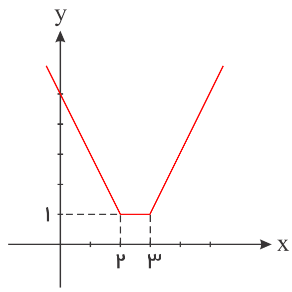
پاسخنامه تشریحی

۸۱ - گزینه ۱ **تابع داده‌شده یک تابع گلدانی است که در $x < 2$ اکیداً نزولی است.**



$$y = |x-2| + |x-3| \xrightarrow{x<2} y = -x+2-x+3 \rightarrow y = -2x+5$$

$$\begin{cases} f(x) = -2x+5 \\ g(x) = 2x^2 - x - 10 \end{cases} \xrightarrow{\text{تلاقی}} 2x^2 - x - 10 = -2x + 5 \rightarrow 2x^2 + x - 15 = 0$$

$$\xrightarrow{\Delta = b^2 - 4ac = 1+120 = 121} \begin{cases} x = \dfrac{-1+11}{4} = \dfrac{5}{2} \; (x<2 \text{ غ ق ق (با توجه به}) \\ x = \dfrac{-1-11}{4} = -3 \quad \text{ق ق} \end{cases} \rightarrow \text{در یک نقطه مشترک هستند.}$$

۸۲ - گزینه ۳

$$f(x) = \sqrt{x} \xrightarrow{\text{قرینه نسبت به محور } y \text{ ها}} g(x) = \sqrt{-x} \xrightarrow[\text{مثبت}]{\text{دو واحد به طرف } x \text{ های}} h(x) = \sqrt{-(x-2)} = \sqrt{-x+2}$$

$$\begin{cases} h(x) = \sqrt{-x+2} \\ y = x \end{cases} \xrightarrow{\text{تلاقی}} \sqrt{-x+2} = x \xrightarrow{\text{توان } 2} -x+2 = x^2 \rightarrow x^2 + x - 2 = 0$$

$$\rightarrow (x+2)(x-1) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = -2 & \text{غ‌ق‌ق (در معادله صدق نمی‌کند)} \\ x = 1 & \text{ق‌ق} \end{cases}$$

۸۳ - گزینه ۴ **روش اول:**

$$2x - 3 = t \rightarrow 2x = t + 3 \rightarrow x = \frac{t+3}{2}$$

$$\text{پس}: f(t) = 4\left(\frac{t+3}{2}\right)^2 - 14\left(\frac{t+3}{2}\right) + 13 \rightarrow f(t) = (t+3)^2 - 7(t+3) + 13$$

$$\rightarrow f(t) = t^2 + 9 + 6t - 7t - 21 + 13 \rightarrow f(t) = t^2 - t + 1 \rightarrow f(x) = x^2 - x + 1$$

روش دوم: یک عدد دلخواه مانند $x = 2$ را انتخاب می‌کنیم.

$$f(2x-3) = 4x^2 - 14x + 13 \xrightarrow{x=2} f(1) = 16 - 28 + 13 \rightarrow f(1) = 1$$

تنها گزینه‌ی چهارم است که اگر به جای x آن عدد یک قرار دهیم حاصل برابر یک می‌شود.

۸۴ - گزینه ۴ **روش اول:**

ابتدا دامنه‌ی تعریف دو تابع f , g را به‌دست می‌آوریم:

$$D_f : 3 - x \geq 0 \rightarrow x \leq 3$$

$$D_g : x^2 + 2x > 0 \rightarrow x(x+2) > 0 \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} x < -2 \text{ یا } x > 0$$

$$D_{fog} = \{x \in D_g \,,\, g(x) \in D_f\} = \{x < -2 \text{ یا } x > 0 \,,\, \log_2^{x^2+2x} \leq 3\}$$

$$= \{x < -2 \quad \text{یا} \quad x > 0 \,,\, x^2 + 2x \leq 2^3\} = \{x < -2 \quad \text{یا} \quad x > 0 \,,\, x^2 + 2x - 8 \leq 0\}$$

$$= \{x < -2 \quad \text{یا} \quad x > 0 \,,\, (x+4)(x-2) \leq 0\} = \{x < -2 \quad \text{یا} \quad x > 0 \,,\, -4 \leq x \leq 2\}$$

$$= -4 \leq x < -2 \quad \text{یا} \quad 0 < x \leq 2 \rightarrow [-4,-2) \cup (0,2]$$

البته می‌توانیم $fog(x)$ را تشکیل داده (تابع را ساده نکنید) سپس دامنه‌ی آن را به‌دست آورید.

روش دوم:

$x=-1$: در دامنه‌ی تعریف g قرار ندارد بنابراین در دامنه‌ی تعریف fog هم نباید باشد یعنی هر گزینه‌ای که $x=-1$ دارد نادرست است. پس فقط گزینه‌ی چهارم درست است.

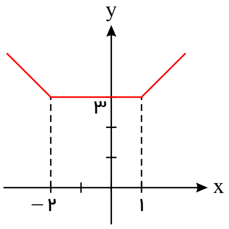
۸۵ - گزینه ۱ می‌دانیم: برای اینکه ۳ واحد به سمت x های مثبت منتقل شود باید به‌جای x عبارت $x-3$ و برای اینکه به طرف y های منفی منتقل شود باید به کل تابع عدد -2 اضافه شود؛ بنابراین داریم:

$$y=-(x-3)^2+2(x-3)+5-2=-x^2+6x-9+2x-6+3 \Rightarrow y=-x^2+8x-12$$

و برای اینکه این تابع بالای نیمساز ربع اول قرار گیرد باید:

$$-x^2+8x-12>x \Rightarrow x^2-7x+12<0 \Rightarrow (x-3)\cdot(x-4)<0 \Rightarrow 3<x<4$$

۸۶ - گزینه ۱ تابع داده‌شده یک تابع گلدانی است که در $x=-2$ و $x=1$ (ریشه‌های داخل قدرمطلق) دارای شکست است.



$\rightarrow x<-2$: اکیداً نزولی

۸۷ - گزینه ۴

$$2x-x^2\ge 0 \Rightarrow x(2-x)\ge 0 \Rightarrow$$

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
عبارت >0		$-$	0	$+$	0	$-$	

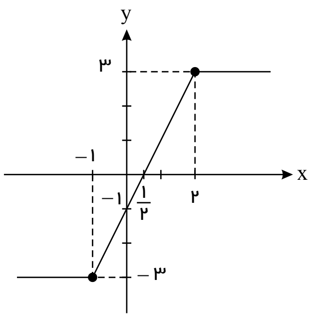
$$\Rightarrow 0\le x\le 2$$

حال برای پیدا کردن دامنهٔ $f(3-x)$ کافی است $3-x$ را بین صفر و ۲ قرار دهیم.

$$0\le 3-x\le 2 \Rightarrow -3\le -x\le -1 \Rightarrow 3\ge x\ge 1 \Rightarrow x\in[1,3]$$

البته می‌توانید ابتدا ضابطهٔ $f(3-x)$ را به‌دست آورید و سپس زیر رادیکال را بزرگ‌تر مساوی صفر قرار دهید.

۸۸ - گزینه ۳ تابع داده‌شده یک تابع سرسره‌ای (آبشاری) است که در $x=-1$ و $x=2$ (ریشه‌های داخل قدرمطلق) دارای شکست است.



$\longrightarrow -1<x<2$: اکیداً صعودی

۸۹ - گزینه ۱

$$y=x^2-x-3 \xrightarrow[x\to x+2]{\text{۲ واحد به چپ}} y=(x+2)^2-(x+2)-3 \xrightarrow{\text{۹ واحد پایین}} y=(x+2)^2-(x+2)-3-9$$

نمودار زیر محور xها قرار دارد یعنی باید نامعادلهٔ $y<0$ را حل کنیم.

$$y<0 \Rightarrow (x+2)^2-(x+2)-12<0 \Rightarrow x^2+4x+4-x-2-12<0$$

$$\Rightarrow x^2+3x-10<0 \Rightarrow (x-2)(x+5)<0 \Rightarrow -5<x<2 \Rightarrow x\in(-5,2)$$

۹۰ - گزینه ۲

$$f(x)=(x-1)^2 \xrightarrow{\text{قرینه نسبت به مبدأ}} g(x)=-(-x-1)^2 \xrightarrow{\text{۴ واحد به سمت بالا}} h(x)=-(-x-1)^2+4$$

تلاقی: $(x-1)^2=-(-x-1)^2+4 \rightarrow x^2+1-2x=-x^2-1-2x+4 \rightarrow 2x^2=2 \rightarrow x^2=1 \rightarrow x=1\ ,\ x=-1$

۹۱ - گزینه ۴ جلوی لگاریتم باید مثبت باشد و زیر رادیکال،باید بزرگ‌تر مساوی صفر باشد.

$$x-1>0 \rightarrow x>1 \quad (I)$$

$$1-\log(x-1)\ge 0 \rightarrow \log(x-1)\le 1 \rightarrow \log(x-1)\le \log 10 \rightarrow x-1\le 10 \rightarrow x\le 11 \quad (II)$$

از اشتراک I و II به جواب $1<x\le 11$ یا $x\in(1,11]$ می‌رسیم.

۹۲ - گزینه ۳

$$f=\{\,(x,2x-1)\ ,\ x\in A\,\} \Rightarrow f=\{\,(1,1)(2,3)(3,5)(4,7)(5,9)\,\}$$

$$\left.\begin{array}{r} f(f(x))=f(f(1))=f(1)=1\\ f(f(2))=f(3)=5\\ f(f(3))=f(5)=9\\ f(f(4))=f(7)=\varnothing\\ f(f(5))=f(9)=\varnothing \end{array}\right\}\rightarrow$$ شامل سه زوج مرتب است.

