهٔ «۲» *(جهانبخش نیکنام)*

$$\cos 2x+\sqrt{3}\cos x+1=2\cos^2 x-1+\sqrt{3}\cos x+1$$
$$=2\cos^2 x+\sqrt{3}\cos x=\cos x(2\cos x+\sqrt{3})=0$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\cos x=0\Rightarrow x=k\pi+\frac{\pi}{2}\\ \cos x=-\frac{\sqrt{3}}{2}=\cos(\pi\pm\frac{\pi}{6})\Rightarrow x=(2k+1)\pi\pm\frac{\pi}{6}\end{cases}$$

حال روی دایرهٔ مثلثاتی داریم:



چندضلعی موردنظر، یک ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین است.

(حسابان ۲- مثلثات؛ صفحه‌های ۳۵ تا ۴۴)

۱۱۹- گزینهٔ «۳» *(کاظم اجلالی)*

فرض کنید $p(x)=(fof)(x)$ باشد. چون باقی‌ماندهٔ تقسیم $p(x)$ بر $x-1$ برابر ۲۱ است، $p(1)=21$ خواهد بود و در نتیجه داریم:

$$\begin{cases}(fof)(1)=21\Rightarrow f(f(1))=21\\ f(1)=2+a-1-1=a\end{cases}$$

$$\Rightarrow f(a)=2a^3+a^3-a-1=21$$
$$\Rightarrow 3a^3-a-22=3a^3-24-a+2$$
$$=3(a^3-8)-(a-2)=3(a-2)(a^2+2a+4)-(a-2)$$
$$=(a-2)(3a^2+6a+12-1)=(a-2)(3a^2+6a+11)=0$$

در معادلهٔ $3a^2+6a+11=0$ مقدار Δ منفی است و این معادله جواب ندارد، در نتیجه $a-2=0$ و در نتیجه $a=2$ است.

توجه کنید که لازم نیست معادلهٔ $3a^3-a-22=0$ را حل کنید، بلکه کافی است مقادیر a را از گزینه‌ها در معادله قرار دهید و ببینید کدام‌یک در معادله صدق می‌کند.

(حسابان ۲- تابع؛ صفحه‌های ۱۹ و ۲۰)

۱۲۰- گزینهٔ «۲» *(عادل حسینی)*

از تغییر متغیر $t=\sqrt{\sin x}$ استفاده می‌کنیم:

$$t=\sqrt{\sin x}\Rightarrow t^2=\sin x\Rightarrow t^4=\sin^2 x$$
$$\Rightarrow 1-t^4=1-\sin^2 x=\cos^2 x$$

پس ضابطهٔ f برحسب t به‌صورت زیر است:

$$y=t-(1-t^4)=t^4+t-1$$

برد تابع بالا با دامنهٔ $[0,1]$ همان برد f است؛ زیرا $0\le\sqrt{\sin x}\le 1$ است.

از طرفی این تابع روی بازهٔ $[0,1]$ اکیداً صعودی است؛ زیرا $y_1=t^4$ و $y_2=t$ هر دو روی بازهٔ $[0,1]$ اکیداً صعودی هستند، بنابراین تابع $y=t^4+t-1$ نیز روی این بازه اکیداً صعودی است. در نتیجه مقادیر تابع در ابتدا و انتهای بازه، برد تابع را مشخص می‌کنند:

$$y=t^4+t-1\Rightarrow\begin{cases}t=0: y=-1\\ t=1: y=1\end{cases}\Rightarrow R_f=[-1,1]$$

این بازه شامل ۳ عدد صحیح است.

(حسابان ۲- تابع؛ صفحه‌های ۱۵ تا ۱۸)

هندسه ۳

۱۲۱- گزینهٔ «۲» (سیدمحمدرضا حسینی‌فرد)

ابتدا ماتریس A را به‌دست می‌آوریم و درایه‌های غیرواقع بر قطر اصلی را برابر با صفر قرار می‌دهیم:

$$A=\begin{bmatrix} b & b+1\\ 2a & b\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-b & -2\\ 4 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-b^2+4b+4 & -b+1\\ -2ab+4b & -4a+b\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases}-b+1=0\Rightarrow b=1\\ -2ab+4b=0\end{cases}\Rightarrow -2a+4=0\Rightarrow a=2$$

پس ماتریس A به صورت $A=\begin{bmatrix}7&0\\0&-7\end{bmatrix}$ به‌دست می‌آید. داریم:

$$A^n=\begin{bmatrix}7^n&0\\0&(-7)^n\end{bmatrix}$$

بنابراین توان‌های زوج در ماتریس A اسکالر هستند.

(هندسه ۳- ماتریس و کاربردها: صفحه‌های ۱۲ و ۱۷ تا ۲۱)

۱۲۲- گزینهٔ «۱» (احمدرضا فلاح)

$$A^2=A\times A=\begin{bmatrix}1&1\\-1&0\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}1&1\\-1&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1\\-1&-1\end{bmatrix}$$

$$A^3=A^2\times A=\begin{bmatrix}0&1\\-1&-1\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}1&1\\-1&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1&0\\0&-1\end{bmatrix}=-I$$

$$\Rightarrow A^{12}=(A^3)^4=(-I)^4=I$$

$$B^2=B\times B=\begin{bmatrix}1&0\\1&-1\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}1&0\\1&-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}=I$$

$$\Rightarrow B^{10}=(B^2)^5=I^5=I$$

$$(A^{12}\times B^{10})^{-1}=(I\times I)^{-1}=(I^2)^{-1}=I^{-1}=I$$

(هندسه ۳- ماتریس و کاربردها: صفحه‌های ۱۷ تا ۲۳)

۱۲۳- گزینهٔ «۴» (امیر وفائی)

$$A=\begin{bmatrix}3|A|&2\\5&|A|\end{bmatrix}\Rightarrow |A|=3|A|^2-10$$

$$\Rightarrow 3|A|^2-|A|-10=0\Rightarrow(3|A|+5)(|A|-2)=0$$

$$\Rightarrow\begin{cases}|A|=-\frac{5}{3}\\ |A|=2\end{cases}$$

$$|A|=-\frac{5}{3}\Rightarrow A=\begin{bmatrix}-5&2\\5&-\frac{5}{3}\end{bmatrix}\Rightarrow A^{-1}=-\frac{3}{5}\begin{bmatrix}-\frac{5}{3}&-2\\-5&-5\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1&\frac{6}{5}\\3&3\end{bmatrix}$$

$$|A|=2\Rightarrow A=\begin{bmatrix}6&2\\5&2\end{bmatrix}\Rightarrow A^{-1}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}2&-2\\-5&6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&-1\\-\frac{5}{2}&3\end{bmatrix}$$

(هندسه ۳- ماتریس و کاربردها: صفحه‌های ۲۲ ، ۲۳ و ۳۰)

۱۲۴- گزینهٔ «۴» (افشین خاصه‌خان)

درایه های سطر اول ماتریس در ۱، درایه‌های سطر دوم ماتریس در ۲ و درایه‌های سطر سوم ماتریس در ۳ ضرب می‌شوند و به‌طور مشابه درایه‌های ستون‌های اول، دوم و وسوم ماتریس به ترتیب در ۱، ۲ و ۳ ضرب می‌شوند، بنابراین داریم: $|B|=(1\times2\times3)\times(1\times2\times3)|A|=3!\times3!|A|$

(هندسه ۳- ماتریس و کاربردها: صفحهٔ ۳۱)

۱۲۵- گزینهٔ «۳» (سیدمحمدرضا حسینی‌فرد)

ماتریس $2A-I$ را به توان ۲ می‌رسانیم.

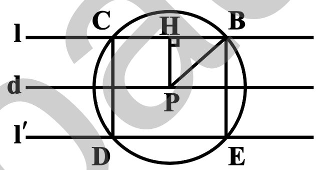
$$(2A-I)^2=4A^2-4A+I=4(A^2-A)+I=4I+I=5I$$

$$\Rightarrow|2A-I|^2=|5I|\Rightarrow|2A-I|^2=25\Rightarrow|2A-I|=\pm5$$

(هندسه ۳- ماتریس و کاربردها: صفحه‌های ۲۷ تا ۳۱)

۱۲۶- گزینهٔ «۱» (افشین خاصه‌خان)

مجموعه نقاطی که از نقطهٔ P به فاصلهٔ ۱ باشند، یک دایره به مرکز P و شعاع ۱ و نقاطی که از خط d به فاصلهٔ $\frac{1}{2}$ باشند، دو خط موازی l و l' به فاصلهٔ $\frac{1}{2}$ از آن می‌باشند. نقاط برخورد دو خط و دایره جواب مسئله است. این نقاط یک مستطیل تشکیل می‌دهند و داریم:



$$\overset{\Delta}{PHB}: BH^2=PB^2-PH^2=1^2-(\tfrac{1}{2})^2=\frac{3}{4}\Rightarrow BH=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow BC=\sqrt{3}$$

$$CD=2PH=2\times\frac{1}{2}=1$$

$$S_{BCDE}=BC\times CD=\sqrt{3}$$

(هندسه ۳- آشنایی با مقاطع مخروطی: صفحه‌های ۳۶ تا ۳۹)

۱۲۷- **گزینهٔ «۱»** *(جواد حاتمی)*

می‌دانیم شعاع دایره در نقطهٔ تماس بر خط مماس بر دایره عمود است. بنابراین مرکز دایره روی خطی که در مبدأ مختصات بر خط $y = x$ (نیمساز ربع اول و سوم) عمود می‌شود، قرار دارد. از طرفی نیمساز ربع دوم و چهارم (خط $y = -x$) در مبدأ مختصات بر نیمساز ربع اول و سوم عمود است، بنابراین مرکز دایره روی خط $y = -x$ قرار دارد. داریم:

$$x^2 + y^2 - kx + 2y = 0 \Rightarrow \text{مرکز}: O(\frac{k}{2}, -1)$$

$$y = -x \Rightarrow -1 = -\frac{k}{2} \Rightarrow k = 2$$

$$R = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2 - 4c} = \frac{1}{2}\sqrt{(-2)^2 + 2^2} = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{2} = \sqrt{2}$$

(هندسه ۳- آشنایی با مقاطع مخروطی: صفحه‌های ۴۰ تا ۴۳)

۱۲۸- **گزینهٔ «۳»** *(علی ایمانی)*

$$C_1 : x^2 + y^2 - 4x - a = 0 \Rightarrow \begin{cases} \text{مرکز}: O_1(2,0) \\ \text{شعاع}: R_1 = \sqrt{4+a} \end{cases}$$

$$C_2 : (x+1)^2 + y^2 = 9 \Rightarrow \begin{cases} \text{مرکز}: O_2(-1,0) \\ \text{شعاع}: R_2 = 3 \end{cases}$$

$$d = O_1O_2 = \sqrt{(-1-2)^2 + (0-0)^2} = 3$$

شرط مماس داخل بودن دو دایره : $d = |R_1 - R_2| \Rightarrow |\sqrt{4+a} - 3| = 3$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sqrt{4+a} - 3 = 3 \Rightarrow \sqrt{4+a} = 6 \Rightarrow 4 + a = 36 \Rightarrow a = 32 \\ \sqrt{4+a} - 3 = -3 \Rightarrow \sqrt{4+a} = 0 \Rightarrow R_1 = 0 \text{ غ‌ق‌ق} \end{cases}$$

(هندسه ۳- آشنایی با مقاطع مخروطی: صفحهٔ ۴۴)

۱۲۹- **گزینهٔ «۴»** *(سرژ یقیازاریان‌تبریزی)*

چون دو دایره در نقاط C و D یکدیگر را قطع می‌کنند، پس پاره‌خط CD وتر مشترک دو دایره است. داریم:

$$\left.\begin{matrix} x^2 + y^2 - 12x = 0 \\ x^2 + y^2 + 16y - 36 = 0 \end{matrix}\right\} \xrightarrow{\text{تفاضل}} -12x - 16y + 36 = 0$$

بنابراین معادلهٔ وتر مشترک دو دایره را می‌توان به‌صورت $3x + 4y - 9 = 0$ نوشت. حال کافی است فاصلهٔ نقطهٔ A را از این خط به‌دست آوریم. اگر این فاصله را با d نمایش دهیم، داریم:

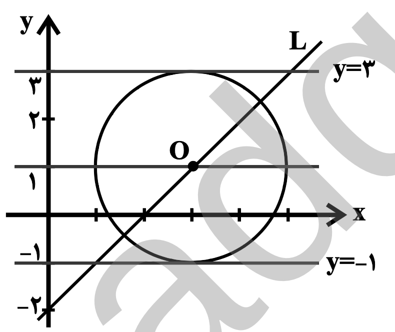
$$d = \frac{|3(1) + 4(-1) - 9|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{10}{5} = 2$$

(هندسه ۳- آشنایی با مقاطع مخروطی: صفحه‌های ۴۰ تا ۴۶)

۱۳۰- **گزینهٔ «۲»** *(سرژ یقیازاریان‌تبریزی)*

در شکل دو خط $y = 3$ و $y = -1$ بر دایره مماس هستند، پس مرکز دایره روی خط $y = \frac{3 + (-1)}{2} = 1$ قرار دارد. فرض کنید مرکز دایره $O(\alpha, 1)$ است، مرکز O روی خط $y = x - 2$ قرار دارد. داریم:

$$L : y = x - 2 \xrightarrow{O(\alpha,1) \in L} \alpha - 2 = 1 \Rightarrow \alpha = 3 \Rightarrow O(3,1)$$



فاصلهٔ دو خط موازی $y + 1 = 0$ و $y - 3 = 0$ برابر قطر دایره است. فاصلهٔ این دو خط موازی برابر ۴ می‌باشد، پس $2R = 4$، در نتیجه $R = 2$ است.

