۱ گزینه ۴ پاسخ صحیح است. (نمودار در صفر می‌نیمم دارد پس $a<0$)

$$\left.\begin{matrix}|a|+c=۲/۵\\ -|a|+c=-۰/۵\end{matrix}\right\} c=۱, |a|=۱/۵$$

$a=-۱/۵$

$ac=-۱/۵$

۲ گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$y(-۲)=۲۴-۴-۱۱=۹ \Rightarrow (-۲,۹)\in f \Rightarrow (۹,-۲)\in f^{-۱}$

۳ گزینه ۴ پاسخ صحیح است. با فرض: $gof^{-۱}(-۳)=K$

$f^{-۱}(-۳)=g^{-۱}(K) \Rightarrow -۳=fog^{-۱}(K) \Rightarrow -۳=\frac{۲}{۳}(K^۳+۲K)-۲۵ \Rightarrow K^۳+۲K=۳۳ \Rightarrow K=۳$

۴ گزینه ۱ پاسخ صحیح است. اکیداً نزولی یعنی:

$-۹+k^۲<۰ \Rightarrow k^۲<۹ \Rightarrow -۳<k<۳ \Rightarrow k\in\{-۲,-۱,۰,۱,۲\} \Rightarrow$ مجموع $=۰$

۵ گزینه ۴ پاسخ صحیح است. $g(۲x)=۵x^۲+۱۱ \Rightarrow g(x)=\frac{۵x^۲}{۴}+۱۱$

مینیمم آن ۱۱ است و اگر ۷ واحد هم به سمت راست برود باز همان است.

۶ گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

گزینه ۱: $f^{-۱}(-۱)=-۲ \Rightarrow f(-۲)=-۱ \Rightarrow -۸+۲+۱\neq -۱$

گزینه ۲: $f\left(\frac{۱}{۲}\right)=\frac{۵}{۸} \Rightarrow \frac{۱}{۸}-\frac{۱}{۲}+۱=\frac{۵}{۸}$

۷ گزینه ۴ پاسخ صحیح است. دوره تناوب تابع ۴ است، پس:

$۴=\frac{۲\pi}{|b\pi|} \Rightarrow |b|=\frac{۱}{۲}$

کمترین مقدار تابع ۱- می‌باشد، بنابراین داریم: $۲+a=-۱ \Rightarrow a=-۳ \Rightarrow b=\frac{۱}{۲}$

حال در تابع $f(x)=۲-۳\,Sin\left(\frac{\pi x}{۲}\right)$ مقدار $f\left(\frac{۴۳}{۳}\right)$ را به دست می‌آوریم:

$f\left(\frac{۴۳}{۳}\right)=۲-۳\,Sin\left(\frac{۴۳\pi}{۶}\right)=۲-۳\,Sin\left(۷\pi+\frac{\pi}{۶}\right)=۲-۳\,Sin\left(\pi+\frac{\pi}{۶}\right)=۲-۳\left(-\frac{۱}{۲}\right)=\frac{۷}{۲}$

۸ گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$\frac{\cos\left(۲\alpha-\frac{\pi}{۲}\right)+\cos(\alpha+\pi)}{\cot g(۲\alpha)}=\frac{\sin ۲\alpha-\cos\alpha}{\cot g ۲\alpha}$$

$$\sin ۲\alpha=\frac{۲\tan\alpha}{۱+\tan^{۲}\alpha}=\frac{\frac{۳}{۲}}{۱+\frac{۹}{۱۶}}=\frac{\frac{۳}{۲}}{\frac{۲۵}{۱۶}}=\frac{۲۴}{۲۵}$$

$$\frac{۱}{\cot g ۲\alpha}=\tan ۲\alpha=\frac{\frac{۳}{۲}}{۱-\frac{۹}{۱۶}}=\frac{\frac{۳}{۲}}{\frac{۷}{۱۶}}=\frac{۲۴}{۷}$$

$$\cos\alpha=\frac{-۱}{\sqrt{۱+\tan^{۲}\alpha}}=\frac{-۱}{\sqrt{\frac{۲۵}{۱۶}}}=\frac{-۴}{۵}$$

$$\Rightarrow\frac{\sin ۲\alpha-\cos\alpha}{\cot g ۲\alpha}=\frac{\frac{۲۴}{۲۵}-\left(-\frac{۴}{۵}\right)}{\frac{۷}{۲۴}}=\frac{\frac{۲۴+۲۰}{۲۵}}{\frac{۷}{۲۴}}=\frac{۱۰۵۶}{۱۷۵}$$

۹ گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$f(x)=x^{۲}-۲x\xrightarrow{\text{به اندازه } x \text{ قرینه}}f(x)=-x^{۲}+۲x\xrightarrow{\text{به اندازه } y+۱۶}$$

$$f(x)=-x^{۲}+۲x+۱۶=x^{۲}-۲x$$

$$x^{۲}-۲x-۸=۰\Rightarrow(x-۴)(x+۲)=۰\Rightarrow\begin{cases}x=-۲ & \text{غ ق ق}\\ x=۴ & \text{ق ق}(x>۱)\end{cases}\Rightarrow A\Big|^{۴}_{۸}$$

$$OA=\sqrt{۴^{۲}+۸^{۲}}=\sqrt{۱۶+۶۴}=\sqrt{۸۰}=۴\sqrt{۵}$$

۱۰ گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

روش اول: نیمساز ناحیه دوم $y=-x$ است بنابراین نقطه موردنظر در تابع وارون برابر است با: (چون در ربع دوم است باید a منفی باشد)

$$(a,-a)\in f^{-۱}\Rightarrow(-a,a)\in f\Rightarrow f(-a)=a$$

$$\Rightarrow -a+\frac{۱}{۲a}=a\Rightarrow\frac{۱}{۲a}=۲a\Rightarrow ۴a^{۲}=۱\Rightarrow a^{۲}=\frac{۱}{۴}\Rightarrow\begin{cases}a=\frac{۱}{۲} & \text{غ ق ق}\\ a=-\frac{۱}{۲} & \text{ق ق}\end{cases}$$