۹۳ - گزینه ۴ برای محاسبهٔ دامنهٔ توابع رادیکالی فرجهٔ زوج باید زیر رادیکال نامنفی باشد.

$x\cdot f(x)\geq 0\Rightarrow$ بازه‌هایی صحیح است که x و $f(x)$ هم‌علامت باشند

یعنی منحنی در ناحیه‌های اول و سوم باشد. لذا:

$$D_f=[-3,0]\cup[1,2]$$

۹۴ - گزینه ۳ ابتدا تابع $g(x)=2x-3$ را در داخل تابع $fog(x)$ می‌سازیم بنابراین داریم:

$$\begin{aligned}(fog)(x)&=4(x^2-4x+5)=4x^2-16x+20\\ &=4x^2-12x+9-4x+6+5\\ &=(2x-3)^2-2(2x-3)+5\\ &=g^2(x)-2g(x)+5\Rightarrow f(x)=x^2-2x+5\end{aligned}$$

راه حل تستی

قرار می دهیم $x=2$:

$$g(2)=4-3=1$$
$$f(g(2))=f(1)=4(4-8+5)=4$$

در گزینه ها تابعی را می یابیم که $f(1)=4$ باشد. اگر بیش از یک گزینه باقی ماند با یک عدد دیگر همین روند را تکرار می کنیم.

۹۵ - گزینه ۲

می‌دانیم: $[x]+[-x]=\begin{cases}0 & x\in\mathbb{Z}\\ -1 & x\notin\mathbb{Z}\end{cases}$

$$f(x)=\begin{cases}-1 & x\notin\mathbb{Z}\\ 0 & x\in\mathbb{Z}\end{cases}\Rightarrow g(f(x)):\begin{cases}x\notin\mathbb{Z}: & g(-1)=1-1-2=-2\\ x\in\mathbb{Z}: & g(0)=-2\end{cases}$$

پس به ازای هر عدد حقیقی برقرار است.

۹۶ - گزینه ۱

برای توابعی که چند رادیکال داخل هم دارند باید ابتدا دامنهٔ رادیکال‌های داخلی را بیابیم و سپس دامنهٔ رادیکال بزرگتر را تعیین کرده و بعد اشتراک بگیریم.

$$1-4x\geq 0\Rightarrow x\leq\frac{1}{4}\quad(1)$$

$$3-\sqrt{1-4x}\geq 0\Rightarrow\sqrt{1-4x}\leq 3\Rightarrow 1-4x\leq 9\Rightarrow 4x\geq -8\Rightarrow x\geq -2\quad(2)$$

$$(1)\cap(2)\Rightarrow x\in\left[-2,\frac{1}{4}\right]\xrightarrow{x\in\mathbb{Z}}x\in\{-2,-1,0\}$$

۹۷ - گزینه ۳ با توجه به ماشین داده شده $g(f(x))=x$ است یعنی $g(x)=f^{-1}(x)$.

$$f^{-1}(x)=\frac{x+1}{2}\Rightarrow f^{-1}(0)=\frac{1}{2}$$

۹۸ - گزینه ۳ ابتدا fog, gof را تشکیل می دهیم:

$$fog=\{(1,1),(3,7),(a,2),(b,7)\}\quad(4,2)\in fog\Rightarrow a=4$$

با توجه به این که $(4,1)$ در gof است پس $b=5$ است.

راه حل تشریح شده: ابتدا توابع fog و gof را بصورت زوج مرتب نشان می دهیم:

$$fog(x)=f(g(x))=\left\{\begin{array}{l} x=1\xrightarrow{g}2\xrightarrow{f}1\\ x=3\xrightarrow{g}1\xrightarrow{f}7\\ x=a\xrightarrow{g}3\xrightarrow{f}2\\ x=b\xrightarrow{g}1\xrightarrow{f}7\end{array}\right\}\rightarrow fog=\{(1,1)(3,7)(a,2)(b,7)\}$$

چون در صورت سؤال گفته $(4,2)\in fog$ پس $(a,2)=(4,2)\leftarrow a=4$

$$gof=g(f(x))=\left\{\begin{array}{l} x=2\xrightarrow{f}1\xrightarrow{g}2\\ x=3\xrightarrow{f}2\xrightarrow{g}?\\ x=4\xrightarrow{f}5\xrightarrow{g}?\\ x=1\xrightarrow{f}7\xrightarrow{g}?\end{array}\right.$$

در سؤال گفته $(4,1)\in gof$ پس $x=4\xrightarrow{f}\underbrace{5\xrightarrow{g}1}_{(b,1)\in g}$ در نتیجه $b=5$

۹۹ - گزینه ۲

$g(x) = ۲x - ۱, (fog)(x) = \frac{x}{x-۳} \Rightarrow f(g(x)) = \frac{x}{x-۳}$

$g(x) = ۳ \Rightarrow ۲x - ۱ = ۳ \Rightarrow x = ۲$

$f(g(x)) = \frac{x}{x-۳} \xrightarrow{g(x)=۳, x=۲} f(۳) = \frac{۲}{۲-۳} = -۲$

۱۰۰ - گزینه ۳ با توجه به ماشین داده شده جملهٔ $(۲x-۲)$ داخل xهای تابع $\frac{x}{\sqrt{x}+۱}$ قرار می‌گیرد بنابراین:

$\frac{۲x-۲}{\sqrt{۲x-۲}+۱} = \frac{۴}{۳} \Rightarrow ۳(x-۱) = ۲(\sqrt{۲(x-۱)}+۱) \xrightarrow{\sqrt{x-۱}=t} ۳t^۲ = ۲(t\sqrt{۲}+۱) \Rightarrow ۳t^۲ - ۲t\sqrt{۲} - ۲ = ۰$

$t = \sqrt{۲} \Rightarrow \sqrt{x-۱} = \sqrt{۲} \Rightarrow x = ۳$

پاسخنامه تشریحی

۱۰۱ - گزینه ۲ روش اول:

$$A^{۲} = \begin{bmatrix} -۲ & ۱ \\ ۵ & ۴ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -۲ & ۱ \\ ۵ & ۴ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۹ & ۲ \\ ۱۰ & ۲۱ \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} ۹ & ۲ \\ ۱۰ & ۲۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -۲\alpha & \alpha \\ ۵\alpha & ۴\alpha \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta & ۰ \\ ۰ & \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -۲\alpha+\beta & \alpha \\ ۵\alpha & ۴\alpha+\beta \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = ۲ \\ \beta = ۱۳ \end{cases}$$

روش دوم: هر ماتریس ۲ × ۲ مثل A در رابطه‌ی زیر صدق می‌کند.

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \Rightarrow A^{۲} - (a+d)\,A + |A|\,I = ۰$$

$$A = \begin{bmatrix} -۲ & ۱ \\ ۵ & ۴ \end{bmatrix} \Rightarrow A^{۲} - ۲A - ۱۳I = ۰ \Rightarrow A^{۲} = ۲A + ۱۳I \Rightarrow \alpha = ۲, \beta = ۱۳$$

۱۰۲ - گزینه ۴ ابتدا درایه‌های ماتریس A را بدست می‌آوریم.

$$A = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۲ \\ ۲ & ۱ & ۲ \\ ۲ & ۲ & ۱ \end{bmatrix} \Rightarrow A^{۲} = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۲ \\ ۲ & ۱ & ۲ \\ ۲ & ۲ & ۱ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۲ \\ ۲ & ۱ & ۲ \\ ۲ & ۲ & ۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۹ & ۸ & ۸ \\ ۸ & ۹ & ۸ \\ ۸ & ۸ & ۹ \end{bmatrix}$$

$$A^{۲} - ۴A = \begin{bmatrix} ۹ & ۸ & ۸ \\ ۸ & ۹ & ۸ \\ ۸ & ۸ & ۹ \end{bmatrix} - ۴\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۲ \\ ۲ & ۱ & ۲ \\ ۲ & ۲ & ۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۵ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۵ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۵ \end{bmatrix} = ۵I$$

۱۰۳ - گزینه ۱

$$\begin{bmatrix} ۵ & -۲ \\ ۴ & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{۱} \\ b_{۲} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۴b_{۱} \\ ۴b_{۲} \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} ۵b_{۱} - ۲b_{۲} \\ ۴b_{۱} + ab_{۲} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۴b_{۱} \\ ۴b_{۲} \end{bmatrix}$$

پس:

$$\to \begin{cases} ۵b_{۱} - ۲b_{۲} = ۴b_{۱} \to b_{۱} = ۲b_{۲} \\ ۴b_{۱} + ab_{۲} = ۴b_{۲} \xrightarrow{b_{۱} = ۲b_{۲}} ۸b_{۲} + ab_{۲} = ۴b_{۲} \to ۸ + a = ۴ \to a = -۴ \end{cases}$$

۱۰۴ - گزینه ۳

$$A = \begin{bmatrix} ۱+۱ & ۱-۲ & ۱-۳ \\ ۲+۱ & ۲+۲ & ۲-۳ \\ ۳+۱ & ۳+۱ & ۳+۳ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۲ & -۱ & -۲ \\ ۳ & ۴ & -۱ \\ ۴ & ۴ & ۶ \end{bmatrix}$$

۱۹ = مجموع درایه‌ها

۱۰۵ - گزینه ۴

$$\begin{bmatrix} \sin^{۲}۳۷^\circ & -\sin ۳۷^\circ \cos ۳۷^\circ \\ \sin ۳۷^\circ \cos ۳۷^\circ & \sin^{۲}۳۷^\circ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos^{۲}۳۷^\circ & \sin ۳۷^\circ \cos ۳۷^\circ \\ -\sin ۳۷^\circ \cos ۳۷^\circ & \cos^{۲}۳۷^\circ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin^{۲}۳۷^\circ + \cos^{۲}۳۷^\circ & ۰ \\ ۰ & \sin^{۲}۳۷^\circ + \cos^{۲}۳۷^\circ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix} = I$$