معادلهٔ دایره : $(x-3)^2 + (y-1)^2 = 4$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 - 6x - 2y + 6 = 0$$

(هندسه ۳- آشنایی با مقاطع مخروطی: صفحه‌های ۴۰ تا ۴۳)

هندسه ۳ (آشنا)

۱۳۱- گزینهٔ «۱» *(کتاب آبی هندسه ۳ – سوال ۴۹)*

اتحادهای جبری تنها زمانی برای دو ماتریس A و B برقرار هستند که ماتریس‌های A و B تعویض‌پذیر باشند. داریم:

$$A\times B=B\times A\Rightarrow\begin{bmatrix}۱&x\\۲&۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱&y\\۳&۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱&y\\۳&۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱&x\\۲&۱\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow\begin{bmatrix}۱+۳x&y+x\\۵&۲y+۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱+۲y&x+y\\۵&۳x+۱\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow ۳x=۲y\Rightarrow\frac{x}{y}=\frac{۲}{۳}$$

(هندسه ۳- ماتریس و کاربردها: صفحه‌های ۱۷ تا ۲۱)

۱۳۲- گزینهٔ «۳» *(کتاب آبی هندسه ۳ – سوال ۹۵)*

$$A=\begin{bmatrix}۲&-۱\\۳&-۴\end{bmatrix}\Rightarrow A^{-۱}=\frac{۱}{۲(-۴)-(-۱)\times۳}\begin{bmatrix}-۴&۱\\-۳&۲\end{bmatrix}=-\frac{۱}{۵}\begin{bmatrix}-۴&۱\\-۳&۲\end{bmatrix}$$

$$\alpha A+\beta I=A^{-۱}\Rightarrow\begin{bmatrix}۲\alpha&-\alpha\\۳\alpha&-۴\alpha\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\beta&۰\\۰&\beta\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{۴}{۵}&-\frac{۱}{۵}\\\frac{۳}{۵}&-\frac{۲}{۵}\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow\begin{bmatrix}۲\alpha+\beta&-\alpha\\۳\alpha&-۴\alpha+\beta\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{۴}{۵}&-\frac{۱}{۵}\\\frac{۳}{۵}&-\frac{۲}{۵}\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}-\alpha=-\frac{۱}{۵}\Rightarrow\alpha=\frac{۱}{۵}\\۲\alpha+\beta=\frac{۴}{۵}\Rightarrow\frac{۲}{۵}+\beta=\frac{۴}{۵}\Rightarrow\beta=\frac{۲}{۵}\end{cases}$$

(هندسه ۳- ماتریس و کاربردها: صفحه‌های ۱۳ تا ۲۳)

۱۳۳- گزینهٔ «۳» *(کتاب آبی هندسه ۳ – سوال ۱۱۹)*

برای آنکه دستگاه بی‌شمار جواب داشته باشد، باید دو خط $ax-۳y=۱$ و $۲۰x+by=۵$ بر هم منطبق باشند:

$$\frac{a}{۲۰}=\frac{-۳}{b}=\frac{۱}{۵}\Rightarrow\begin{cases}a=۴\\b=-۱۵\end{cases}$$

حال بین گزینه‌ها، دستگاه معادلاتی را انتخاب می‌کنیم که دترمینان ماتریس ضرایب آن مخالف صفر باشد تا جواب منحصربه‌فرد داشته باشد.

$$۱)\begin{vmatrix}۱۵&-۴\\b&a\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}۱۵&-۴\\-۱۵&۴\end{vmatrix}=۰$$

$$۲)\begin{vmatrix}a&-۱۵\\۴&b\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}۴&-۱۵\\۴&-۱۵\end{vmatrix}=۰$$

$$۳)\begin{vmatrix}a&۱۵\\b&a\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}۴&۱۵\\-۱۵&۴\end{vmatrix}\neq۰$$

$$۴)\begin{vmatrix}a&b\\۳a&۳b\end{vmatrix}=۰$$

(هندسه ۳- ماتریس و کاربردها: صفحه‌های ۲۳ تا ۲۶)

۱۳۴- گزینهٔ «۳» *(کتاب آبی هندسه ۳ – سوال ۱۴۲)*

$$\left|\frac{|A|}{۲}A\right|+\left|\frac{۲}{|A|}A\right|=\frac{|A|^۲}{۴}|A|+\frac{۴}{|A|^۲}|A|$$

$$\frac{|A|^۳}{۴}+\frac{۴}{|A|}=\frac{۶۴}{۴}+\frac{۴}{۴}=۱۶+۱=۱۷$$

(هندسه ۳- ماتریس و کاربردها: صفحهٔ ۳۱)

۱۳۵- گزینهٔ «۲» *(کتاب آبی هندسه ۳ – سوال ۱۵۰)*

$$|A|=\left|A^{-۱}\right|\Rightarrow|A|=\frac{۱}{|A|}\Rightarrow|A|^۲=۱\Rightarrow|A|=\pm۱$$

دترمینان A را بر حسب سطر سوم می‌نویسیم:

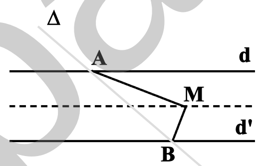
$$|A|=\begin{vmatrix}-۱&m&۱\\۲&۰&-۱\\۱&۱&۰\end{vmatrix}=(-۱)^{۳+۱}\begin{vmatrix}m&۱\\۰&-۱\end{vmatrix}+(-۱)^{۳+۲}\begin{vmatrix}-۱&۱\\۲&-۱\end{vmatrix}$$

$$=-m-(۱-۲)=۱-m$$

در نتیجه داریم: $۱-m=\pm۱\Rightarrow m=۰$ یا $m=۲$

(هندسه ۳- ماتریس و کاربردها: صفحه‌های ۲۷ تا ۳۱)

۱۳۶- گزینهٔ «۲» *(کتاب آبی هندسه ۳ – سوال ۲۰۶)*



نقطهٔ M محل برخورد نیمسازهای زاویه‌های A و B، از خطوط d و Δ و نیز از خطوط d' و Δ به یک فاصله است. در نتیجه نقطهٔ M از دو خط d و d' به یک فاصله است، پس روی خطی موازی با d و d' و به فاصلهٔ یکسان از آنها قرار دارد.

(هندسه ۳- آشنایی با مقاطع مخروطی: صفحه‌های ۳۶ تا ۳۹)

۱۳۷- **گزینهٔ «۱»** (کتاب آبی هندسه ۳ - سوال ۲۴۳)

فرض کنیم معادلهٔ دایرهٔ به صورت $x^2+y^2+ax+by+c=0$ باشد، با جای‌گذاری مختصات سه نقطهٔ داده شده در معادلهٔ دایره داریم:

$$(0,0)\Rightarrow 0+0+0+0+c=0\Rightarrow c=0$$

$$\begin{aligned}(2,1)&\Rightarrow 4+1+2a+b+0=0\Rightarrow\\(1,-2)&\Rightarrow 1+4+a-2b+0=0\Rightarrow\end{aligned}\begin{cases}2a+b=-5\\a-2b=-5\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}a=-3\\b=1\end{cases}$$

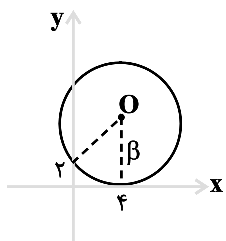
بنابراین شعاع دایره برابر است با:

$$R=\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2-4c}=\frac{1}{2}\sqrt{(-3)^2+1^2-4(0)}=\frac{1}{2}\sqrt{10}$$

(هندسه ۳- آشنایی با مقاطع مخروطی: صفحه‌های ۴۰ تا ۴۲)

۱۳۸- **گزینهٔ «۴»** (کتاب آبی هندسه ۳ - سوال ۲۴۶)

مطابق شکل، دایره در نقطهٔ $(4,0)$ بر محور xها مماس است، بنابراین مختصات مرکز آن به صورت $O(4,\beta)$ می‌باشد. فاصلهٔ مرکز دایره از دو نقطهٔ $(4,0)$ و $(0,2)$ برابر است. پس داریم:



$$\beta=\sqrt{(0-4)^2+(2-\beta)^2}\xrightarrow{\text{توان}2}\beta^2=16+4-4\beta+\beta^2$$
$$\Rightarrow 4\beta=20\Rightarrow\beta=5$$

بنابراین شعاع دایره نیز برابر ۵ است و معادلهٔ دایره به صورت زیر است:

$$(x-4)^2+(y-5)^2=25\xrightarrow{x=0}16+(y-5)^2=25$$
$$\Rightarrow (y-5)^2=9$$

$$\Rightarrow\begin{cases}y-5=3\Rightarrow y=8\\y-5=-3\Rightarrow y=2\end{cases}$$

یعنی دایره، محور عرض‌ها را در نقاطی به عرض‌های ۲ و ۸ قطع می‌کند.

(هندسه ۳- آشنایی با مقاطع مخروطی: صفحه‌های ۴۰ تا ۴۳)

۱۳۹- **گزینهٔ «۴»** (کتاب آبی هندسه ۳ - سوال ۳۱۴)

$$C_1: x^2+y^2-2x-8y+8=0$$

$$O_1(1,4), R_1=\frac{1}{2}\sqrt{(-2)^2+(-8)^2-4(8)}=3$$

$$C_2: x^2+y^2-2x+4y+4=0$$

$$O_2(1,-2), R_2=\frac{1}{2}\sqrt{(-2)^2+4^2-4(4)}=1$$

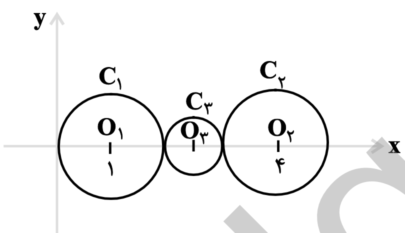
$$O_1O_2=\sqrt{(1-1)^2+(-2-4)^2}=6$$

با توجه به آن‌که $O_1O_2>R_1+R_2$، پس دو دایره متخارج‌اند و درنتیجه ۴ مماس مشترک (دو مماس مشترک داخلی و دو مماس مشترک خارجی) دارند.

(هندسه ۳- آشنایی با مقاطع مخروطی: صفحه‌های ۴۰ تا ۴۶)

۱۴۰- **گزینهٔ «۴»** (کتاب آبی هندسه ۳ - سوال ۳۳۵)

$$C_1: x^2+y^2-2x=0\Rightarrow O_1(1,0), R_1=1$$
$$C_2: x^2+y^2-8x+15=0\Rightarrow O_2(4,0), R_2=1$$



مطابق شکل مرکز دایرهٔ C_3 (دایره مماس خارج با دو دایرهٔ C_1 و C_2)، دقیقاً وسط نقاط O_1 و O_2 قرار دارد.

$$O_3=\frac{O_1+O_2}{2}=(\frac{5}{2},0)$$

همچنین مطابق شکل، شعاع دایرهٔ C_3، برابر $R_3=\frac{1}{2}$ است. در نتیجه داریم:

$$C_3: \text{معادلهٔ دایرهٔ}\ (x-\frac{5}{2})^2+y^2=\frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow x^2-5x+\frac{25}{4}+y^2=\frac{1}{4}\Rightarrow x^2+y^2-5x+6=0$$

(هندسه ۳- آشنایی با مقاطع مخروطی: صفحه‌های ۴۰ تا ۴۶)

ریاضیات گسسته

۱۴۱- گزینهٔ «۳» *(امیرحسین ابومحبوب)*

اگر $a \mid b$ و $b \mid c$، آن‌گاه طبق خاصیت تعدی $a \mid c$ و در نتیجه داریم:

گزینهٔ «۱»: $\left.\begin{matrix} a \mid b \\ a \mid c \end{matrix}\right\} \xrightarrow{\text{تفاضل}} a \mid b-c$

گزینهٔ «۲»: $\left.\begin{matrix} a \mid c \\ b \mid c \end{matrix}\right\} \xrightarrow{\text{ضرب}} ab \mid c^{۲}$

گزینهٔ «۴»: $\left.\begin{matrix} a \mid b \\ a \mid c \end{matrix}\right\} \xrightarrow{\text{ضرب}} a^{۲} \mid bc$

به‌عنوان مثال نقض برای گزینهٔ «۳»، می‌توانیم $a=۱$، $b=۲$ و $c=۸$ را در نظر بگیریم.