۱۰۶ - گزینه ۳ روش اول:

$$\left.\begin{aligned} \begin{vmatrix} ۳ & ۲ & a \\ ۴ & -۲ & ۷ \\ ۰ & ۵ & ۶ \end{vmatrix} &= ۲۰a - ۱۸۹ \\ \begin{vmatrix} ۳ & ۲ & a \\ ۵ & -۱ & ۸ \\ ۰ & ۵ & ۶ \end{vmatrix} &= ۲۵a - ۱۹۸ \end{aligned}\right\} \xrightarrow[\text{فرض سوال}]{\text{با توجه به}} (۲۰a - ۱۸۹) + ۶ = ۲۵a - ۱۹۸ \Rightarrow ۵a = ۱۵ \Rightarrow a = ۳$$

۱۰۷ - گزینه ۳ حاصل دترمینان را با بسط دادن نسبت به سطر اول محاسبه می‌کنیم.

$$\begin{vmatrix} ۰ & x-۳ & x-۲ \\ x+۳ & ۰ & -۴ \\ x+۲ & ۶ & ۰ \end{vmatrix} = -(x-۳)(۴x+۸) + (x-۲)(۶x+۱۸) = ۰$$

$$\Rightarrow -۴x^{۲} - ۸x + \cancel{۱۲x} + ۲۴ + ۶x^{۲} + ۱۸x - \cancel{۱۲x} - ۳۶ = ۰$$

$$\Rightarrow ۲x^{۲} + ۱۰x - ۱۲ = ۰ \Rightarrow x^{۲} + ۵x - ۶ = ۰ \Rightarrow x = ۱, x = -۶$$

پس گزینهٔ ۳ درست است.

۱۰۸ - گزینه ۲

$$||۳B|A| = |۳^{۳}|B|A| = (۳^{۳})^{۲}|B|^{۲}|A| = ۳^{۶} \times ۲^{۲} \times ۳ = ۳^{۷} \times ۲^{۲}$$

۱۰۹ - گزینه ۲

$$|۲A| = \begin{vmatrix} |A| & -۲ \\ ۲ & |A| \end{vmatrix}$$

$$۴\,|A| = |A|^{۲} + ۴ \to |A|^{۲} - ۴\,|A| + ۴ = ۰ \to (|A| - ۲)^{۲} = ۰ \Rightarrow |A| = ۲$$

۱۱۰ - گزینه ۲

– نکته: اگر $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ و $|A| \neq ۰$

وارون ماتریس A از دستور

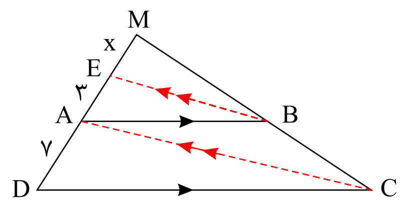
$A^{-۱} = \dfrac{۱}{ad - bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$ حاصل می‌گردد.

– نکته: اگر A وارون‌پذیر باشد، آنگاه $AA^{-۱} = A^{-۱}A = I$

$$AX = A - ۲I \xrightarrow[\text{از چپ}]{\text{طرفین} \times A^{-۱}} A^{-۱}AX = A^{-۱}(A - ۲I) \Rightarrow IX = A^{-۱}A - ۲A^{-۱}I$$

$$\Rightarrow X = I - ۲A^{-۱} = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix} - ۲ \times \frac{۱}{۶ - ۴}\begin{bmatrix} ۳ & -۱ \\ -۴ & ۲ \end{bmatrix} \Rightarrow X = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ۳ & -۱ \\ -۴ & ۲ \end{bmatrix} \Rightarrow X = \begin{bmatrix} -۲ & ۱ \\ ۴ & -۱ \end{bmatrix}$$

۱۱۱ - گزینه ۲ کافی است دو بار از قضیه‌ی تالس استفاده کنیم:



$$\begin{cases} M\overset{\Delta}{A}C : BE \| AC \xrightarrow{\text{تالس}} \dfrac{ME}{AE} = \dfrac{MB}{BC} \\ M\overset{\Delta}{D}C : AB \| CD \xrightarrow{\text{تالس}} \dfrac{MA}{AD} = \dfrac{MB}{BC} \end{cases} \Rightarrow \frac{ME}{AE} = \frac{MA}{AD}$$

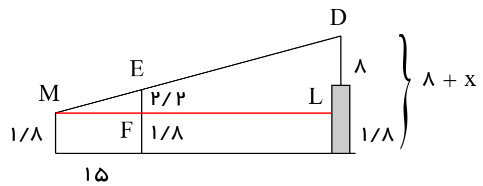
$$\Rightarrow \frac{x}{۳} = \frac{x + ۳}{۷} \Rightarrow ۷x = ۳x + ۹ \Rightarrow ۴x = ۹ \Rightarrow x = ۲٫۲۵$$

در نتیجه: $MD = ۲٫۲۵ + ۳ + ۷ = ۱۲٫۲۵$

۱۱۲ - گزینه ۲ ازنقطهٔ M خطی موازی سطح افق رسم کرده باتوجه به شکل و قضیه‌ی تالس داریم:

$$EF \parallel DL \Rightarrow \frac{EF}{DL} = \frac{MF}{ML} \Rightarrow \frac{۲٫۲}{۸ + x - ۱٫۸} = \frac{۱۵}{۱۸۰} = \frac{۱}{۱۲} \Rightarrow x = ۲۰٫۲$$

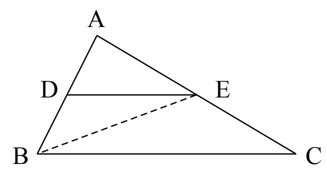
طول برج $= x$



۱۱۳ - گزینه ۲ در دو مثلث با ارتفاع های یکسان نسبت مساحت‌ها برابر نسبت قاعده‌هاست.

$$\frac{S_{EBC}}{S_{AEB}} = \frac{EC}{AE} = \frac{BD}{AD} = \frac{۵}{۴}$$

$$\frac{S_{EBD}}{S_{AEB}} = \frac{BD}{AB} = \frac{۵}{۹}$$

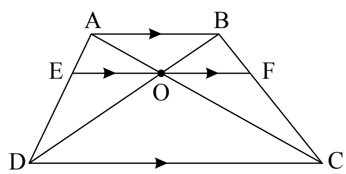


دو رابطه‌ی فوق را بر هم تقسیم می‌کنیم:

$$\frac{\dfrac{S_{EBC}}{S_{AEB}}}{\dfrac{S_{EBD}}{S_{AEB}}} = \frac{\frac{۵}{۴}}{\frac{۵}{۹}} \Rightarrow \frac{S_{EBC}}{S_{EBD}} = \frac{۹}{۴} = ۲٫۲۵$$

۱۱۴ - گزینه ۱

$$\left.\begin{aligned} D\overset{\Delta}{A}B : OE \| AB &\Rightarrow \frac{DE}{DA} = \frac{OE}{AB} \\ A\overset{\Delta}{B}C : OF \| AB &\Rightarrow \frac{CF}{CB} = \frac{OF}{AB} \\ AB \| EF \| DC &\Rightarrow \frac{DE}{DA} = \frac{CF}{CB} \end{aligned}\right\} \Rightarrow OE = OF$$

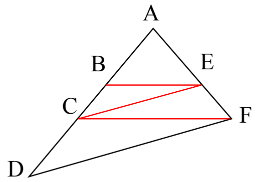


هندسه

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l} \overset{\Delta}{BDC}: OF||DC \xrightarrow{\text{تالس}} \dfrac{BF}{BC}=\dfrac{OF}{DC} \\ DC||AB||EF \Rightarrow \dfrac{BF}{BC}=\dfrac{AE}{AD}\end{array}\right\} \Rightarrow \dfrac{OF}{DC}=\dfrac{AE}{AD} \\ \overset{\Delta}{ABD}: OE||AB \Rightarrow \dfrac{OE}{AB}=\dfrac{DE}{AD}\end{array}\right\} \xrightarrow[\text{را جمع می‌کنیم}]{\text{طرفین دو تساوی}} \frac{OF}{DC}+\frac{OE}{AB}=\frac{AE+DE}{AD}=\frac{AD}{AD}=۱ \xrightarrow{(۱)} \frac{OF}{DC}+\frac{OF}{AB}=۱$$

$$\Rightarrow OF(\frac{۱}{DC}+\frac{۱}{AB})=۱ \Rightarrow \frac{۱}{OF}=\frac{۱}{DC}+\frac{۱}{AB} \Rightarrow \frac{۱}{\frac{EF}{۲}}=\frac{۱}{DC}+\frac{۱}{AB} \Rightarrow \frac{۲}{EF}=\frac{۱}{DC}+\frac{۱}{AB} \Rightarrow \frac{۲}{EF}=\frac{۱}{۹}+\frac{۱}{۵} \Rightarrow \frac{۲}{EF}=\frac{۱۴}{۴۵} \Rightarrow EF=\frac{۴۵}{۷}$$

۱۱۵ - گزینه ۲ اگر CD را برابر x در نظر بگیریم داریم:



$$\left\{\begin{array}{l} BE||CF \Rightarrow \dfrac{AB}{AC}=\dfrac{AE}{AF} \\ CE||DF \Rightarrow \dfrac{AE}{AF}=\dfrac{AC}{AD}\end{array}\right. \Rightarrow \frac{AB}{AC}=\frac{AC}{AD} \Rightarrow AC^{۲}=AB\times AD \Rightarrow ۸^{۲}=۵AD \Rightarrow AD=\frac{۶۴}{۵}$$

$$CD=AD-AC=\frac{۶۴}{۵}-۸=\frac{۲۴}{۵}=۴٫۸$$

۱۱۶ - گزینه ۱ از قضیهٔ عکس تالس کمک می‌گیریم:

$$BC||EF \xrightarrow{\text{جزء به کل}} \frac{۴}{۴+y}=\frac{x+۱}{y+x+۱}=\frac{y^{۲}}{y^{۲}+۵-x}$$