(ریاضیات گسسته - آشنایی با نظریهٔ اعداد: صفحه‌های ۹ تا ۱۲)

۱۴۲- گزینهٔ «۳» *(افشین خاصّه‌خان)*

اگر $q > r$ باشد، داریم:

$$a = ۳۷(r+۱)+r = ۳۸r+۳۷ \xrightarrow{\max(r)=۳۶} a = ۱۴۰۵$$

اگر $q < r$ باشد، داریم:

$$a = ۳۷(r-۱)+r = ۳۸r-۳۷ \xrightarrow{\max(r)=۳۶} a = ۱۳۳۱$$

بنابراین بیشترین مقدار a برابر ۱۴۰۵ و مجموع ارقام آن برابر ۱۰ است.

(ریاضیات گسسته - آشنایی با نظریهٔ اعداد: صفحه‌های ۱۴ و ۱۵)

۱۴۳- گزینهٔ «۴» *(احمدرضا فلاح)*

$$۳^{۳} = ۲۷ \overset{۷}{\equiv} -۱$$

$$۵^{۳} = ۱۲۵ \overset{۷}{\equiv} -۱$$

$$۳^{۳n+۱۱} \times ۵^{۳n+۱۲} + ۲ \overset{۷}{\equiv} ۳^{۳n} \times ۳^{۱۱} \times ۵^{۳n} \times ۵^{۱۲} + ۲$$

$$\overset{۷}{\equiv} ۱۵^{۳n} \times (۳^{۳})^{۳} \times ۳^{۲} \times (۵^{۳})^{۴} + ۲ \overset{۷}{\equiv} ۱^{۳n} \times (-۱)^{۳} \times ۲ \times (-۱)^{۴} + ۲$$

$$\overset{۷}{\equiv} -۲+۲ \overset{۷}{\equiv} ۰$$

یعنی این عدد به ازای همهٔ مقادیر طبیعی n، بر ۷ بخش‌پذیر است.

(ریاضیات گسسته - آشنایی با نظریهٔ اعداد: صفحه‌های ۱۸ تا ۲۱)

۱۴۴- گزینهٔ «۴» *(افشین خاصّه‌خان)*

عددی مضرب ۴۴ است، که مضرب ۴ و ۱۱ باشد.

$$\overline{۴۲a۵b} \overset{۴}{\equiv} ۰ \Rightarrow \overline{۵b} \overset{۴}{\equiv} ۰ \Rightarrow \begin{cases} b = ۲ \\ b = ۶ \end{cases}$$

$$\overline{۴۲a۵b} \overset{۱۱}{\equiv} ۰ \Rightarrow b-۵+a-۲+۴ \overset{۱۱}{\equiv} ۰ \Rightarrow a+b \overset{۱۱}{\equiv} ۳$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a+b = ۳ \\ a+b = ۱۴ \end{cases}$$

$$b = ۲ \xrightarrow{a+b=۳} a = ۱ \Rightarrow a \times b = ۲$$

$$b = ۶ \xrightarrow{a+b=۱۴} a = ۸ \Rightarrow a \times b = ۴۸$$

بنابراین بزرگ‌ترین مقدار $a \times b$، برابر ۴۸ است.

(ریاضیات گسسته - آشنایی با نظریهٔ اعداد: صفحه‌های ۲۲ و ۲۳)

۱۴۵- گزینهٔ «۲» *(علی ایمانی)*

فرض کنید تعداد اسکناس‌های ۲۰۰ و ۵۰۰ تومانی به‌ترتیب برابر x و y باشد. در این‌صورت داریم:

$$۲۰۰x + ۵۰۰y = ۱۳۰۰۰ \Rightarrow ۲x + ۵y = ۱۳۰$$

$$\Rightarrow ۵y \overset{۲}{\equiv} ۱۳۰ \Rightarrow y \overset{۲}{\equiv} ۰ \Rightarrow y = ۲k \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$۲x + ۵(۲k) = ۱۳۰ \Rightarrow ۲x = -۱۰k + ۱۳۰ \Rightarrow x = -۵k + ۶۵$$

$$\left.\begin{matrix} x > ۰ \Rightarrow -۵k + ۶۵ > ۰ \Rightarrow k < ۱۳ \\ y > ۰ \Rightarrow ۲k > ۰ \Rightarrow k > ۰ \end{matrix}\right\} \Rightarrow ۱ \le k \le ۱۲$$

بنابراین درصورتی که بخواهیم از هر دو مدل اسکناس استفاده کنیم، به ۱۲ طریق می‌توان این‌کار را انجام داد.

(ریاضیات گسسته - آشنایی با نظریهٔ اعداد: مشابه تمرین ۱۳ صفحهٔ ۲۹)

۱۴۶- گزینهٔ «۴» (مهدی نیک‌زاد)

گراف G ناهمبند است، پس حداقل از دو بخش تشکیل شده است. چون $\delta = ۶$ است، پس یکی از دو بخش حداقل ۷ رأس دارد و چون $\Delta = ۸$ است، بخش دیگر حداقل دارای ۹ رأس است. بنابراین حداقل مرتبهٔ گراف، برابر $p = ۹ + ۷ = ۱۶$ است.

(ریاضیات گسسته - آشنایی با نظریهٔ اعداد؛ صفحه‌های ۳۵ تا ۳۹)

۱۴۷- گزینهٔ «۴» (علی ایمانی)

این گراف شامل دورهایی به طول ۵، ۶، ۷ و ۹ است، ولی دوری به طول ۸ ندارد. به‌عنوان مثال داریم:

دور به طول ۵ : $v_۱v_۲v_۳v_۴v_۵v_۱$

دور به طول ۶ : $v_۱v_۵v_۶v_۷v_۸v_۹v_۱$

دور به طول ۷ : $v_۱v_۲v_۳v_۸v_۷v_۶v_۵v_۱$

دور به طول ۹ : $v_۱v_۲v_۳v_۴v_۵v_۶v_۷v_۸v_۹v_۱$

(ریاضیات گسسته — گراف و مدل‌سازی؛ مشابه تمرین ۱۲ صفحهٔ ۴۲)

۱۴۸- گزینهٔ «۱» (احمدرضا فلاح)

اگر a یکی از رئوس گراف G باشد، آن‌گاه $N_G[a]$ مجموعهٔ همسایگی بستهٔ رأس a و شامل رأس a و تمام رأس‌های مجاور با a در گراف G است. اگر $N_G[x] = N_G[y]$ باشد، آن‌گاه حتماً یال xy در گراف G وجود دارد و چون این فرض برای هر دو رأس دلخواه از گراف G برقرار است، پس گراف G، یک گراف کامل است. در این گراف داریم:

$$p + q = ۲۱ \Rightarrow p + \frac{p(p-۱)}{۲} = ۲۱ \Rightarrow \frac{p^۲ + p}{۲} = ۲۱$$

$$\Rightarrow p(p+۱) = ۴۲ \xrightarrow{p>۰} p = ۶$$

در گراف $K_۶$، درجه همهٔ رأس‌ها برابر ۵ است، پس $\Delta(G) = ۵$ می‌باشد.

(ریاضیات گسسته - گراف و مدل‌سازی؛ صفحه‌های ۳۵ تا ۳۷)

۱۴۹- گزینهٔ «۱» (نیلوفر مهدوی)

با توجه به اینکه $۵ \times ۳ \times ۲^۵ = ۴۸۰$ است، پس تنها حالت ممکن برای درجات رئوس گراف G به‌صورت ۲، ۲، ۲، ۳، ۴ و ۵ است (گرافی با درجات رئوس ۱، ۲، ۳، ۴، ۴ و ۵ وجود ندارد چون تعداد رئوس فرد گراف همواره عددی زوج است). بنابراین داریم:

$$۲q = ۵ + ۴ + ۳ + ۲ + ۲ + ۲ = ۱۸ \Rightarrow q = ۹$$

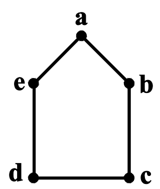
$$q(G) + q(\overline{G}) = \frac{p(p-۱)}{۲} \Rightarrow ۹ + q(\overline{G}) = \frac{۶ \times ۵}{۲}$$

$$\Rightarrow q(\overline{G}) = ۶$$

(ریاضیات گسسته - گراف و مدل‌سازی؛ صفحه‌های ۳۵ تا ۴۰)

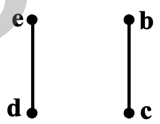
۱۵۰- گزینهٔ «۲» (امیر وفائی)

گراف G را مطابق شکل در نظر بگیرید.



با توجه به اینکه گراف فرد ـ منتظم از مرتبهٔ فرد وجود ندارد، پس زیرگراف ۱- منتظم فقط می‌تواند از مرتبه‌های ۲ و ۴ باشد. هر یال گراف G، یک زیرگراف ۱- منتظم از مرتبهٔ ۲ است، پس ۵ زیرگراف ۱- منتظم از مرتبهٔ ۲ وجود دارد. از طرفی با حذف هر رأس گراف و یال مقابل به آن، یک زیرگراف ۱- منتظم از مرتبهٔ ۴ حاصل می‌شود.

به عنوان مثال با حذف رأس a و یال cd داریم:



بنابراین ۵ زیرگراف ۱- منتظم نیز از مرتبهٔ ۴ در گراف G موجود است و در مجموع این گراف دارای ۱۰ زیرگراف ۱- منتظم است.

(ریاضیات گسسته - گراف و مدل‌سازی؛ صفحه‌های ۳۵ تا ۳۷)

فیزیک

۱۵۱- گزینهٔ «۴» *(زهره آقامحمدی)*

بررسی گزینه‌ها:

گزینهٔ «۱»: در بازهٔ زمانی t_2 تا t_4، قسمت مثبت مساحت زیر نمودار که همان جابه‌جایی است، بیشتر است، پس $v_{av} > 0$ است.

گزینهٔ «۲»: در لحظهٔ t_3 سرعت صفر و در لحظهٔ t_2 سرعت منفی است. پس $\Delta v > 0$ است، در نتیجه $a_{av} > 0$ است.

گزینهٔ «۳»: در لحظات t_1 و t_3 سرعت متحرک صفر می‌شود و تغییر علامت می‌دهد، پس در این لحظات متحرک تغییر جهت می‌دهد.

گزینهٔ «۴»: در لحظهٔ t_4، سرعت مثبت و اندازهٔ آن بیشتر از سرعت لحظه صفر است، پس $\Delta v > 0$ یعنی $(a_{av})_{کل} > 0$ است، در نتیجه گزینهٔ «۴» نادرست است.

(فیزیک ۳- حرکت بر خط راست؛ صفحه‌های ۲ تا ۱۳)

۱۵۲- گزینهٔ «۱» *(سیدعلی میرنوری)*

متحرک با سرعت ثابت حرکت می‌کند و شیب نمودار $x-t$ در اینجا برابر سرعت متحرک است.

$$\text{شیب خط} = v = \frac{100}{25} = 4\frac{m}{s}$$

متحرک دو بار در فاصلهٔ ۲۰ متری از مبدأ بوده است، یک بار در $x = -20m$ و بار دیگر در $x' = 20m$. لذا داریم:

$$\Delta x = v\Delta t \Rightarrow 40 = 4\Delta t \Rightarrow \Delta t = |t_2 - t_1| = 10s$$

(فیزیک ۳- حرکت بر خط راست؛ صفحه‌های ۱۳ تا ۱۵)

۱۵۳- گزینهٔ «۴» *(محمدعلی راست‌پیمان)*

در حرکت یکنواخت روی خط راست، به‌طور کلی همواره جابه‌جایی و مسافت طی شده با هم برابرند، بنابراین در گزینهٔ (۱) که معادلهٔ حرکت یکنواخت روی خط راست است، همواره جابه‌جایی و مسافت برابرند.

در گزینه‌های (۲) و (۳) شتاب و سرعت اولیه هم‌علامت هستند، بنابراین حرکت تندشونده است و تغییر جهت نخواهد داد.

در گزینهٔ (۴)، سرعت اولیه و شتاب غیر هم‌علامت هستند، بنابراین حرکت ابتدا کندشونده و سپس تندشونده است و در نتیجه مسافت طی شده و جابه‌جایی همواره برابر نیستند.

(فیزیک ۳- حرکت بر خط راست؛ صفحه‌های ۱۳ تا ۲۱)

۱۵۴- گزینهٔ «۳» *(محسن قندچلر)*

ابتدا با استفاده از شیب خط مماس در زمان $t = 1/5s$، سرعت را در این لحظه به‌دست می‌آوریم:

$$v_{t=1/5s} = \frac{0-(-1)}{2/5-1/5} = 1\frac{m}{s}$$

اکنون سرعت اولیه و شتاب را به‌دست می‌آوریم:

$$\Delta x = \frac{v_0 + v_{1/5}}{2}t \Rightarrow -3 = \frac{v_0 + 1}{2}(1/5) \Rightarrow v_0 = -5\frac{m}{s}$$

$$v = at + v_0 \Rightarrow 1 = a(1/5) - 5 \Rightarrow a = 4\frac{m}{s^2}$$

از لحظه شروع حرکت تا لحظه‌ای که سرعت متحرک به صفر می‌رسد، نوع حرکت کندشونده است.

$$v = at + v_0 \Rightarrow 0 = 4t - 5 \Rightarrow t = 1/25s$$

(فیزیک ۳- حرکت بر خط راست؛ صفحه‌های ۱۵ تا ۲۱)

۱۵۵- گزینهٔ «۲» *(سیدعلی میرنوری)*

چون a و v_0 هم‌علامت هستند، حرکت تندشونده است. در حرکت با شتاب ثابت روی خط راست داریم:

$$v = at + v_0 \Rightarrow \begin{cases} v = at + v_0 \\ v' = 2at + v_0 \end{cases}$$

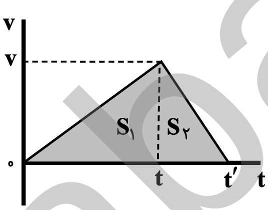
$$\xrightarrow{\text{باتقسیم رابطه‌ها به هم}} \frac{v'}{v} = \frac{2at + v_0}{at + v_0} \Rightarrow 1 < \frac{v'}{v} < 2$$

$$\Rightarrow v < v' < 2v$$

(فیزیک ۳- حرکت بر خط راست؛ صفحه‌های ۱۵ تا ۲۱)

۱۵۶- گزینهٔ «۱» *(زهره آقامحمدی)*

ابتدا با توجه به شتاب در هر مرحله داریم:



$$a_1 = 1\frac{m}{s^2} \Rightarrow 1 = \frac{v-0}{t} \Rightarrow v = t$$

$$a_2 = -2\frac{m}{s^2} \Rightarrow -2 = \frac{0-v}{t'-t} \Rightarrow t' = \frac{3}{2}t$$

از طرفی چون مساحت زیر نمودار سرعت- زمان، جابه‌جایی را نشان می‌دهد، داریم:

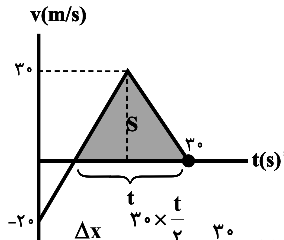
$$S_1 = 100m \Rightarrow \frac{vt}{2} = 100 \Rightarrow vt = 200$$

$$S_2 = \frac{(t'-t)v}{2} = \frac{1}{4}vt = 50m$$

(فیزیک ۳- حرکت بر خط راست؛ صفحه‌های ۱۵ تا ۲۱)

۱۵۷- **گزینهٔ «۳»** *(احسان محمدی)*

زمانی که سرعت متحرک مثبت باشد، متحرک در جهت مثبت محور x حرکت می‌کند. برای محاسبهٔ سرعت متوسط از نمودار سرعت- زمان، جابه‌جایی را به کمک سطح محصور بین نمودار سرعت- زمان و محور زمان به‌دست می‌آوریم:



$$|\Delta x| = S = \frac{30\times t}{2}$$

حال به کمک رابطهٔ سرعت متوسط داریم:

$$v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{30\times \frac{t}{2}}{t} = \frac{30}{2} = 15\frac{m}{s}$$

(فیزیک ۳- حرکت بر خط راست؛ صفحه‌های ۱۵ تا ۲۱)

۱۵۸- **گزینهٔ «۳»** *(عبدالرضا امینی‌نسب)*

جابه‌جایی متحرک در ثانیهٔ n ام از رابطهٔ $\Delta x = (n - 0/5)a + v_0$ به‌دست می‌آید.

$$\begin{cases}\Delta x_2 = 1/5a + v_0 = 5\\ \Delta x_3 = 2/5a + v_0 = 3\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -2\frac{m}{s^2}\\ v_0 = 8\frac{m}{s}\end{cases}$$

اکنون به کمک رابطهٔ سرعت ـ جابه‌جایی، داریم:

$$\Delta x_s = \left|\frac{-v_0^2}{2a}\right| = \left|\frac{64}{4}\right| = 16m$$

بنابراین فاصلهٔ اتومبیل تا مانع در لحظهٔ توقف برابر است با:

$$30 - 16 = 14m$$

(فیزیک ۳- حرکت بر خط راست؛ صفحه‌های ۱۵ تا ۲۱)

۱۵۹- **گزینهٔ «۱»** *(محمدعلی راست‌پیمان)*

در ۶ ثانیهٔ ابتدایی حرکت، داریم:

$$v_6 = a_1t_1 + v_0 \Rightarrow v_6 = 4\times 6 + (-16) \Rightarrow v_6 = 8\frac{m}{s}$$

$$\Delta x_1 = \frac{v_6 + v_0}{2}\times t_1 = \frac{8 + (-16)}{2}\times 6 \Rightarrow \Delta x_1 = -24m$$

در بازهٔ زمانی 6s تا 10s داریم:

$$v_{10} = a_2t_2 + v_6 \Rightarrow v_{10} = -2\times 4 + 8 \Rightarrow v_{10} = 0$$

$$\Delta x_2 = \frac{v_{10} + v_6}{2}\times t_2 = \frac{0+8}{2}\times 4 \Rightarrow \Delta x_2 = 16m$$

بنابراین:

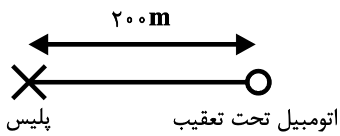
$$\Delta x_{\text{کل}} = \Delta x_1 + \Delta x_2 = -24 + 16 = -8m$$

با استفاده از تعریف سرعت متوسط داریم:

$$v_{av} = \frac{\Delta x_{\text{کل}}}{\Delta t} = \frac{-8}{10} \Rightarrow v_{av} = -0/8\frac{m}{s} \Rightarrow |v_{av}| = 0/8\frac{m}{s}$$

(فیزیک ۳- حرکت بر خط راست؛ صفحه‌های ۱۵ تا ۲۱)

۱۶۰- **گزینهٔ «۱»** *(مسعود قره‌خانی)*



در سؤال پلیس را با حرف P و اتومبیل دیگر را با حرف A نشان می‌دهیم:

$$x_P = \frac{1}{2}at^2 + v_0t \xrightarrow[t=20s]{v_0=0} x_P = \frac{1}{2}a(20)^2 = 200a$$

$$x_A = vt + x_0 \xrightarrow[t=20s]{x_0=200m} x_A = 30(20) + 200 = 800m$$

$$x_A - x_P = 100 \Rightarrow 800 - 200a = 100 \Rightarrow 200a = 700 \Rightarrow a = 3/5\frac{m}{s^2}$$

(فیزیک ۳- حرکت بر خط راست؛ صفحه‌های ۱۳ تا ۲۱)

۱۶۱- **گزینهٔ «۴»** *(احسان محمدی)*

زمان سقوط هر گلوله را محاسبه می‌کنیم.

گلولهٔ اول: $\Delta h = \frac{1}{2}gt^2 \Rightarrow 45 = \frac{1}{2}\times 10t^2 \Rightarrow t = 3s$

گلولهٔ دوم: $\Delta h' = \frac{1}{2}gt'^2 \Rightarrow 20 = \frac{1}{2}\times 10t'^2 = t' = 2s$

پس گلولهٔ دوم باید 1s بعد از رها کردن گلولهٔ اول رها شود.

(فیزیک ۳- حرکت بر خط راست؛ صفحه‌های ۲۱ تا ۲۴)

۱۶۲- **گزینهٔ «۳»** *(روح‌اله علی‌پور)*

چون گلوله‌ها از حال سکون رها شده‌اند، داریم:

$$v^2 = -2g\Delta y \Rightarrow \left(\frac{v_A}{v_B}\right)^2 = \frac{g_A}{g_B} = 4 \Rightarrow \frac{v_A}{v_B} = 2$$

از طرفی داریم:

$$\Delta y = \frac{1}{2}gt^2 \Rightarrow \frac{\Delta y_A}{\Delta y_B} = \frac{g_A}{g_B}\times\left(\frac{t_A}{t_B}\right)^2 \Rightarrow 1 = 4\times\left(\frac{t_A}{t_B}\right)^2$$

$$\Rightarrow \frac{t_A}{t_B} = \frac{1}{2}$$

(فیزیک ۳- حرکت بر خط راست؛ صفحه‌های ۲۱ تا ۲۴)

۱۶۳- **گزینهٔ «۴»** (محسن قندچلر)

چون جسم ابتدا در حالت تعادل قرار داشته است، اگر نیرویی حذف شود، اندازهٔ برآیند نیروهای باقی‌مانده با اندازهٔ نیروی حذف شده، برابر است.

$$\xrightarrow{\text{پس از حذف } \vec{F}_۱} |F_{net}| = |\vec{F}_۱| = \sqrt{(-۱۲)^۲ + (۵)^۲} = ۱۳N$$

$$a = \frac{F_{net}}{m} = \frac{۱۳}{۳/۲۵} = ۴\frac{m}{s^۲}$$

اکنون با استفاده از معادلهٔ سرعت- جابه‌جایی در حرکت با شتاب ثابت، تندی نهایی جسم را به‌دست می‌آوریم.

$$v^۲ = v_۰^۲ + ۲a\Delta x \Rightarrow v^۲ = ۰ + ۲(۴)(۲۰) = ۱۶۰ \Rightarrow v = \sqrt{۱۶۰} = ۴\sqrt{۱۰}\frac{m}{s}$$

(فیزیک ۳- دینامیک و حرکت دایره‌ای: صفحه‌های ۳۰ تا ۳۴)

۱۶۴- **گزینهٔ «۲»** (سیدعلی میرنوری)

در نقاط (۱) و (۳) می‌دانیم که چون شتاب و نیروی خالص صفر است، $f_D = W$ است (W وزن چترباز)، بنابراین $f_{D_۱} = f_{D_۳}$ است.

از طرفی چون در (۲) حرکت چترباز کندشونده است، $f_D > W$ است، لذا $f_{D_۱} = f_{D_۳} < f_{D_۲}$ است.

(فیزیک ۳- دینامیک و حرکت دایره‌ای: صفحه‌های ۳۵ تا ۴۷)

۱۶۵- **گزینهٔ «۳»** (مسعود قره‌خانی)

در حال اول داریم:

$$F_{net} = ۰ \Rightarrow k\Delta x = mg \Rightarrow ۱۰۰۰ \times \frac{۲۰}{۱۰۰} = m \times ۱۰$$

$$\Rightarrow ۱۰m = ۲۰۰ \Rightarrow m = ۲۰kg$$

در حالت دوم، داریم:

$$F_{net} = ma \Rightarrow kx - mg = ma$$

$$\Rightarrow k\Delta x = m(g+a) \Rightarrow ۱۰۰۰ \times \frac{۲۵}{۱۰۰} = ۲۰(۱۰+a)$$

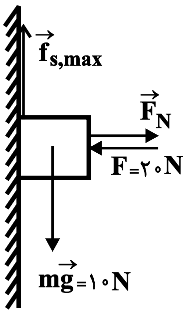
$$\Rightarrow ۲۵۰ = ۲۰۰ + ۲۰a \Rightarrow ۲۰a = ۵۰ \Rightarrow a = ۲/۵\frac{m}{s^۲}$$

کل شتاب وارد شده به جسم باید از g بیشتر باشد چون فنر باید بیشتر کشیده شود (نیروی بیشتری به آن وارد شود.) بنابراین حرکت یا باید تندشونده رو به بالا و یا کندشونده رو به پایین باشد.