تساوی اول را حل می‌کنیم که ساده‌تر است.

$$\xrightarrow{\text{طرفین وسطین}} ۴y+۴x+۴=۴x+۴+xy+y \Rightarrow ۳y=xy \Rightarrow x=۳$$

برای ساده‌تر بودن محاسبات از جزء به جزء استفاده می‌کنیم:

$$\Rightarrow \frac{۴}{y}=\frac{y^{۲}}{۵-x} \xrightarrow{x=۳} ۸=y^{۳} \Rightarrow y=۲$$

بنابراین: $y-۲x=۲-۲(۳)=-۴$

۱۱۷ - گزینه ۲ چون بیشترین مقدار ممکن برای عدد a را می‌خواهیم، لذا a با بزرگ‌ترین ضلع از مثلث دوم متناسب است. حالات زیر را در نظر می‌گیریم:

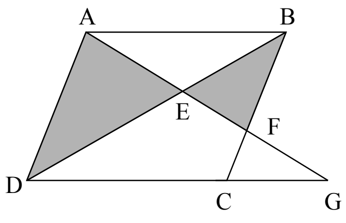
$$b<۷<۹ \Rightarrow \frac{a}{۹}=\frac{۵}{۷}=\frac{۴}{b} \Rightarrow a=\frac{۴۵}{۷}, b=\frac{۲۸}{۵}$$

$$۷<b<۹ \Rightarrow \frac{a}{۹}=\frac{۵}{b}=\frac{۴}{۷} \Rightarrow a=\frac{۳۶}{۷}, b=\frac{۳۵}{۴}$$

$$۷<۹<b \Rightarrow \frac{a}{b}=\frac{۵}{۹}=\frac{۴}{۷} \Rightarrow \text{غیر قابل قبول}$$

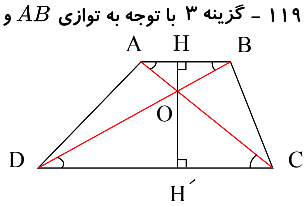
بنابراین بیشترین مقدار a برابر با $\frac{۴۵}{۷}$ می‌باشد.

۱۱۸ - گزینه ۱



$$\left.\begin{array}{l} \overset{\Delta}{ADE}\sim\overset{\Delta}{BEF} \xrightarrow{\text{تناسب اضلاع}} \dfrac{BE}{DE}=\dfrac{EF}{EA} \\ \overset{\Delta}{ABE}\sim\overset{\Delta}{DEG} \xrightarrow{\text{تناسب اضلاع}} \dfrac{BE}{DE}=\dfrac{EA}{EG}\end{array}\right\} \Rightarrow \frac{EF}{EA}=\frac{EA}{EG} \Rightarrow EF\times EG=EA^{۲}$$

۱۱۹ - گزینه ۳ با توجه به توازی AB و CD و مورب بودن قطرها، مطابق شکل $\widehat{A}=\widehat{C}$ و $\widehat{B}=\widehat{D}$ و در نتیجه مثلث های AOB و OCD متشابه‌اند. بنابراین داریم:

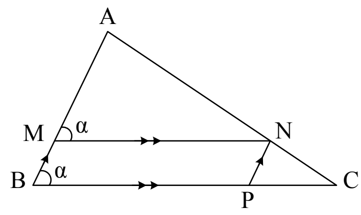


$$\frac{OH}{OH'}=\frac{AB}{CD} \xrightarrow{CD=۲AB} \frac{OH}{OH'}=\frac{۱}{۲} \Rightarrow \frac{OH}{OH'+OH}=\frac{۱}{۲+۱}$$

$$\Rightarrow \frac{OH}{HH'}=\frac{۱}{۳} \Rightarrow HH'=۳OH$$

$$\frac{S_{ABCD}}{S_{\overset{\Delta}{OAB}}}=\frac{\frac{۱}{۲}(AB+CD)\times HH'}{\frac{۱}{۲}AB\times OH}=\frac{(AB+۲AB)\times ۳OH}{AB\times OH}=\frac{۹AB\times OH}{AB\times OH}=۹$$

۱۲۰ - گزینه ۲



$$S_{\overset{\Delta}{AMN}} = ۲S_{MNPB} \Rightarrow \frac{۱}{۲}AM \times \cancel{MN} \times \cancel{\sin}\alpha = ۲MB \times \cancel{BP} \times \cancel{\sin}\alpha \Rightarrow \frac{AM}{MB} = ۴$$

$$\overset{\Delta}{ABC} : MN || BC \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{NC}{AN} = \frac{MB}{AM} = \frac{۱}{۴}$$

پاسخنامه تشریحی

۱۲۱ - گزینه ۲ به ازای $x = 13, y = 0$؛ $\sqrt{13 + 0} = \sqrt{13} + \sqrt{0}$ پس این مثال حکم را رد نمی‌کند.

۱۲۲ - گزینه ۲ به ازای $x = 13, y = 0$؛ $\sqrt{13 + 0} = \sqrt{13} + \sqrt{0}$ پس این مثال حکم را رد نمی‌کند.

۱۲۳ - گزینه ۱

$$627 = 3 \times 11 \times 19 \quad , \quad 429 = 3 \times 11 \times 13$$

$$(627, 429) = (3 \times 11 \times 19\,,\, 3 \times 11 \times 13) \xlongequal{\text{پایه‌هاي مشترک با توان کمتر}} 3 \times 11 = 33$$

$$[(627, 429), 154] = [33, 154] = [3 \times 11\,,\, 2 \times 7 \times 11] \xlongequal[\text{پایه‌هاي غیرمشترک}]{\text{پایه‌هاي مشترک با توان بیشتر} \times} 2 \times 3 \times 7 \times 11 = 462$$

۱۲۴ - گزینه ۱

$$627 = 3 \times 11 \times 19 \quad , \quad 429 = 3 \times 11 \times 13$$

$$(627, 429) = (3 \times 11 \times 19\,,\, 3 \times 11 \times 13) \xlongequal{\text{پایه‌هاي مشترک با توان کمتر}} 3 \times 11 = 33$$

$$[(627, 429), 154] = [33, 154] = [3 \times 11\,,\, 2 \times 7 \times 11] \xlongequal[\text{پایه‌هاي غیرمشترک}]{\text{پایه‌هاي مشترک با توان بیشتر} \times} 2 \times 3 \times 7 \times 11 = 462$$

۱۲۵ - گزینه ۲

$$(25n + 9, 11n + 4) = d \Rightarrow \begin{cases} d|25n + 9 \\ d|11n + 4 \end{cases} \xrightarrow[\times 25]{\times -11} d| -11(25n + 9) + 25(11n + 4) \Rightarrow d|1 \xrightarrow{\text{فقط}} d = 1$$
$$\Rightarrow (11n + 4, 25n + 9) = 1$$

پس دو عدد $11n + 4$ و $25n + 9$ همواره نسبت به هم اولند و همه ی اعداد دو رقمی قابل قبولند.

۱۲۶ - گزینه ۲

$$(25n + 9, 11n + 4) = d \Rightarrow \begin{cases} d|25n + 9 \\ d|11n + 4 \end{cases} \xrightarrow[\times 25]{\times -11} d| -11(25n + 9) + 25(11n + 4) \Rightarrow d|1 \xrightarrow{\text{فقط}} d = 1$$
$$\Rightarrow (11n + 4, 25n + 9) = 1$$

پس دو عدد $11n + 4$ و $25n + 9$ همواره نسبت به هم اولند و همه ی اعداد دو رقمی قابل قبولند.

۱۲۷ - گزینه ۱

نکته: در اثبات برخی نامساوی‌ها یا تساوی‌های ریاضی، حکم را آنقدر ساده می‌کنیم تا به یک عبارت همیشه درست برسیم، حال اگر مسیر طی شده برگشت‌پذیر باشد، به این روش اثبات بازگشتی می‌گوییم.

$x^2 + 5y^2 + z^2 + 5 \geq 4xy + 4z + 2y \Leftrightarrow x^2 + 4y^2 - 4xy + y^2 - 2y + 1 + z^2 - 4z + 4 \geq 0 \Leftrightarrow (x - 2y)^2 + (y - 1)^2 + (z - 2)^2 \geq 0$ این رابطه همواره. درست است

۱۲۸ - گزینه ۱

نکته: در اثبات برخی نامساوی‌ها یا تساوی‌های ریاضی، حکم را آنقدر ساده می‌کنیم تا به یک عبارت همیشه درست برسیم، حال اگر مسیر طی شده برگشت‌پذیر باشد، به این روش اثبات بازگشتی می‌گوییم.