(فیزیک ۳- دینامیک و حرکت دایره‌ای: صفحه‌های ۳۲ تا ۴۴)

۱۶۶- **گزینهٔ «۱»** (علیرضا گونه)

با رسم نیروهای وارد بر جسم می‌توان نوشت:



$$F = F_N \Rightarrow F_N = ۲۰N$$

$$f_{s,max} = mg = ۱۰N$$

$$f_{s,max} = \mu_s F_N \Rightarrow ۱۰ = \mu_s \times ۲۰ \Rightarrow \mu_s = ۰/۵$$

(فیزیک ۳- دینامیک و حرکت دایره‌ای: صفحه‌های ۳۵ تا ۴۳)

۱۶۷- **گزینهٔ «۱»** (خسرو ارغوانی‌فرد)

ابتدا شتاب حرکت جسم را به‌دست می‌آوریم. با توجه به اینکه سرعت جسم در $t = ۲s$ برابر صفر است، بین دو لحظه $t = ۲s$ تا $t = ۶s$ داریم:

$$\Delta x = \frac{۱}{۲}at^۲ + v_۰ t \Rightarrow -۳۲ - ۱۶ = \frac{۱}{۲}a(۶-۲)^۲ \Rightarrow a = -۶\frac{m}{s^۲}$$

در لحظهٔ $t = ۲s$ جهت حرکت جسم عوض می‌شود. در ۲ ثانیهٔ ابتدایی حرکت که نوع حرکت کندشونده است، نیروی $\vec{F}$ می‌تواند در جهت حرکت و یا در خلاف جهت حرکت، به جسم وارد شود. اگر $\vec{F}$ در جهت حرکت باشد، داریم: غ.ق.ق $F - f_k = ma \Rightarrow F - ۴ = ۵ \times (-۶) \Rightarrow F = -۲۶N$

اگر $\vec{F}$ در خلاف جهت حرکت باشد،

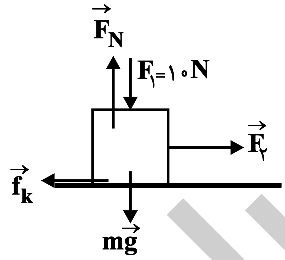
$$-F - f_k = ma \Rightarrow -F - ۴ = ۵ \times (-۶) \Rightarrow F = ۲۶N$$

(فیزیک ۳- دینامیک و حرکت دایره‌ای: صفحه‌های ۳۲ تا ۳۴ و ۳۹ تا ۴۳)

۱۶۸- **گزینهٔ «۳»** *(زهره آقامحمدی)*

ابتدا نیروهای وارد بر جسم را رسم می‌کنیم. چون در راستای قائم نیروهای وارد بر جسم متوازن هستند داریم:

$$F_N = F_1 + mg = 10 + 40 = 50N$$



سپس نیروی اصطکاک را محاسبه می‌کنیم:

$$f_k = \mu_k F_N = 0/2 \times 50 = 10N$$

از قانون دوم نیوتون در راستای حرکت داریم:

$$F_2 - f_k = ma_1$$

$$\Rightarrow 14 - 10 = 4a_1 \Rightarrow a_1 = 1\frac{m}{s^2}$$

از معادلهٔ سرعت زمان- سرعت جسم را پس از $20s$ را محاسبه می‌کنیم.

$$v_1 = a_1 t = 20\frac{m}{s}$$

پس از قطع شدن دو نیروی $\vec{F}_1$ و $\vec{F}_2$، داریم:

$$F'_N = mg \Rightarrow f_k = \mu_k F'_N = \mu_k mg$$

$$\Rightarrow 0 - f_k = ma_2 \Rightarrow a_2 = -\mu_k g = -2\frac{m}{s^2}$$

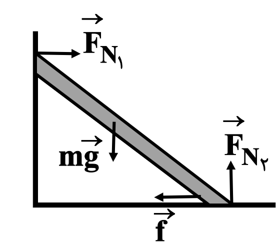
از معادلهٔ سرعت- جابه‌جایی داریم:

$$v_2^2 = v_1^2 + 2a_2\Delta x \Rightarrow 0 = 400 - 4\Delta x \Rightarrow \Delta x = 100m$$

(فیزیک ۳- دینامیک و حرکت دایره‌ای: صفحه‌های ۳۲ تا ۴۳)

۱۶۹- **گزینهٔ «۴»** *(زهره آقامحمدی)*

ابتدا نیروهای وارد بر نردبان را رسم می‌کنیم.



با توجه به اینکه نیروهای وارد بر جسم متوازن هستند، داریم:

$$\begin{cases} F_{N_2} = mg = 480N \\ F_{N_1} = f \end{cases}$$

از طرفی داریم:

$$R = 600N \Rightarrow R = \sqrt{f^2 + F_{N_2}{}^2}$$

$$\Rightarrow 600 = \sqrt{f^2 + 480^2} \Rightarrow f = 360N$$

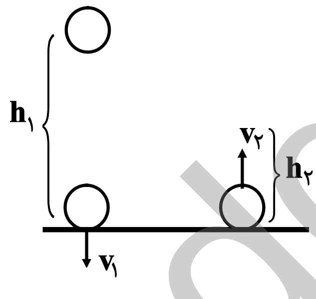
پس داریم:

$$F_{N_1} = 360N$$

(فیزیک ۳- دینامیک و حرکت دایره‌ای: صفحه‌های ۳۲ تا ۳۴ و ۳۹ تا ۴۳)

۱۷۰- **گزینهٔ «۴»** *(زهره آقامحمدی)*

ابتدا با استفاده از اصل پایستگی انرژی مکانیکی، تندی جسم را در لحظهٔ برخورد به زمین (v_1) و پس از برگشت از آن (v_2)، به‌دست می‌آوریم:



$$mgh_1 = \frac{1}{2}mv_1^2 \Rightarrow v_1^2 = 2\times 10\times 5 = 100 \Rightarrow v_1 = 10\frac{m}{s}$$

$$mgh_2 = \frac{1}{2}mv_2^2 \Rightarrow v_2^2 = 2\times 10\times 1/25 = 25 \Rightarrow v_2 = 5\frac{m}{s}$$

با استفاده از رابطهٔ تغییرات تکانه، داریم:

$$\Delta\vec{p} = \vec{p}_2 - \vec{p}_1$$

$$\Rightarrow |\Delta\vec{p}| = m(v_2 - v_1) = 2/4(5 - (-10)) = 36\frac{kg.m}{s}$$

(فیزیک ۳- دینامیک و حرکت دایره‌ای: صفحه‌های ۴۶ تا ۴۸)

۱۷۱- **گزینهٔ «۴»** (بابک اسلامی)

طبق قانون دوم نیوتون، نیروی خالص متوسط وارد بر جسم برابر است با:

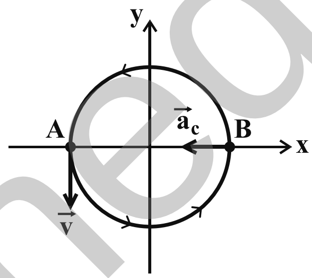
$$\vec{F}_{av} = \frac{\Delta \vec{p}}{\Delta t}$$

از طرف دیگر مساحت سطح زیر نمودار نیرو – زمان برابر با تغییرات تکانه است. بنابراین داریم:

$$F_{av} = \frac{۱۴/۴}{(۴/۹ - ۳/۷)\times ۱۰^{-۳}} \Rightarrow F_{av} = ۱۲\times ۱۰^{۳}\,N = ۱۲kN$$

(فیزیک ۳- دینامیک و حرکت دایره‌ای: صفحه‌های ۴۶ تا ۴۸)

۱۷۲- **گزینهٔ «۴»** (بیتا خورشید)



با توجه به جهت بردار سرعت و جهت دوران، می‌توان تشخیص داد متحرک در ابتدا در مکان A قرار دارد. با توجه به این‌که دورهٔ حرکت برابر با $1s$ است، پس از $۰/۵s$ متحرک نیمی از محیط دایره را طی می‌کند و به نقطهٔ B می‌رسد. در این لحظه شتاب جانب‌مرکز در خلاف جهت محور x ها است و اندازهٔ آن برابر است با:

$$T = \frac{۲\pi r}{v} \Rightarrow ۱ = \frac{۲\pi r}{۳} \Rightarrow r = \frac{۳}{۲\pi} m$$

$$a_c = \frac{v^۲}{r} = \frac{۳^۲}{\frac{۳}{۲\pi}} = ۶\pi \frac{m}{s^۲} \Rightarrow \vec{a}_c = -۶\pi \vec{i}\left(\frac{m}{s^۲}\right)$$

(فیزیک ۳- دینامیک و حرکت دایره‌ای: صفحه‌های ۴۸ تا ۵۳)

۱۷۳- **گزینهٔ «۱»** (محسن قندچلر)

شرط بیشینهٔ تندی حرکت اتومبیل برای نلغزیدن در پیچ جادهٔ افقی، این است که نیروی اصطکاک ایستایی در آستانهٔ حرکت بین لاستیک و سطح جاده، برابر با اندازهٔ نیروی مرکزگرا باشد:

$$\frac{mv_{max}^۲}{R} = f_{s,max} \Rightarrow \frac{mv_{max}^۲}{R} = \mu_s mg \Rightarrow v_{max} = \sqrt{\mu_s Rg}$$

$$\frac{v'_{max}}{v_{max}} = \sqrt{\frac{\mu'_s}{\mu_s}} \Rightarrow ۱/۱ = \sqrt{\frac{\mu'_s}{۰/۵}} \Rightarrow ۱/۲۱ = \frac{\mu'_s}{۰/۵}$$

$$\Rightarrow \mu'_s = ۰/۶۰۵ \Rightarrow \mu'_s - \mu_s = ۰/۶۰۵ - ۰/۵ = ۰/۱۰۵$$

(فیزیک ۳- دینامیک و حرکت دایره‌ای: صفحه‌های ۵۱ تا ۵۳)

۱۷۴- **گزینهٔ «۱»** (محسن قندچلر)

ابتدا جرم m را به‌دست می‌آوریم:

$$F = \frac{GmM}{r^۲} \Rightarrow ۶\times ۱۰^{-۱۰} = \frac{۶/۵\times ۱۰^{-۱۱}\times m\times ۴۰}{(۱۳)^۲} \Rightarrow m = ۳۹kg$$

در صورتی که فاصلهٔ بین دو جرم ثابت باشد، هنگامی نیروی گرانشی بین آن دو بیشینه می‌شود که جرم‌ها برابر باشند. در نتیجه باید $۰/۵kg$ از M را جدا کنیم و به m منتقل کنیم تا هر دو جرم $۳۹/۵kg$ شوند.

(فیزیک ۳- دینامیک و حرکت دایره‌ای: صفحه‌های ۵۳ تا ۵۶)

۱۷۵- **گزینهٔ «۲»** (خسرو ارغوانی‌فرد)

نیروی مرکزگرای لازم برای حرکت دایره‌ای یکنواخت، همواره به دور زمین توسط نیروی گرانشی تأمین می‌شود، بنابراین داریم:

$$m\frac{v^۲}{r} = G\frac{mM_e}{r^۲} \Rightarrow \frac{۴\pi^۲ mr}{T^۲} = G\frac{mM_e}{r^۲} \Rightarrow T^۲ = \frac{۴\pi^۲}{GM_e} r^۳$$

$$\Rightarrow \left(\frac{T_A}{T_B}\right)^۲ = \left(\frac{r_A}{r_B}\right)^۳$$

$$\Rightarrow \left(\frac{T_A}{T_B}\right)^۲ = \left(\frac{R_e + R_e}{R_e + ۲R_e}\right)^۳ \Rightarrow \frac{T_A}{T_B} = \frac{۲\sqrt{۲}}{۳\sqrt{۳}} = \frac{۲}{۹}\sqrt{۶}$$

(فیزیک ۳- دینامیک و حرکت دایره‌ای: صفحه‌های ۴۸ تا ۵۶)

۱۷۶- **گزینهٔ «۲»** (میثم دشتیان)

با توجه به اینکه $f_۱ = ۰/۴Hz$ است می‌توان تعداد نوسان‌ها در ۱/۵ دقیقه را به‌دست آورد:

$$f_۱ = \frac{N_۱}{t} \Rightarrow ۰/۴ = \frac{N_۱}{۱/۵\times ۶۰} \Rightarrow N_۱ = ۳۶$$

در حالت جدید قرار است تعداد نوسان‌ها معادل $N_۲ = N_۱ + ۹ = ۴۵$ نوسان گردد. بنابراین:

$$\begin{cases} T_۲ = \frac{t}{N_۲} = \frac{۱/۵\times ۶۰}{۴۵} = ۲s \\ T_۱ = \frac{۱}{f} = \frac{۱}{۰/۴} = ۲/۵s \end{cases} \Rightarrow \text{درصد تغییرات دوره} = \frac{\Delta T}{T_۱}\times ۱۰۰ = \frac{۲ - ۲/۵}{۲/۵}\times ۱۰۰$$

$$\Rightarrow \text{درصد تغییرات دوره} = -۲۰\%$$

(فیزیک ۳- نوسان و موج: صفحه‌های ۶۲ و ۶۳)

۱۷۷- **گزینهٔ «۱»** (مسعود قره‌خانی)

$x = A\cos\omega t$

$\Rightarrow A = ۰/۴m = ۴۰cm$

$\omega = \frac{۲\pi}{T} \Rightarrow ۵۰\pi = \frac{۲\pi}{T}$

$\Rightarrow T = \frac{۲}{۵۰} = ۰/۰۴s$

(فیزیک ۳- نوسان و موج؛ صفحه‌های ۶۳ تا ۶۵)

۱۷۸- **گزینهٔ «۲»** (خسرو ارغوانی‌فرد)

$y = A\cos\frac{۲\pi}{T}t \Rightarrow -\sqrt{۲} = ۲\cos(\frac{۲\pi}{T}\times ۰/۵)$

$\Rightarrow \cos(\frac{\pi}{T}) = -\frac{\sqrt{۲}}{۲} = \cos\frac{۳\pi}{۴} \Rightarrow \frac{\pi}{T} = \frac{۳\pi}{۴}$

$\Rightarrow T = \frac{۴}{۳}s$

می‌دانیم دورهٔ حرکت نوسانگر از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید.

$T = ۲\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \Rightarrow \frac{۴}{۳} = ۲\pi\sqrt{\frac{۰/۱}{k}}$

$\Rightarrow \frac{۴}{۹} = \pi^۲ \times \frac{۰/۱}{k} = \frac{۱}{k} \Rightarrow k = \frac{۹}{۴}\frac{N}{m}$

(فیزیک ۳- نوسان و موج؛ صفحه‌های ۶۲ تا ۶۵)

۱۷۹- **گزینهٔ «۴»** (محمدعلی راست‌پیمان)

با توجه به اینکه در یک دوره (T) نوسانگر تنها به‌مدت $\frac{T}{۲}$ نوع حرکتش کندشونده است، بنابراین:

$\frac{T}{۲} = ۰/۰۱ \Rightarrow T = ۰/۰۲s$

در نتیجه:

$\omega = \frac{۲\pi}{T} = \frac{۲\pi}{۰/۰۲} = ۱۰۰\pi\frac{rad}{s}$

حال با توجه به رابطهٔ تندی بیشینهٔ نوسانگر هماهنگ ساده، داریم:

$v_{max} = A\omega = ۰/۰۸ \times ۱۰۰\pi = ۸\pi\frac{m}{s}$

(فیزیک ۳- نوسان و موج؛ صفحه‌های ۶۲ تا ۶۷)

۱۸۰- **گزینهٔ «۳»** (زهره آقامحمدی)

با توجه به مسألهٔ دامنهٔ نوسان برابر $۴cm$ است. از طرفی نوسانگر فاصله دو نقطهٔ بازگشت را در $\frac{T}{۲}$ طی می‌کند، پس داریم:

$\frac{T}{۲} = ۰/۱ \Rightarrow T = ۰/۲s$

$\omega = \frac{۲\pi}{T} = ۱۰\pi\frac{rad}{s}$

با توجه به رابطهٔ انرژی مکانیکی داریم:

$E = \frac{۱}{۲}mA^۲\omega^۲$

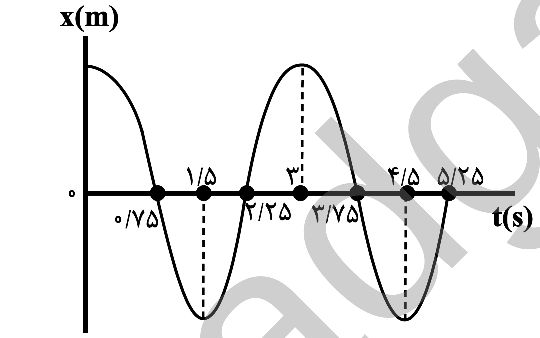
$\Rightarrow E = \frac{۱}{۲} \times ۰/۴ \times (۰/۰۴)^۲ \times ۱۰۰\pi^۲ = ۰/۳۲J$

$\Rightarrow E = K + U \Rightarrow ۰/۳۲ = K + ۰/۲ \Rightarrow K = ۰/۱۲J$

(فیزیک ۳- نوسان و موج؛ صفحه‌های ۶۲ تا ۶۸)

۱۸۱- **گزینهٔ «۱»** (محسن قندچلر)

ابتدا با استفاده از معادلهٔ مکان- زمان نوسانگر هماهنگ ساده، دوره را به‌دست می‌آوریم:



$x = A\cos(\frac{۲\pi}{T}t) \Rightarrow \frac{A}{۲} = A\cos(\frac{۲\pi}{T}\times ۰/۵) \Rightarrow \cos(\frac{\pi}{T}) = \frac{۱}{۲}$

$\Rightarrow \frac{\pi}{T} = \frac{\pi}{۳} \Rightarrow T = ۳s$

در قسمت‌هایی از نمودار مکان- زمان که دهانهٔ نمودار رو به پایین است، شتاب منفی (در خلاف جهت x) می‌باشد.

در قسمت‌هایی از نمودار مکان- زمان که در حال نزدیک شدن به دو انتهای مسیر نوسان هستیم، انرژی جنبشی نوسانگر در حال کاهش است.

(فیزیک ۳- نوسان و موج؛ صفحه‌های ۶۲ تا ۶۸)

۱۸۲- **گزینهٔ «۴»** (مسعود قره‌خانی)

$$E = \frac{1}{2}m\omega^2A^2 \ , \ \omega = \frac{2\pi}{T} \ , \ 3\frac{T_A}{2} = T_B \Rightarrow \frac{T_A}{T_B} = \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{E_B}{E_A} = \frac{m_B}{m_A} \times (\frac{T_A}{T_B})^2 \times (\frac{A_B}{A_A})^2$$

$$\Rightarrow \frac{E_B}{E_A} = 2 \times (\frac{2}{3})^2 \times (\frac{3}{4})^2 = 2 \times \frac{4}{9} \times \frac{9}{16} = \frac{8}{16} = \frac{1}{2}$$

(فیزیک ۳- نوسان و موج؛ صفحه‌های ۶۳ تا ۶۸)

۱۸۳- **گزینهٔ «۳»** (عبدالرضا امینی‌نسب)

ابتدا تغییرات شتاب گرانش را محاسبه می‌کنیم، سیارهٔ زمین را با اندیس e و سیارهٔ دیگر را با اندیس x نمایش می‌دهیم.

$$g = G\frac{M}{R^2} \Rightarrow \frac{g_x}{g_e} = \frac{M_x}{M_e} \times (\frac{R_e}{R_x})^2 = \frac{1}{4} \times 4^2 = 4$$

دورهٔ تناوب آونگ از رابطهٔ $T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$ به‌دست می‌آید. داریم:

$$\frac{T_x}{T_e} = \sqrt{\frac{g_e}{g_x} \times \frac{L_x}{L_e}} \Rightarrow 1 = \sqrt{\frac{1}{4} \times \frac{L_x}{L_e}} \Rightarrow L_x = 4L_e$$

تغییرات طول آونگ برابر است با:

$$\Delta L = L_x - L_e = 4L - L = 3L$$

(فیزیک ۳- نوسان و موج؛ صفحه‌های ۶۷ و ۶۸)

۱۸۴- **گزینهٔ «۲»** (سیدعلی میرنوری)

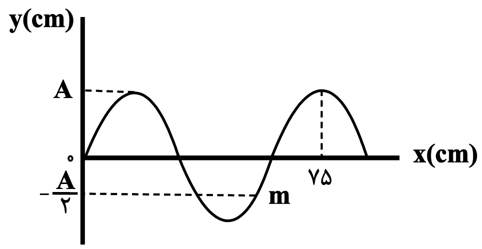
در موج‌های ایجاد شده در فنر، مولکول‌های ماده (فنر) از یک سر تا سر دیگر فنر جابه‌جا نمی‌شوند، بلکه موج از یک سر به سر دیگر حرکت می‌کند.

(فیزیک ۳- نوسان و موج؛ صفحه‌های ۶۹ و ۷۰)

۱۸۵- **گزینهٔ «۲»** (زهره آقامحمدی)

با توجه به جهت انتشار موج و این نکته که اینکه هر ذره از طناب نوسان ذره قبل خود را تکرار می‌کند پس جهت ذره m به سمت نقطهٔ بازگشت $-A$ است.

از طرفی با توجه به شکل داریم:



$$\lambda + \frac{\lambda}{4} = 75 \Rightarrow \frac{5}{4}\lambda = 75 \Rightarrow \lambda = 60\text{cm}$$

$$V = \frac{\lambda}{T} \Rightarrow T = \frac{0.6}{10} = 0.06\text{s}$$

می‌دانیم که ذره در نقاط بازگشت تغییر جهت می‌دهد و با توجه به شکل داریم:

$$\Delta t = \frac{T}{6} + \frac{T}{2} = 0.01 + 0.03 = 0.04\text{s}$$

(فیزیک ۳- نوسان و موج؛ صفحه‌های ۷۲ تا ۷۴)

۱۸۶- **گزینهٔ «۲»** (عبدالرضا امینی‌نسب)

برای تعیین نقش موج، کافی است که در لحظهٔ $t = \frac{1}{200}\text{s}$ مکان نقاط $x = 0$ و $x = 15\text{cm}$ و همچنین وضعیت نوسانی آن‌ها را مشخص کنیم. به کمک عدد روی محور افقی ابتدا طول موج و سپس دورهٔ تناوب موج را محاسبه می‌کنیم، داریم:

$$\frac{3}{2}\lambda = 15 \Rightarrow \lambda = 10\text{cm} \Rightarrow \lambda = vT \Rightarrow T = \frac{1}{100}\text{s}$$

$$\Delta t = \frac{1}{200}\text{s} = \frac{1}{2}T$$

به عبارت دیگر مکان هر ذرهٔ موج را پس از $\frac{T}{2}$ باید محاسبه کنیم.

بنا به جهت انتشار موج، هر نقطه از نقش موج از نقاط ما قبل خود تقلید می‌کند یعنی نقطهٔ $x = 0$ به سمت پایین حرکت کرده و نقطهٔ $x = 15\text{cm}$ به سمت بالا حرکت می‌کند. نقطهٔ $x = 0$، ابتدا در مدت $\frac{T}{4}$ به مکان $y = -2\text{cm}$ و سپس در مدت $\frac{T}{4}$ دیگر به مکان $y = 0$ می‌رسد. نقطهٔ $x = 15\text{cm}$ ابتدا در مدت $\frac{T}{4}$ به مکان $y = 2\text{cm}$ می‌رسد و سپس در مدت $\frac{T}{4}$ دیگر به مکان $y = 0$ می‌رسد.

(فیزیک ۳- نوسان و موج؛ صفحه‌های ۷۰ تا ۷۴)

۱۸۷- گزینهٔ «۳» *(عبدالرضا امینی‌نسب)*

ابتدا با توجه به شکل، طول موج و سپس دورهٔ تناوب موج را محاسبه می‌کنیم.

داریم:

$$\frac{\lambda}{2} = 10m \Rightarrow \lambda = 20m$$

$$\lambda = vT \Rightarrow 20 = 10 \times T \Rightarrow T = 2s$$

آنگاه داریم:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{2} = \pi \frac{rad}{s}$$

چون $1s$، معادل $\frac{T}{2}$ است، با توجه به جهت انتشار موج، نتیجه می شود که در این مدت ذره M از موضع تعادل به مکان $y = +2cm$ رفته و سپس از مکان $y = +2cm$ به موضع تعادل $(y = 0)$ می‌رسد.