$x^2 + 5y^2 + z^2 + 5 \geq 4xy + 4z + 2y \Leftrightarrow x^2 + 4y^2 - 4xy + y^2 - 2y + 1 + z^2 - 4z + 4 \geq 0 \Leftrightarrow (x - 2y)^2 + (y - 1)^2 + (z - 2)^2 \geq 0$ این رابطه همواره. درست است

۱۲۹ - گزینه ۳ تمام مقسوم‌علیه‌های صحیح ۴۵ به‌صورت زیر می‌باشد:

$$\pm 1\,,\ \pm 3\,,\ \pm 5\,,\ \pm 9\,,\ \pm 15\,,\ \pm 45$$

از بین اعداد فوق باید آنهایی را پیدا کنیم که در رابطهٔ $a \nmid 30$ صدق کنند، بنابراین داریم:

$$a \in \{9\,,\ -9\,,\ 45\,,\ -45\}$$

۱۳۰ - گزینه ۳ تمام مقسوم‌علیه‌های صحیح ۴۵ به‌صورت زیر می‌باشد:

$$\pm 1\,,\ \pm 3\,,\ \pm 5\,,\ \pm 9\,,\ \pm 15\,,\ \pm 45$$

از بین اعداد فوق باید آنهایی را پیدا کنیم که در رابطهٔ $a \nmid 30$ صدق کنند، بنابراین داریم:

$$a \in \{9\,,\ -9\,,\ 45\,,\ -45\}$$

۱۳۱ - گزینه ۴

$$۱۲۶ = ۵^۳ + ۱ \quad \Rightarrow \quad ۵^۳ + ۱ \Big| ۵^n + ۱$$

$a^n + b^n$ به شرطی بر $a^x + b^x$ بخش‌پذیر است که $\frac{n}{x}$ فرد باشد پس:

$$a^x + b^x \, | a^n + b^n \; ; \; (\frac{n}{a} = \text{طبیعی و فرد})$$

$$\frac{n}{۳} = ۲k + ۱ \Rightarrow n = ۶k + ۳$$

$$۱ \le n < ۵۰ \Rightarrow ۱ \le ۶k + ۳ < ۵۰ \Rightarrow \frac{-۱}{۳} \le k < \frac{۴۷}{۶} \Rightarrow k = ۰, ۱, \cdots, ۷$$

پس n نیز هشت مقدار مختلف قابل قبول دارد.

۱۳۲ - گزینه ۴

$$۱۲۶ = ۵^۳ + ۱ \quad \Rightarrow \quad ۵^۳ + ۱ \Big| ۵^n + ۱$$

$a^n + b^n$ به شرطی بر $a^x + b^x$ بخش‌پذیر است که $\frac{n}{x}$ فرد باشد پس:

$$a^x + b^x \, | a^n + b^n \; ; \; (\frac{n}{a} = \text{طبیعی و فرد})$$

$$\frac{n}{۳} = ۲k + ۱ \Rightarrow n = ۶k + ۳$$

$$۱ \le n < ۵۰ \Rightarrow ۱ \le ۶k + ۳ < ۵۰ \Rightarrow \frac{-۱}{۳} \le k < \frac{۴۷}{۶} \Rightarrow k = ۰, ۱, \cdots, ۷$$

پس n نیز هشت مقدار مختلف قابل قبول دارد.

۱۳۳ - گزینه ۱

$$۲xy + y - ۳x + ۲ = ۰ \Rightarrow y = \frac{۳x - ۲}{۲x + ۱}$$

برای اینکه y صحیح باشد، باید $۲x + ۱ \,|\, ۳x - ۲$ از طرفی داریم:

$$\begin{cases} ۲x + ۱ \,|\, (۳x - ۲) \times ۲ \\ ۲x + ۱ \,|\, (۲x + ۱) \times ۳ \end{cases} \Rightarrow ۲x + ۱ \,|\, (۶x + ۳) - (۶x - ۴)$$

$$\Rightarrow ۲x + ۱ \,|\, ۷ \Rightarrow ۲x + ۱ \in \{۱\,,\, -۱\,,\, ۷\,,\, -۷\} \Rightarrow x \in \{۰\,,\, -۱\,,\, ۳\,,\, -۴\}$$

۱۳۴ - گزینه ۱

$$۲xy + y - ۳x + ۲ = ۰ \Rightarrow y = \frac{۳x - ۲}{۲x + ۱}$$

برای اینکه y صحیح باشد، باید $۲x + ۱ \,|\, ۳x - ۲$ از طرفی داریم:

$$\begin{cases} ۲x + ۱ \,|\, (۳x - ۲) \times ۲ \\ ۲x + ۱ \,|\, (۲x + ۱) \times ۳ \end{cases} \Rightarrow ۲x + ۱ \,|\, (۶x + ۳) - (۶x - ۴)$$

$$\Rightarrow ۲x + ۱ \,|\, ۷ \Rightarrow ۲x + ۱ \in \{۱\,,\, -۱\,,\, ۷\,,\, -۷\} \Rightarrow x \in \{۰\,,\, -۱\,,\, ۳\,,\, -۴\}$$

۱۳۵ - گزینه ۲

$$q = r^۲$$
$$۱۶۵ = br^۲ + r \;,\; ۰ \le r < b$$
$$\begin{cases} r\,(br + ۱) = ۱۶۵ = ۵ \times ۳ \times ۱۱ \\ r < b \end{cases}$$

واضح است r مقسوم علیه طبیعی ۱۶۵ می باشد چون $۱۶۵ = ۵ \times ۳ \times ۱۱$ پس:

$$\begin{array}{llll} r = ۱ & \Rightarrow b \times ۱ + ۱ = ۱۶۵ & \Rightarrow b = ۱۶۴ & \\ r = ۳ & \Rightarrow b \times ۳ + ۱ = ۵۵ & \Rightarrow b = ۱۸ & \\ r = ۵ & \Rightarrow b \times ۵ + ۱ = ۳۳ & \Rightarrow b = \frac{۳۲}{۵} & \text{غ ق ق} \\ r = ۱۱ & \Rightarrow b \times ۱۱ + ۱ = ۱۵ & \Rightarrow b = \frac{۱۴}{۱۱} & \text{غ ق ق} \end{array}$$

فقط دو مورد قابل قبول است.

۱۳۶ - گزینه ۲

$$q = r^۲$$
$$۱۶۵ = br^۲ + r \;,\; ۰ \le r < b$$
$$\begin{cases} r\,(br + ۱) = ۱۶۵ = ۵ \times ۳ \times ۱۱ \\ r < b \end{cases}$$

واضح است r مقسوم علیه طبیعی ۱۶۵ می باشد چون $۱۶۵ = ۵ \times ۳ \times ۱۱$ پس:

$$\begin{array}{llll} r = ۱ & \Rightarrow b \times ۱ + ۱ = ۱۶۵ & \Rightarrow b = ۱۶۴ & \\ r = ۳ & \Rightarrow b \times ۳ + ۱ = ۵۵ & \Rightarrow b = ۱۸ & \\ r = ۵ & \Rightarrow b \times ۵ + ۱ = ۳۳ & \Rightarrow b = \frac{۳۲}{۵} & \text{غ ق ق} \\ r = ۱۱ & \Rightarrow b \times ۱۱ + ۱ = ۱۵ & \Rightarrow b = \frac{۱۴}{۱۱} & \text{غ ق ق} \end{array}$$

فقط دو مورد قابل قبول است.

۱۳۷ - گزینه ۴

می دانیم در قضیه تقسیم $a=bq+r$ باید $0\le r\le b$ باشد. بنابراین:

$r=q^2-2$

$a=37q+q^2-2$

$0\le r\le b \Rightarrow q^2-2<37 \Rightarrow q^2<39$

$\xrightarrow{q\in Z} \max(q)=6 \Rightarrow \max(a)=37\times 6+6^2-2=222+34=256=16^2$

۱۳۸ - گزینه ۴

می دانیم در قضیه تقسیم $a=bq+r$ باید $0\le r\le b$ باشد. بنابراین:

$r=q^2-2$

$a=37q+q^2-2$

$0\le r\le b \Rightarrow q^2-2<37 \Rightarrow q^2<39$

$\xrightarrow{q\in Z} \max(q)=6 \Rightarrow \max(a)=37\times 6+6^2-2=222+34=256=16^2$

۱۳۹ - گزینه ۱ چون a عددی فرد است پس عامل ۲ ندارد؛ بنابراین $5a$ هم مضرب ۲ نیست چون $b|5a$ پس b هم زوج نیست، می‌دانیم که مربع هر عدد فرد به فرم $8q+1$ است، داریم:

$a^2+3b^2+4=8q+1+3(8k+1)+4=8k'+8=8k''$

۱۴۰ - گزینه ۱ چون a عددی فرد است پس عامل ۲ ندارد؛ بنابراین $5a$ هم مضرب ۲ نیست چون $b|5a$ پس b هم زوج نیست، می‌دانیم که مربع هر عدد فرد به فرم $8q+1$ است، داریم:

$a^2+3b^2+4=8q+1+3(8k+1)+4=8k'+8=8k''$

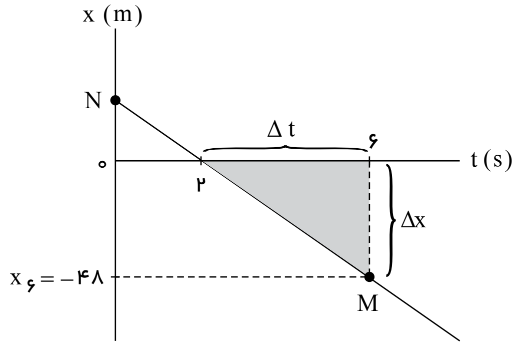
پاسخنامه تشریحی

۱۳۱ - گزینه ۲ سرعت متوسط متحرک از ابتدای حرکت تا لحظهٔ $t=۶s$ برابر با $-۸m/s$ است. زیرا شیب خط قاطع بر نمودار در این بازه منفی است:

$$v_{av}=\frac{\Delta x}{\Delta t}\Rightarrow -۸=\frac{\Delta x}{۶}\Rightarrow \Delta x=-۴۸m\Rightarrow x_۶-x_۰=-۴۸m\xrightarrow{x_۰=۰}x_۶=-۴۸m$$

سرعت متحرک در لحظهٔ $t=۶s$ برابر با شیب خط مماس بر نمودار در لحظهٔ $t=۶s$ یعنی همان پاره‌خط MN است. برای محاسبهٔ شیب این خط از مثلث سایه خورده در شکل زیر استفاده می‌کنیم:

$$v_{t=۶s}=\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{-۴۸}{۶-۲}=-۱۲m/s$$



هم‌چنین چون شیب خط مماس بر نمودار در مبدأ زمان برابر با صفر است سرعت اولیهٔ متحرک صفر است. بنابراین شتاب متوسط متحرک در ۶ ثانیهٔ اول حرکت برابر است با:

$$\Rightarrow a_{av}=\frac{\Delta v}{\Delta t}=\frac{-۱۲-۰}{۶}=-۲m/s^۲\ \Rightarrow\ |a|=۲\,m/s$$

۱۳۲ - گزینه ۴ باید توجه داشت که بزرگی سرعت ماشین ثابت است، اما ممکن است جهت بردار سرعت در حال تغییر باشد، یعنی ممکن است اتومبیل در یک پیچ باشد، لذا نمی‌توان با اطمینان در مورد شتاب اظهار نظر کرد.

۱۳۳ - گزینه ۲ دو قطار زمانی از کنار هم به‌طور کامل رد می‌شوند که مکان انتهای دو قطار یکسان شود. بنابراین معادلهٔ مکان – زمان دو قطار را برای انتهای آن‌ها می‌نویسیم:

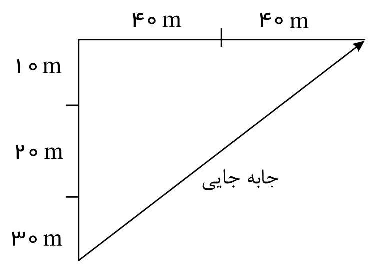
$v_۱=۵۴\,km/h=\frac{۵۴}{۳/۶}\,m/s=۱۵\,m/s$ در جهت مثبت محور x

$v_۲=-۱۰۸\,km/h=\frac{-۱۰۸}{۳/۶}\,m/s=-۳۰\,m/s$ در جهت منفی محور x

قطار () :

قطار () :

۱۳۴ - گزینه ۲ طبق رابطهٔ فیثاغورس داریم:



اندازه‌ی جابه‌جایی

سرعت متوسط

تندی متوسط

۱۳۵ - گزینه ۳

۱۳۶ - گزینه ۱ راه‌حل اول:

راه‌حل دوم:

متحرک در بازهٔ (مدت ثانیه) سرعت متوسط متر بر ثانیه و در بازهٔ (مدت ثانیه) سرعت متوسط متر بر ثانیه داشته است.

پس پاسخ گزینهٔ است.

۱۳۷ - گزینه ۴ ثانیهٔ دوم:

۱۳۸ - گزینه ۱ در حرکت تندشونده همواره قدرمطلق (اندازه‌ی) سرعت زیاد می شود که تنها در گزینهٔ () این گونه است.

۱۳۹ - گزینه ۱ می‌دانیم شیبِ خط مماس بر نمودار سرعت زمان در هر لحظه برابر شتاب حرکت در همان لحظه می‌باشد و هنگامی که شیب خط مماس مثبت است، شتاب نیز مثبت (در جهت مثبت محور) می‌باشد که در بازه‌های (تا) و (تا) این چنین است.

۱۴۰ - گزینه ۳ با داشتن مکان خودرو در هر لحظه سرعت متوسط را بین مکان‌های مختلف محاسبه می‌کنیم:

$$OA \text{ سرعت متوسط} = \frac{۵-۰}{۱-۰} = ۵\frac{m}{s}$$

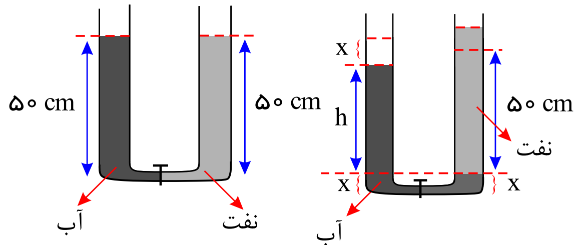
$$AB \text{ سرعت متوسط} = \frac{۱۰-۵}{۲-۱} = ۵\frac{m}{s}$$

$$BC \text{ سرعت متوسط} = \frac{۱۵-۱۰}{۳-۲} = ۵\frac{m}{s}$$

$$OA \text{ سرعت} = AB \text{ سرعت} = BC \text{ سرعت}$$

پاسخنامه تشریحی

۱۴۱ - گزینه ۲ با باز شدن شیر ارتباط به دلیل اینکه چگالی آب بیشتر از چگالی نفت است، سطح آب در لولهٔ سمت چپ پایین‌تر از سطح نفت در لولهٔ سمت راست قرار می‌گیرد. لذا با انتخاب سطح ترازی مناسب و با استفاده از اصل هم‌فشاری نقاط هم‌تراز، ارتفاع h را محاسبه می‌کنیم:



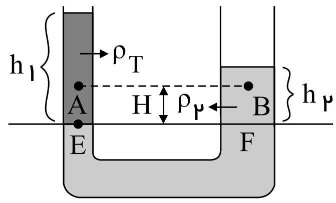
$$P_{\text{آب}} = P_{\text{روغن}}$$
$$\rho_{\text{آب}} g h_{\text{آب}} = \rho_{\text{روغن}} g h_{\text{روغن}} \to \rho_{\text{آب}} h_{\text{آب}} = \rho_{\text{روغن}} h_{\text{روغن}}$$
$$\to ۱۰۰۰ \times h_{\text{آب}} = ۸۰۰ \times ۵۰ \to h_{\text{آب}} = ۴۰cm$$
$$h_{\text{آب}} + ۲x = ۵۰ \to ۴۰ + ۲x = ۵۰ \to x = ۵cm$$

بنابراین سطح آب در لولهٔ سمت چپ $۵cm$ پایین می‌آید.

۱۴۲ - گزینه ۴

$$F_{max_{\text{مایع}}} = P_{max_{\text{مایع}}} \times A \Rightarrow F_{max_{\text{مایع}}} = \rho g h_{max} \times A \Rightarrow ۱۳۵ = ۱۳۵۰۰ \times ۱۰ \times h_{max} \times (۲۰ \times ۱۰^{-۴})$$
$$\Rightarrow h_{max} = ۰٫۵m = ۵۰cm \Rightarrow \Delta h = ۵۰ - ۴۰ = ۱۰cm$$

۱۴۳ - گزینه ۴



*نکته: فشار در نقاط هم‌تراز درون یک مایع ساکن برابر است؛ بنابراین چون دو نقطهٔ C و D هم‌تراز و در درون یک مایع ساکن‌اند، پس: $P_C = P_D$

اما دو نقطهٔ A و B هم تراز هستند ولی در داخل دو مایع ساکن قرار دارند. در این حالت فشار دو نقطه در درون مایع‌ها از رابطهٔ $P = \rho gh$ مقایسه می‌شود. باتوجه به هم‌فشاری دو نقطهٔ E و F داریم:

$$\begin{cases} P_E = P_A + \rho_۱ gh \\ P_F = P_B + \rho_۲ gh \end{cases} \xrightarrow{P_E = P_F} P_A + \rho_۱ gh = P_B + \rho_۲ gh \Rightarrow P_A = P_B + (\rho_۲ - \rho_۱)gh \xrightarrow{\rho_۲ > \rho_۱} P_A > P_B$$

* البته باتوجه به گزینه‌ها و بدون حل هم می‌توان فهمید که گزینهٔ ۴ درست است. چون حتماً $P_C = P_D$ ، $P_A \neq P_B$ که این شرط فقط در گزینهٔ ۴ برقرار است.

۱۴۴ - گزینه ۱

$$\rho = \frac{m}{V} \Rightarrow m = \rho V = \rho Ah$$

جرم آب $= m = \rho Ah$ و جرم جیوه $= ۴m = \rho' Ah'$

$$\Rightarrow \frac{m}{۴m} = \frac{\rho Ah}{\rho' Ah'} \Rightarrow \frac{۱}{۴} = \frac{\rho h}{\rho' h'} \Rightarrow ۴\rho h = \rho' h' \Rightarrow ۴ \times ۱ \times h = ۱۳٫۶h' \Rightarrow h = ۳٫۴h'$$

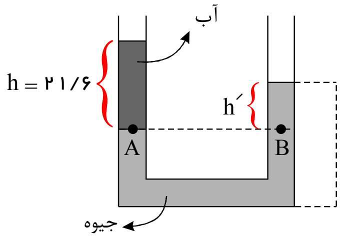
$h + h' = ۴۴ \Rightarrow ۳٫۴h' + h' = ۴۴ \Rightarrow h' = ۱۰cm$ ارتفاع جیوه $\Rightarrow$ ارتفاع آب $= h = ۳٫۴ \times ۱۰ = ۳۴cm$

کل مایع‌ها $P = \rho gh + \rho' gh' \Rightarrow P = ۱۰۰۰ \times ۱۰ \times ۰٫۳۴ + ۱۳۶۰۰ \times ۱۰ \times ۰٫۱$

$$\Rightarrow P = ۳۴۰۰ + ۱۳۶۰۰ = ۱۷۰۰۰Pa = ۱۷kPa$$

۱۴۵ - گزینه ۱ فشار در نقاط هم تراز درون یک شاره ساکن مانند نقاط A و B یکسان است، پس می توان نوشت:

$$P_A = P_B \Rightarrow P_\circ + \rho g h = P_\circ + \rho' g h'$$
$$\Rightarrow \rho h = \rho' h' \Rightarrow ۱ \times ۲۱/۶ = ۱۳/۵ h' \Rightarrow h' = ۱/۶ cm$$



جابجایی جیوه در هر شاخه نسبت به وضعیت اولیه به شرط آن که سطح مقطع لوله در طرفین مساوی باشد، نصف اختلاف ارتفاع جیوه در دو شاخه در وضعیت دوم است.