از طرفی می‌دانیم، تندی نوسان ذرات در موضع تعادل بیشینه است. داریم:

$$v_{max} = A\omega \xrightarrow[\omega = \pi \frac{rad}{s}]{A = 0/02m} v_{max} = \frac{2\pi}{100} \frac{m}{s}$$

(فیزیک ۳- نوسان و موج: صفحه‌های ۶۲ تا ۷۴)

۱۸۸- گزینهٔ «۳» *(مسعود قره‌خانی)*

تمام گزینه‌ها سرعت را $\sqrt{2}$ برابر می‌کنند به جز گزینهٔ (۳) که ۲ برابر می‌کند.

$$v = \sqrt{\frac{F}{\mu}} \xrightarrow{\mu = \frac{m}{L}} v = \sqrt{\frac{FL}{m}}$$

۱) $v' = \sqrt{\frac{2FL}{m}} = \sqrt{2}v$

۲) $v' = \sqrt{\frac{FL}{\frac{m}{2}}} = \sqrt{\frac{2FL}{m}} = \sqrt{2}v$

۳) $v = \frac{2}{D}\sqrt{\frac{F}{\rho\pi}} \Rightarrow v' = \frac{4}{D}\sqrt{\frac{F}{\rho\pi}} = 2v$

۴) $v' = \sqrt{\frac{F(2L)}{m}} = \sqrt{\frac{2FL}{m}} = \sqrt{2}v$

(فیزیک ۳- نوسان و موج: صفحه‌های ۷۲ و ۷۳)

۱۸۹- گزینهٔ «۲» *(محمدعلی راست‌پیمان)*

ابتدا تندی انتشار موج را محاسبه می‌کنیم. داریم:

$$x = vt \Rightarrow 6 = v \times 0/2 \Rightarrow v = 30\frac{m}{s}$$

حال می‌توان نوشت:

$$v = \sqrt{\frac{F}{\mu}} = \sqrt{\frac{F}{m}L}$$

$$\Rightarrow 30 = \sqrt{\frac{F \times 1}{40 \times 10^{-3}}} \Rightarrow F = 36N$$

(فیزیک ۳- نوسان و موج: صفحه‌های ۷۰ تا ۷۴)

۱۹۰- گزینهٔ «۲» *(زهره آقامحمدی)*

ابتدا تندی حرکت موج در طناب را محاسبه می‌کنیم.

$$v = \sqrt{\frac{F}{\mu}}$$

$$\Rightarrow v = \sqrt{\frac{160}{0/4}} = 20\frac{m}{s}$$

با توجه به شکل داریم:

$$3\frac{\lambda}{2} = 120 \Rightarrow \lambda = 80cm = 0/8m$$

پس دوره برابر است با:

$$v = \frac{\lambda}{T} \Rightarrow 20 = \frac{0/8}{T} \Rightarrow T = 0/04s$$

موج پس از لحظهٔ $0/01s$ یعنی $\frac{T}{4}$ مسافت $\frac{\lambda}{4}$ را طی می‌کند. می‌توانیم محور y را به اندازهٔ $\frac{\lambda}{4}$ خلاف جهت حرکت موج جابه‌جا کنیم تا شکل موج را به‌دست آوریم. پس گزینهٔ (۲) صحیح است.

(فیزیک ۳- نوسان و موج: صفحه‌های ۷۰ تا ۷۴)

شیمی ۳

۱۹۱- گزینهٔ «۳» *(فرزاد رضایی)*

بررسی گزینه‌ها:

گزینهٔ «۱»: اتیلن گلیکول دارای ۲ گروه OH در ساختار خود و اوره نیز دارای ۲ گروه NH_2 در ساختار خود است.

$$\underset{\text{اتیلن گلیکول}}{\underset{\;|\qquad\;\;|}{\overset{}{CH_2-CH_2}}\atop{OH\quad OH}} \qquad\qquad \underset{\text{اوره}}{H_2N-\overset{\overset{O}{\|}}{C}-NH_2}$$

گزینهٔ «۲»: شربت معده، یک سوسپانسیون است که ناپایدار است و با گذشت زمان ته‌نشین می‌شود و مخلوط آب و روغن هم ناپایدار است.

گزینهٔ «۳»: رفتار کلوییدها را می‌توان رفتاری بین سوسپانسیون‌ها و محلول‌ها در نظر گرفت.

گزینهٔ «۴»: صابون و پاک‌کنندهٔ غیرصابونی دارای بخش آبگریز (ناقطبی) در ساختار خود هستند.

(شیمی ۳- مولکول‌ها در خدمت تندرستی؛ صفحه‌های ۴، ۷ و ۱۰)

۱۹۲- گزینهٔ «۳» *(مسعود جعفری)*

ابتدا باید غلظت باز و سپس غلظت اسید را محاسبه کنیم:

$$pH = 12/1 \rightarrow [H^+] = 10^{-12/1} mol.L^{-1}$$

$$[H^+][OH^-] = 10^{-14} \rightarrow [OH^-] = \frac{10^{-14}}{10^{-12/1}} = 10^{-1/9} mol.L^{-1}$$

$$\Rightarrow [OH^-] = 10^{-1/9} = 10^{-3} \times 10^{1/1} = 10^{-3} \times 10^{0/5} \times 10^{0/6}$$

$$= 10^{\log 3} \times 10^{\log 4} \times 10^{-3} = 12 \times 10^{-3} mol.L^{-1}$$

$$[OH^-] = \sqrt{K_b.M} \Rightarrow 12 \times 10^{-3} = \sqrt{2 \times 10^{-5} \times M_b}$$

$$M_b = 7/2 mol.L^{-1}$$

براساس رابطهٔ خنثی شدن اسیدها و بازها داریم:

$$V_b.n_b.M_b = V_a.n_a.M_a \Rightarrow 250 \times 1 \times 7/2 = 300 \times M_a \times 1$$
$$\Rightarrow M_a = 6 mol.L^{-1}$$

$$M_a = \frac{10 \times a \times d}{\text{جرم مولی}} \Rightarrow 6 = \frac{10 \times 1/26 \times a}{35} \Rightarrow \text{درصد جرمی محلول} = \frac{100}{6}\%$$

$$\text{درصد جرمی محلول} = \frac{\text{جرم حل‌شونده} \times 100}{\text{جرم حل‌شونده} + \text{جرم آب}} \Rightarrow \frac{100}{6} = \frac{x}{100+x} \times 100 \Rightarrow x = 20g$$

در محلول اسید HA، ۲۰ گرم HA و ۱۰۰ گرم آب وجود دارد. بنابراین انحلال‌پذیری HA برابر با ۲۰ است.

(شیمی ۳- مولکول‌ها در خدمت تندرستی؛ صفحه‌های ۲۰ تا ۲۶)

۱۹۳- گزینهٔ «۱» *(سعید نوری)*

از نسبت غلظتی هیدرونیوم این دو محلول داریم:

$$\frac{[H^+]_{HA}}{[H^+]_{HB}} = \frac{10^{-pH_{HA}}}{10^{-pH_{HB}}} = \frac{M_{HA} \times \alpha_{HA}}{M_{HB} \times \alpha_{HB}}$$

$$\Rightarrow \frac{10^{-pH_{HB}-1/7}}{10^{-pH_{HB}}} = 10^{-1/7} \simeq 2 \times 10^{-2} = \frac{1}{10} \times \frac{\alpha_{HA}}{\alpha_{HB}} \Rightarrow \frac{\alpha_{HB}}{\alpha_{HA}} = 5$$

برای نسبت ثابت یونش این دو محلول داریم:

$$\frac{K_{HB}}{K_{HA}} = \frac{M_{HB} \times \alpha_{HB}^2}{M_{HA} \times \alpha_{HA}^2} = \frac{10}{1} \times 5^2 = 250$$

(شیمی ۳- مولکول‌ها در خدمت تندرستی؛ صفحه‌های ۲۳ تا ۲۶)

۱۹۴- گزینهٔ «۳» *(امیرعلی برخورداریون)*

بررسی گزینه‌های نادرست:

گزینهٔ «۱»: HF ضعیف‌ترین اسید (کمترین K_a) و HI قوی‌ترین اسید (بیشترین K_a) در این مقایسه است.

گزینهٔ «۲»: طبق جدول صفحهٔ ۲۳ کتاب درسی کتاب شیمی ۳، ثابت یونش اسیدی $HCOOH$ از CH_3COOH بیش‌تر است و در دما و غلظت یکسان، $HCOOH$ یون بیش‌تری تولید می‌کند.

گزینهٔ «۴»: بازها کاغذ pH را آبی می‌کنند اما موادی که در ساختار آن‌ها گروه هیدروکسیل $(-OH)$ وجود دارد (الکل‌ها) الزاماً باز نیستند. طبق تعریف آرنیوس، باز ماده‌ای است که غلظت یون هیدروکسید در محلول را افزایش دهد.

(شیمی ۳- مولکول‌ها در خدمت تندرستی؛ صفحه‌های ۱۴، ۱۵، ۲۳ و ۲۶)

۱۹۵- گزینهٔ «۴» *(هادی قاسمی اسکندر)*

محلول ۲۰ درصد جرمی HA، یعنی ۲۰ گرم HA در ۱۰۰ گرم محلول حل شده است؛ غلظت محلول را حساب می‌کنیم:

$$\frac{20gHA}{100g\,\text{محلول}} \times \frac{1molHA}{216gHA} \times \frac{1/08g\,\text{محلول}}{1mL} \times \frac{1000mL}{1L} = 1mol.L^{-1}$$

راه پیشنهادی: برای به دست آوردن غلظت محلول از فرمول زیر نیز می‌توانیم استفاده کنیم:

$$M = \frac{10ad}{\text{جرم مولی}} \rightarrow M = \frac{10 \times 20 \times 1/08}{216} = 1mol.L^{-1}$$

سپس غلظت یون هیدرونیوم را از طریق غلظت اسید و درجهٔ یونش آن، محاسبه می‌کنیم:

$$[H^+] = M \times \alpha \rightarrow [H^+] = 1 \times 0/04 = 0/04 mol.L^{-1}$$

$$pH = -\log[H^+] \rightarrow pH = -\log 4 \times 10^{-2} = -(0/6 - 2) = 1/4$$

(شیمی ۳- مولکول‌ها در خدمت تندرستی؛ صفحه‌های ۱۹ تا ۲۴)

۱۹۶- **گزینهٔ «۳»** (محمدپارسا فراهانی)

گزینهٔ «۱»: در آخرین لایهٔ گونهٔ (III) که همان Zn^{2+} است ۱۸ الکترون وجود دارد.

گزینهٔ «۲»: (I)، اتم روی است که به عنوان کاهنده، اتم اکسیژن را می‌کاهد.

گزینهٔ «۳»: $O_2(g) + 4e^- \rightarrow 2O^{2-}(s)$

گزینهٔ «۴»: (II)، اکسیژن را نشان می‌دهد که نافلزی فعال است و در واکنش با بیشتر فلزها، آن‌ها را به اکسید بازی تبدیل می‌کند.

(شیمی ۳- آسایش و رفاه در سایهٔ شیمی: صفحه‌های ۳۹ تا ۴۲)

۱۹۷- **گزینهٔ «۱»** (علی جدی)

در سلول گالوانی روی- SHE, SHE کاتد است و در آن نیم‌واکنش $2H^+ + 2e^- \rightarrow H_2(g)$ رخ می‌دهد. با انجام این واکنش، غلظت یون‌های هیدروژن در محلول کاتدی کاهش یافته، در نتیجه pH محلول کاتدی افزایش می‌یابد. pH ابتدایی محلول کاتدی برابر صفر است:

$$pH = -\log[H^+] = -\log 1 = 0$$

با شروع کارکرد سلول، pH به ۰/۴ می‌رسد. در این صورت غلظت یون هیدروژن موجود در محلول برابر است با:

$$[H^+] = 10^{-pH} \rightarrow [H^+] = 10^{-0/4}$$

$$= 10^{-1} \times 10^{0/6} = (10^{0/3})^2 \times 10^{-1} = 4 \times 10^{-1} = 0/4 mol.L^{-1}$$

پس غلظت یون هیدروژن، از ۱ مولار به ۰/۴ مولار رسیده و ۰/۶ مولار از غلظت آن کم می‌شود. اکنون مقدار الکترون لازم برای مصرف این مقدار یون H^+ را محاسبه می‌کنیم:

$$?mole^- : 1L\text{محلول} \times \frac{0/6molH^+}{1L\text{محلول}} \times \frac{2mole^-}{2molH^+} = 0/6mole^-$$

در فرایند هال، کربن به کربن دی اکسید تبدیل می‌شود؛ یعنی عدد اکسایش آن از صفر در C، به ۴+ در CO_2 می‌رسد. در نتیجه در اثر تبدیل هر مول کربن به کربن دی‌اکسید، ۴ مول الکترون تولید می‌شود:

$$?LCO_2 = 0/6mole^- \times \frac{1molCO_2}{4mole^-} \times \frac{22/4LCO_2}{1molCO_2} = 3/36LCO_2$$

(شیمی ۳- ترکیبی: صفحه‌های ۲۴ تا ۲۶، ۴۴ تا ۴۶ و ۶۱)

۱۹۸- **گزینهٔ «۳»** (محمدرضا یوسفی)

واکنش انجام شده به صورت مقابل است:

$$2Al(s) + 3Cu^{2+}(aq) \rightarrow 2Al^{3+}(aq) + 3Cu(s)$$

تغییر جرم تیغه به ازای مصرف ۳ مول یون Cu^{2+} به صورت مقابل محاسبه می‌شود: (دقت کنید که با توجه به شرایط سؤال جرم تیغه نمی‌تواند ۱۲/۴۵ گرم کاهش یافته باشد و قطعاً افزایش یافته است.)

$$A = 3 \times 64 \times P - 2 \times 27$$

حال با توجه به اینکه رنگ آبی محلول کاملاً از بین رفته، در می‌یابیم که یون مس (II) به طور کامل مصرف شده است. بنابراین داریم:

$$0/15L\text{محلول} \times \frac{2/5molCu^{2+}}{1L\text{محلول}} \times \frac{A\text{تغییر جرم تیغه}}{3molCu^{2+}} = 12/45g \Rightarrow A = 99/6g$$

$$\rightarrow A = 99/6 \rightarrow P = 0/8$$

بنابراین ۸۰ درصد از مس تولیدی به تیغه چسبیده و ۲۰ درصد از آن در ته ظرف، ته‌نشین می‌شود.

(شیمی ۳- آسایش و رفاه در سایهٔ شیمی: صفحه‌های ۴۲ تا ۴۴)

۱۹۹- **گزینهٔ «۲»** (محمدحسن محمدزاده مقدم)

با توجه به واکنش‌های داده شده می‌توان نوشت:

$$V^{2+} + Pb^{2+} \rightarrow V^{3+} + Pb \Rightarrow \text{قدرت اکسندگی}: Pb^{2+} > V^{3+}$$

$$Cu^{2+} + Sn^{2+} \rightarrow Cu^+ + Sn^{4+} \Rightarrow \text{قدرت اکسندگی}: Cu^{2+} > Sn^{4+}$$

$$Sn^{4+} + Pb \rightarrow Sn^{2+} + Pb^{2+} \Rightarrow \text{قدرت اکسندگی}: Sn^{4+} > Pb^{2+}$$

بنابراین داریم:

$$\text{قدرت اکسندگی}: Cu^{2+} > Sn^{4+} > Pb^{2+} > V^{3+}$$

(شیمی ۳- آسایش و رفاه در سایهٔ شیمی: صفحه‌های ۴۶ تا ۴۷)

۲۰۰- **گزینهٔ «۲»** *(جهان شاهی‌بیگباغی)*

موارد اول، چهارم و پنجم درست هستند.

- emf سلول برابر با ۱/۱ ولت می‌باشد.

$$emf = E^\circ_{کاتد} - E^\circ_{آند} = 0/34 - (-0/76) = 1/1V$$

- جهت حرکت کاتیون‌ها به سمت کاتد (نیم سلول Cu) خواهد بود که قدرت کاهندگی کمتری نسبت به Zn دارد.
- ضریب استوکیومتری گونهٔ کاهنده (Zn)، نصف ضریب استوکیومتری گونهٔ اکسندهٔ (Cu^{2+}) در واکنش: $Sn^{2+} + 2Cu^{2+} \rightarrow Sn^{4+} + 2Cu^{+}$ می‌باشد.
- پس از مبادله $18/06\times10^{21}$ الکترون بین اکسنده و کاهنده، غلظت Cu^{2+} با توجه به محاسبات زیر برابر با ۰/۹۲۵ مولار خواهد بود:

$$\underset{2+}{Zn} + Cu^{2+} \xrightarrow{2e} Zn^{2+} + \underset{0}{Cu}$$

$$Cu^{2+}\ \text{مول مصرفی} = 18/06\times10^{21}e^- \times \frac{1mole^-}{6/02\times10^{23}e^-} \times \frac{1molCu^{2+}}{2mole^-} = 0/015molCu^{2+}$$

$$Cu^{2+}\ \text{مول باقی‌مانده} = \text{مول اولیه} - \text{مول مصرفی} = 0/2L\times1\frac{mol}{L} - 0/015 = 0/185molCu^{2+}$$

$$\Rightarrow M = \frac{0/185mol}{0/2L} = 0/925mol.L^{-1}$$

- نمودار تغییر غلظت یون‌ها، با توجه به ضرایب گونه‌ها در واکنش اکسایش- کاهش زیر، به یک نسبت خواهد بود.

$$Zn(s) + Cu^{2+}(aq) \rightarrow Zn^{2+}(aq) + Cu(s)$$

(شیمی ۳- آسایش و رفاه در سایهٔ شیمی: صفحه‌های ۴۵، ۴۷، ۴۸ و ۶۳)

۲۰۱- **گزینهٔ «۱»** *(رضا باسلیقه)*

همهٔ عبارت‌ها درست هستند.

عبارت (الف): در سلول سوختی هیدروژن-اکسیژن، با اکسایش گاز هیدروژن در آند، یون‌های هیدروژن و الکترون به سمت کاتد جریان می‌یابند.

عبارت (ب): ورودی و خروجی قسمت آندی، گاز H_2 می‌باشد در حالی که در قسمت کاتدی گاز O_2 وارد ولی $H_2O(g)$ خارج می‌شود.

عبارت (پ):

$$\frac{1}{2} = \frac{40\%}{80\%} = \frac{\text{اتلاف انرژی سلول سوختی}}{\text{اتلاف انرژی موتور درون‌سوز}} \Rightarrow \%60 = 100 \times \frac{0/738}{1/23} = \text{بازده}$$

عبارت (ت): نیم‌واکنش کاهش در سلول سوختی:

$$O_2(g) + 4H^+(aq) + 4e^- \rightarrow 2H_2O(l)$$

نیم‌واکنش کاهش در خوردگی آهن:

$$O_2(g) + 2H_2O(l) + 4e^- \rightarrow 4OH^-(aq)$$

(شیمی ۳- آسایش و رفاه در سایهٔ شیمی: صفحه‌های ۵۱ و ۵۷)

۲۰۲- **گزینهٔ «۱»** *(امیرعلی قاضی‌نیا)*

مورد دوم نادرست است.

در سلول‌های گالوانی به تدریج از جرم آند کاسته و بر جرم کاتد افزوده می‌شود.

(شیمی ۳- آسایش و رفاه در سایهٔ شیمی: صفحه‌های ۴۲، ۴۳، ۴۹ و ۵۴)

۲۰۳- **گزینهٔ «۲»** *(سینا رضادوست)*

در لولهٔ سمت راست هیدروژن و در لولهٔ سمت چپ اکسیژن تولید می‌شود:

$$2H_2O(l) \rightarrow 2H_2(g) + O_2(g)$$

با توجه به معادلهٔ کلی واکنش برقکافت آب، به ازای هر مول اکسیژن، ۲ مول هیدروژن آزاد می‌شود.

یعنی به ازای هر ۳۲ گرم اکسیژن، ۴ گرم هیدروژن داریم:

$$\frac{32}{4} = 8$$

بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینه‌های ۱ و ۳: در برقکافت (سلول الکترولیتی)، کاتد (الکترود متصل به قطب منفی) الکترون‌های رانده شده از باتری را به الکترولیت منتقل کرده و آند (الکترود متصل به قطب مثبت) الکترون‌ها را از الکترولیت گرفته و به باتری می‌دهد.

گزینهٔ «۴»: حجم گاز تولید شده در لولهٔ سمت راست، دو برابر حجم گاز تولید شده در لولهٔ سمت چپ است؛ پس لولهٔ سمت راست دارای گاز هیدروژن می‌باشد، اما این گاز در اطراف کاتد آزاد شده و کاتد به قطب منفی متصل است.

(شیمی ۳- آسایش و رفاه در سایهٔ شیمی: صفحهٔ ۵۴)

۲۰۴- **گزینهٔ «۲»** *(فرزاد رضایی)*

ابتدا تعیین می‌کنیم طی برقکافت سدیم کلرید چند مول سدیم به دست می‌آید:

واکنش موازنه شده: $2NaCl(l) \rightarrow 2Na(l) + Cl_2(g)$

$$?molNa = 142gCl_2 \times \frac{1molCl_2}{71gCl_2} \times \frac{2molNa}{1molCl_2} = 4molNa$$

اکنون محاسبه می‌کنیم که هر مول صابون RCOONa (R گروه آلکیلی است و برابر با $C_{12}H_{25}$) چند گرم جرم دارد:

$$(12\times12) + (25\times1) + (12 + 16\times2 + 23) = 144 + 25 + 67 = 236g.mol^{-1}$$

مقدار صابون به دست آمده برابر است با:

$$4molNa \times \frac{1molRCOONa}{1molNa} \times \frac{236gRCOONa}{1molRCOONa} = 944gRCOONa$$

(شیمی ۳- ترکیبی: صفحه‌های ۵ و ۶ و ۵۵)

۲۰۵- **گزینهٔ «۴»** (حامد اسماعیلی)

نیم‌واکنش اکسایش در فرایند هال: $2O^{2-}(l) \rightarrow O_2(g) + 4e^-$

(شیمی ۳- آسایش و رفاه در سایهٔ شیمی؛ صفحه‌های ۵۴، ۵۵ و ۵۷)

۲۰۶- **گزینهٔ «۴»** (محمدحسن محمدزاده مقدم)

معادله موازنه شده به صورت زیر است:

$$2Al_2O_3 + 3C \rightarrow 4Al + 3CO_2$$

کاهش جرم الکترود گرافیتی در آند به معنای مصرف آن است. بنابراین جرم گرافیت مصرف شده برابر است با:

$$\text{جرم گرافیت مصرف شده} = 1kg \times \frac{1000g}{1kg} \times \frac{60}{100} = 600g$$

$$?m^3CO_2 = 600gC \times \frac{1molC}{12gC} \times \frac{3molCO_2}{3molC} \times \frac{24LCO_2}{1molCO_2} \times \frac{1m^3}{1000L} = 1/2m^3CO_2$$

(شیمی ۳- آسایش و رفاه در سایهٔ شیمی؛ صفحهٔ ۶۱)

۲۰۷- **گزینهٔ «۳»** (طاهر خشک‌دامن)

$$?gZn = 2L\text{محلول} \times \frac{0/2molZnSO_4}{1L\text{محلول}} \times \frac{1molZn}{1molZnSO_4} \times \frac{65gZn}{1molZn} \times \frac{50}{100} = 13gZn$$

$$\text{تعداد قطعه آهن} = \frac{13}{0/05} = 260$$

(شیمی ۳- آسایش و رفاه در سایهٔ شیمی؛ صفحه‌های ۵۶ تا ۶۴)

۲۰۸- **گزینهٔ «۲»** (امیرحسین معروفی)

شکل صورت تست مربوط به حلبی است؛ زیرا در آن آهن با لایه‌ای از قلع پوشیده شده است. از آنجا که پتانسیل کاهش آهن از قلع کم‌تر است، A(aq) یون Fe^{2+} است و نیم‌واکنش کاهش در آن به‌صورت $O_2(g) + 2H_2O(l) + 4e^- \rightarrow 4OH^-(aq)$ می‌باشد. از این رو B(g) و C(aq) به ترتیب $O_2(g)$ و $OH^-(aq)$ می‌باشد.

(شیمی ۳- آسایش و رفاه در سایهٔ شیمی؛ صفحهٔ ۵۹)

۲۰۹- **گزینهٔ «۴»** (محمد پارسا فراهانی)

قطب A قطب منفی است که قاشق را به عنوان کاتد به آن متصل می‌کنیم و قطب B قطب مثبت است که تیغهٔ نقره را به عنوان آند به آن متصل می‌کنیم. الکترولیت مورد استفاده از نمک نقره است و جهت حرکت الکترون‌ها از تیغهٔ نقره به قاشق یعنی از قطب B به A است و در طول فرایند غلظت الکترولیت $[Ag^+]$، ثابت است. (رد گزینه‌های ۱ و ۲)

گزینهٔ «۳»: نیم‌واکنش کاتدی $Ag^+(aq) + \bar{e} \rightarrow Ag(s)$ است که در الکترود متصل به قطب (A) یعنی کاتد انجام می‌گیرد. (رد گزینهٔ ۳)

گزینهٔ «۴»: در فرایند هال تیغه‌های گرافیتی در آند خورده می‌شوند و در این فرایند نیز تیغهٔ نقره در آند خورده می‌شود.

(شیمی ۳- آسایش و رفاه در سایهٔ شیمی؛ صفحه‌های ۶۰ تا ۶۲)

۲۱۰- **گزینهٔ «۱»** (محمدحسین راستی بروجنی)

اگر شمار مول الکترون‌هایی که قرار است از محلول عبور کنند برابر ۱ در نظر گرفته شود، افزایش جرم قاشق در هر یک از محلول‌ها به این صورت است:

گزینهٔ «۱»:

$$Cr^{3+} + 3e^- \rightarrow Cr$$

$$1mole^- \times \frac{1molCr}{3mole^-} \times \frac{52gCr}{1molCr} \simeq 17/33gCr$$

گزینهٔ «۲»:

$$Ag^+ + e^- \rightarrow Ag$$

$$1mole^- \times \frac{1molAg}{1mole^-} \times \frac{108gAg}{1molAg} = 108gAg$$

گزینهٔ «۳»:

$$Cu^{2+} + 2e^- \rightarrow Cu$$

$$1mole^- \times \frac{1molCu}{2mole^-} \times \frac{64gCu}{1molCu} = 32gCu$$

گزینهٔ «۴»:

$$Sn^{2+} + 2e^- \rightarrow Sn$$

$$1mole^- \times \frac{1molSn}{2mole^-} \times \frac{119gSn}{1molSn} = 59/5gSn$$

(شیمی ۳- آسایش و رفاه در سایهٔ شیمی؛ صفحه‌های ۴۷ و ۶۰)