$۱/۶ \div ۲ = ۰/۸ cm =$ جابجایی جیوه در هر شاخه

۱۴۶ - گزینه ۱

$$\underset{\substack{\downarrow \\ \text{سطح مقطع در} \\ \text{محل نقطه } A}}{A_A}\ \overset{\substack{\text{سرعت شاره} \\ \uparrow}}{v_A} = \underset{\substack{\downarrow \\ \text{سطح مقطع در} \\ \text{محل نقطه } B}}{A_B}\ \overset{\substack{\text{سرعت شاره} \\ \uparrow}}{v_B} \xrightarrow{A_A > A_B} v_A < v_B$$

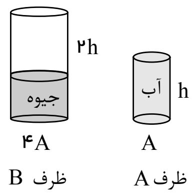
طبق اصل برنولی هرچه سرعت شاره بیشتر باشد، فشار در محل شاره کمتر است.

$$v_A < v_B \rightarrow \boxed{P_A > P_B}$$

۱۴۷ - گزینه ۴

چون جرم آب و جیوه ریخته شده در ظرف‌های استوانه‌ای A و B یکسان است پس نیروی وزنی که بر مایع درون ظرف‌ها وارد می‌شود، با هم برابر است. یعنی ($W_{\text{آب}} = W_{\text{جیوه}}$) بنابراین داریم:

$$P = \frac{F}{A} = \frac{mg}{A} \Rightarrow \frac{P_A}{P_B} = \frac{(mg)_A}{(mg)_B} \times \frac{A_B}{A_A} = ۱ \times \frac{۴A}{A} = ۴$$



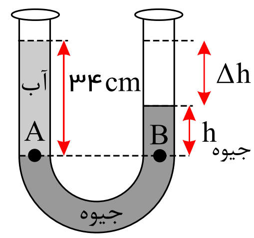
۱۴۸ - گزینه ۱

$$v_A D_A^۲ = v_B D_B^۲ \xrightarrow{D_B = \frac{D_A}{۲}} ۴ v_A \cancel{D_B^۲} = v_B \cancel{D_B^۲} \Rightarrow \frac{v_A}{v_B} = \frac{۱}{۴}$$

۱۴۹ - گزینه ۴ فشار در نقاط A و B برابر است و می‌توان نوشت:

$$P_A = P_B \Rightarrow P_\circ + (\rho g h)_{\text{آب}} = P_\circ + (\rho g h)_{\text{جیوه}}$$

$$\Rightarrow h_{\text{جیوه}} = \frac{(\rho h)_{\text{آب}}}{\rho_{\text{جیوه}}} = \frac{۳۴ \times ۱}{۱۳/۶} = ۲/۵ cm$$



بنابراین اختلاف ارتفاع جیوه در دو شاخه از لوله برابر است با:

$$\Delta h = h_{\text{آب}} - h_{\text{جیوه}} = ۳۴ - ۲/۵ = ۳۱/۵ cm$$

۱۵۰ - گزینه ۴ می‌دانیم فشار ناشی از اجسام جامد همگن (اجسامی که سطح مقطع یکنواخت دارند مانند استوانه یا یک مکعب و...) بر سطح تکیه‌گاه از رابطه‌ی $P = \frac{mg}{A} = \rho g h$ به دست می‌آید. از آن‌جایی که حجم مکعب با حجم استوانه برابر است، داریم:

$$V_{(\text{مکعب})} = V_{(\text{استوانه})} \Rightarrow a^۳ = A h_{(\text{استوانه})} \Rightarrow (۰/۶)^۳ = ۰/۳۶ \times h_{(\text{استوانه})} \Rightarrow h_{(\text{استوانه})} = ۰/۶ m$$

$$P = \rho g h \Rightarrow \frac{P_{(\text{استوانه})}}{P_{(\text{مکعب})}} = \frac{h_{(\text{استوانه})}}{h_{(\text{مکعب})}} = \frac{۰/۶}{۰/۶} = ۱$$

پاسخنامه تشریحی

۱۵۱ - گزینه ۱ صابون‌های مایع نمک‌های آمونیوم و پتاسیم اسیدهای چرب‌اند.

بررسی سایر گزینه‌ها :

گزینهٔ ۲) سر ناقطبی مولکول‌های صابون در چربی نفوذ می‌کند.

گزینهٔ ۳) گروه سولفونات، $SO_۳^-$ است.

گزینهٔ ۴) زنجیر آلکیل بخش ناقطبی پاک‌کننده را تشکیل می‌دهد.

۱۵۲ - گزینه ۴ پاک‌کنندهٔ غیرصابونی:

$$C_{۱۴}H_{۲۹}C_۶H_۴SO_۳Na = C_{۲۰}H_{۳۳}SO_۳Na$$

پاک‌کنندهٔ صابونی:

$$C_{۱۷}H_{۳۵}COONa = C_{۱۸}H_{۳۵}O_۲Na$$

پاک‌کنندهٔ غیرصابونی ۲ اتم کربن بیش‌تر، ۲ اتم هیدروژن کم‌تر، یک اتم گوگرد و یک اتم اکسیژن بیش‌تر دارد.

$$\text{تفاوت جرم مولی} = (۲\times۱۲) - (۲\times۱) + ۳۲ + ۱۶ = ۷۰$$

۱۵۳ - گزینه ۱ - عبارت اول نادرست است چون هالوژن‌ها کوچک‌ترین شعاع اتمی را در مقایسه با عناصر هم‌دوره خود دارند.

- عبارت دوم نادرست است چون پیوند بریلیم با هالوژن‌ها معمولاً از نوع کووالانسی است.

- عبارت سوم صحیح است. با افزایش عدد اتمی و افزایش شعاع هالوژن‌ها، طول پیوند افزایش یافته و انرژی پیوند کاهش می‌یابد و واکنش‌پذیری هالوژن‌ها نیز کاهش می‌یابد.

- عبارت چهارم نادرست است. در هیدروژن هالیدها، با افزایش عدد اتمی طول پیوند و خاصیت اسیدی افزایش می‌یابد.

خاصیت اسیدی : $HF < HCl < HBr < HI$

۱۵۴ - گزینه ۲ فرمول صابون جامد ۲۰ کربنه به‌صورت $C_{۱۹}H_{۳۹}COO^-Na^+$ می‌باشد و واکنش این صابون با منیزیم کلرید به‌صورت زیر است:

$$۲C_{۱۹}H_{۳۹}COONa(aq) + MgCl_۲(aq) \rightarrow (C_{۱۹}H_{۳۹}COO)_۲Mg(s) + ۲NaCl(aq)$$

از غلظت نمک خوراکی ($NaCl$) حاصل به مقدار صابون شرکت کرده در واکنش می‌رسیم:

$$?g\ \text{صابون} = ۴L\ \text{محلول} \times \frac{۲٫۵\times۱۰^{-۳}mol NaCl}{۱L\ \text{محلول}} \times \frac{۲mol\ \text{صابون}}{۲mol NaCl} \times \frac{۳۳۴g\ \text{صابون}}{۱mol\ \text{صابون}} = ۳٫۳۴g\ \text{صابون}$$

$$\text{درصد صابون شرکت نکرده در واکنش} = \frac{۱۶٫۷ - ۳٫۳۴}{۱۶٫۷} \times ۱۰۰ = ۸۰\%$$

۱۵۵ - گزینه ۲ ثابت یونش اسیدها در دمای ثابت همواره یکسان است، اما درجهٔ یونش اسید متناسب با غلظت مولار آن، متفاوت است.

ماده	$HA \rightleftharpoons H^+ + A^-$		
غلظت			
اولیه	۱	۰	۰
تغییرات	$-۰٫۲$	$+۰٫۲$	$+۰٫۲$
نهایی	۰٫۸	۰٫۲	۰٫۲

$$K_a = \frac{[H^+][A^-]}{[HA]} \Rightarrow K_a = \frac{۰٫۲\times۰٫۲}{۰٫۸} = ۵\times۱۰^{-۲}mol\cdot L^{-۱}$$

حال درجهٔ یونش اسید را در حالتی‌که غلظت اولیهٔ اسید ۰٫۶ مولار باشد محاسبه می‌کنیم:

ماده	$HA \rightleftharpoons H^+ + A^-$		
غلظت			
اولیه	۰٫۶	۰	۰
تغییرات	$-۰٫۶\alpha$	$۰٫۶\alpha$	$۰٫۶\alpha$
نهایی	$۰٫۶(۱-\alpha)$	$۰٫۶\alpha$	$۰٫۶\alpha$

$$K_a = \frac{[H^+][A^-]}{[HA]} \Rightarrow ۵\times۱۰^{-۲} = \frac{(۰٫۶\alpha)\times(۰٫۶\alpha)}{۰٫۶(۱-\alpha)} \Rightarrow ۰٫۶\alpha^۲ + ۰٫۰۵\alpha - ۰٫۰۵ = ۰ \Rightarrow \begin{cases} \alpha = ۰٫۲۵\ \text{ق ق} \\ \alpha = -۰٫۳۳\ \text{غ ق ق} \end{cases}$$

بنابراین درجه یونش اسید HA در حالت دوم برابر با ۰٫۲۵ است.

۱۵۶ - گزینه ۴ واکنش موازنه شده به‌صورت روبه‌رو است:

$$۲RCOONa + CaCl_۲ \rightarrow (RCOO)_۲Ca + ۲NaCl$$

ابتدا، مقدار صابونی که با آب سخت به‌طور کامل واکنش می‌دهد را محاسبه می‌کنیم:

$$\text{صابون } ۴/۷۲g = \text{صابون } ۲۳۶g \over \text{صابون } ۱mol \times \frac{\text{صابون } ۱mol}{۱mol\ CaCl_۲} \times \frac{۱mol\ CaCl_۲}{۴۰g Ca^{۲+}} \times \frac{۱mol\ Ca^{۲+}}{۴۰g\ Ca^{۲+}} \times \frac{۲۰۰g\ Ca^{۲+}}{\text{محلول } ۱۰^۶ g} \times \frac{\text{محلول } ۱g}{\text{محلول } ۱mL} \times \text{محلول } ۲۰۰mL$$

با توجه به اینکه جرم صابون موردنیاز برابر ۴/۷۲ گرم است، بنابراین تمام صابون اضافه شده (۱۰۰٪) به حالت رسوب در می‌آید.

۱۵۷ – گزینه ۳ برای افزایش قدرت پاک‌کنندگی مواد شوینده، به آن‌ها نمک‌های فسفات می‌افزایند، زیرا این نمک‌ها با یون‌های کلسیم و منیزیم موجود در آب‌های سخت واکنش می‌دهند و از تشکیل رسوب و لکه جلوگیری می‌کنند.

۱۵۸ – گزینه ۲ کلوئید نور را پخش می‌کند.

کلوئیدها ته‌نشین نمی‌شوند و پایدارند.

رنگ نوعی کلوئید است.

۱۵۹ – گزینه ۱ تمام عبارت‌ها درست‌اند.

مورد الف) اوره و عسل برخلاف بنزین ترکیب‌هایی قطبی هستند، پس در آب حل می‌شوند.

مورد ب) فرمول عمومی صابون‌های جامد $RCOONa$ و فرمول عمومی صابون‌های مایع $RCOOK$ و $RCOONH_۴$ می‌باشد. در صورت برابر بودن تعداد اتم‌های کربن اختلاف جرم مولی صابون‌ها مربوط به جرم مولی کاتیون موجود در آنها می‌شود. اگر کاتیون موجود در صابون مایع، K باشد، جرم مولی صابون مایع از صابون جامد بیشتر می‌شود.

مورد پ) اگر مقداری صابون به مخلوط آب و روغن اضافه کنید، مخلوطی از نوع کلوئید ایجاد می‌شود. کلوئیدها را می‌توان همانند پلی میان محلول‌ها و سوسپانسیون‌ها در نظر گرفت.

مورد ت) ژله و شیر هر دو کلوئید هستند. ذره‌های موجود در کلوئیدهای درشت‌تر از محلول‌اند و به‌همین دلیل نور را پخش می‌کنند.

۱۶۰ – گزینه ۳ شیمی‌دان‌ها، مدت‌ها پیش از آن که ساختار اسیدها و بازها شناخته شوند، با ویژگی‌های هر کدام و واکنش میان آن‌ها آشنا بودند.

بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینهٔ (۱): اغلب داروها، ترکیب‌های شیمیایی با خاصیت اسیدی یا بازی هستند.

گزینهٔ (۲): چند تن از شیمی‌دان‌های پیش از آرنیوس برای تعریف اسیدها و بازها و توجیه رفتار آن‌ها تعاریف و ایده‌هایی را مطرح کرده بودند.

گزینهٔ (۴):

$$\left.\begin{array}{l} ۲N_۲O_۵(g) + ۲H_۲O(l) \rightarrow ۴H^+(aq) + ۴NO_۳^-(aq)\ (\text{۸ مول یون}) \\ \frac{۱}{۲}K_۲O(s) + \frac{۱}{۲}H_۲O(l) \rightarrow K^+(aq) + OH^-(aq)\ (\text{۲ مول یون}) \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{۸}{۲} = ۴$$

پاسخنامه تشریحی

۱۶۱ - گزینه ۱ عبارت‌های (آ) و (ت) درست‌اند.

بررسی عبارت‌های نادرست:

ب) ترتیب پرشدن زیرلایه‌ها به n و l بستگی دارد.

پ) در سومین دورهٔ جدول دوره‌ای، ۸ عنصر جای دارد که از میان آن‌ها دو عنصر (Cl و Ar) گازی‌اند.

۱۶۲ - گزینه ۲ موارد (آ)، (ب)، (پ)، (ت) نادرست‌اند.

آ) در سیاره‌ی مشتری عناصر کربن و گوگرد جز عناصر جامد هستند.

ب) هیدروژن و آهن بترتیب فراوان‌ترین عناصر سازنده‌ی مشتری و زمین هستند.

پ) هیدروژن، هلیم و کربن به ترتیب بیش‌ترین عناصر سازندهٔ مشتری می‌باشد.

ت) بعد از آهن، منیزیم دومین فلز سازنده‌ی سیاره‌ی زمین است.

ث) گزینه‌ی صحیح است. عمده‌ی عناصر سازنده‌ی سیاره‌ی مشتری هیدروژن و هلیم هستند که سبک‌ترین نافلزات جدول دوره‌ای هستند.

۱۶۳ - گزینه ۲ از آن‌جا که مجموع فراوانی دو ایزوتوپ 100% است، فراوانی ایزوتوپ سنگین ۴۸ درصد $(48 = 52 - 100)$ است.

$$\overline{M} = \frac{M_1F_1 + M_2F_2}{100} \Rightarrow \frac{(106.9 \times 52) + (108.9 \times 48)}{100} \Rightarrow \overline{M} = 107.86$$

روش دوم:

$$\overline{M} = M_1 + \frac{F_2}{100}(M_2 - M_1) \Rightarrow \overline{M} = 106.9 + \frac{48}{100} \times 2 = 107.86$$

۱۶۴ - گزینه ۲ سبک‌ترین ایزوتوپ نیکل دارای ۳۰ نوترون است. پس سبک‌ترین ایزوتوپ $^{58}_{28}Ni$ است. در Ni^{2+} (سنگین‌ترین یون ایزوتوپ Ni) ۲۶ الکترون داریم. پس ۳۳ نوترون دارد و به صورت $^{61}_{28}Ni$ است. ایزوتوپ با جرم متوسط یک نوترون کم‌تر از این ایزوتوپ دارد پس $^{60}_{28}Ni$ است.

$$\begin{cases} ^{58}_{28}Ni \quad F_1 = 100 - 6F_2 \\ ^{60}_{28}Ni \quad 5F_2 \\ ^{61}_{28}Ni \quad F_2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{58(100 - 6F_2) + 60(5F_2) + 61(F_2)}{100} = 58.65 \Rightarrow \begin{cases} F_2 = 5\% \\ F_1 = 70\% \end{cases}$$

۱۶۵ - گزینه ۴ $_{30}Zn^{2+}$ دارای ۲۸ الکترون است. $_{32}Ge^{2+}$ دارای ۳۰ الکترون و $_{31}Ga^{3+}$ دارای ۲۸ الکترون است. بنابراین گزینه های ۱ و ۲ حذف است. در $^{65}_{30}Zn^{2+}$ و $^{64}_{29}Cu^{+}$، ۳۵ نوترون وجود دارد.

۱۶۶ - گزینه ۲

$$\overline{M} = \frac{M_1F_1 + M_2F_2 + M_3F_3}{100}$$

جرم ایزوتوپ اول $A = Z + N = 18 + 20 = 38$, جرم ایزوتوپ دوم $= 18 + 18 = 36$

فراوانی ایزوتوپ سوم $=$ فراوانی کل $-$ (فراوانی ایزوتوپ اول $+$ فراوانی ایزوتوپ دوم) $\Rightarrow 100 - (20 + 70) = 10\%$

$$36.8 = \frac{(38 \times 20) + (36 \times 70) + (M_3 \times 10)}{100} \Rightarrow 3680 = 3280 + 10\,M_3 \Rightarrow M_3 = 40$$

تعداد نوترون‌های ایزوتوپ سوم $\Rightarrow A = \mathbb{Z} + N \Rightarrow 40 = 18 + N \Rightarrow N = 22$

۱۶۷ - گزینه ۴

CCl_4 جرم سبک‌ترین مولکول : $12 + (4 \times 35) = 152$

CCl_4 جرم سنگین‌ترین مولکول : $13 + (4 \times 37) = 161$

$161 - 152 = 9$

۱۶۸ - گزینه ۱

$1)\ 1CH_4 + 2O_2 \rightarrow 1CO_2 + 2H_2O \rightarrow 3 = 3$ تساوی ضرایب

$$2)1C_2H_6 + \frac{7}{2}O_2 \rightarrow 2CO_2 + 3H_2O \Rightarrow 2C_2H_6 + 7O_2 \rightarrow 4CO_2 + 6H_2O \quad 9 \neq 10$$

$$3)1CS_2 + 3O_2 \rightarrow 1CO_2 + 2SO_2 \quad 4 \neq 3$$

$$4)\ 1Cu_2S + \frac{3}{2}O_2 \rightarrow 1Cu_2O + 1SO_2 \Rightarrow 2Cu_2S + 3O_2 \rightarrow 2Cu_2O + 2SO_2 \quad 5 \neq 4$$

۱۶۹ - گزینه ۲ موارد «آ» و «ت» نادرست است.

تعداد الکترون‌های اتم‌های خنثی M و N با هم برابر نیست، پس پروتون‌های برابر هم ندارند و نمی‌توانند ایزوتوپ یک عنصر باشند. تعداد پروتون‌های اتم M، به اندازهٔ بار آنیون N از پروتون‌های N بیش‌تر است.

چون عدد جرمی که مجموع تعداد پروتون‌ها و نوترون‌ها است، در هر دو برابر است، پس باید تعداد نوترون‌های M به اندازهٔ بار آنیون N از نوترون‌های N کم‌تر باشد.

مجموع تعداد تمام ذرات موجود در اتم M با مجموع تعداد تمام ذرات موجود در آنیون عنصر N برابرند.

۱۷۰ - گزینه ۴

$$۲H_۲S(g) + ۳O_۲(g) \rightarrow ۲SO_۲(g) + ۲H_۲O(g)$$

مجموع ضریب‌های استوکیومتری مواد: $۲ + ۳ + ۲ + ۲ = ۹$

$$۴NH_۳(g) + ۵O_۲(g) \rightarrow ۴NO(g) + ۶H_۲O(g)$$

مجموع ضریب‌های استوکیومتری مواد: $۴ + ۵ + ۴ + ۶ = ۱۹$

تفاوت مجموع ضریب‌های استوکیومتری مواد در دو معادله: $۱۹ - ۹ = ۱۰$