روش دوم:

$x=-۲$ بد:
- $f^{-۱}(x)=-x$ — $f(x)=x-\frac{۱}{۲x}$
- $f^{-۱}(-۱)=۱$ — $f\left(\frac{۱}{۲}\right)=\frac{۱}{۲}-۱$

$x=-\frac{۱}{۲}$:
- $f^{-۱}\left(-\frac{۱}{۲}\right)=\frac{۱}{۲}$ — خوب $=-\frac{۱}{۲}$

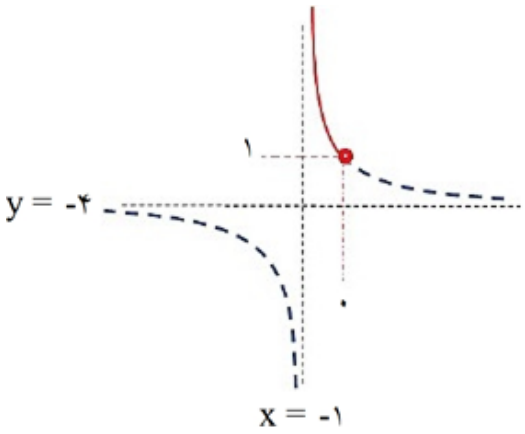
۱۱ گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$x+۲\sqrt{x}=۳\Rightarrow x=۱$$

$$x+۲\sqrt{x}=۱۵\Rightarrow x=۹$$

$$g(۳)+g(۱۵)=۱+۹=۱۰$$

۱۲ گزینه ۳ پاسخ صحیح است.



$$۰ \le x - [x] < ۱ \xrightarrow{\times(-۱)} -۱ < [x] - x \le ۰$$

$$R \xrightarrow{f} \left(-۱\ ,\ ۰\right] \ ,\ x \neq -۱ \xrightarrow{g} R - \{-۲\}$$

اشتراک $\left(-۱\ ,\ ۰\right] \xrightarrow{g} \left[۱\ ,+\infty\right)$

$$g(x) = \frac{-۲x+۱}{x+۱}$$

۱۳ گزینه ۳ پاسخ صحیح است. می‌دانیم:

$$\begin{matrix} f \\ (a\ ,\ b) \end{matrix} \longleftrightarrow \begin{matrix} f^{-۱} \\ (b\ ,\ a) \end{matrix}$$

$$\left.\begin{matrix} x - \sqrt{x} = ۴۲ \Rightarrow x = ۴۹ \\ x - \sqrt{x} = ۱۲ \Rightarrow x = ۱۶ \end{matrix}\right\} \Rightarrow f^{-۱}(۴۲) - f^{-۱}(۱۶) = ۴۹ - ۱۶ = ۳۳$$

۱۴ گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$g(x) = [x] + [-x] = \begin{cases} ۰\ ;\ x \in \mathrm{z} \xrightarrow{x \in \mathrm{z}} f(g(x))\ f(۰) = ۰ \\ -۱\ ;\ x \notin z \xrightarrow{x \notin z} f(g(x)) = f(-۱) = -۵ \end{cases}$$

$$(\mathrm{fog})(x) = \begin{cases} ۰\ ;\ x \in \mathrm{z} \\ -۵\ ;\ x \notin z \end{cases} \Rightarrow R_{\mathrm{fog}} = \{-۵, ۰\}$$

۱۵ گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$\cot \alpha = \frac{۲}{۳} \Rightarrow \tan \alpha = \frac{۳}{۲} \Rightarrow \mathrm{Sin}\, ۲\alpha = \frac{۲ \tan \alpha}{۱ + \tan^{۲} \alpha} = \frac{۲ \times \frac{۳}{۲}}{۱ + \frac{۹}{۴}} = \frac{۱۲}{۱۳}$$

۱۶ گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ابتدا درایه‌های ماتریس $A^{۲}$ را به دست آورید:

$$A^{۲} = A \times A = \begin{bmatrix} ۳ & -۳ & ۴ \\ ۲ & -۳ & ۴ \\ ۰ & -۱ & ۱ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۳ & -۳ & ۴ \\ ۲ & -۳ & ۴ \\ ۰ & -۱ & ۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۳ & -۴ & ۴ \\ ۰ & -۱ & ۰ \\ -۲ & ۲ & -۳ \end{bmatrix}$$

اکنون فقط درایه‌های سطر اول ماتریس $A^{۳}$ را به دست میآوریم:

$$A^{۳} = A^{۲} \times A = \begin{bmatrix} ۳ & -۴ & ۴ \\ ۰ & -۱ & ۰ \\ -۲ & ۲ & -۳ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۳ & -۳ & ۴ \\ ۲ & -۳ & ۴ \\ ۰ & -۱ & ۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱ & -۱ & ۰ \\ & & \end{bmatrix}$$

بنابراین درایه‌های سطر اول ماتریس $A^{۳}$ به صورت $[۱ \ -۱ \ ۰]$ است.

۱۷ گزینه ۱ پاسخ صحیح است. از تساوی ماتریسی داده شده یک دستگاه می‌سازیم و آن‌را حل می‌کنیم.

$$\begin{bmatrix} ۵ & -۲ \\ ۴ & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{۱} \\ b_{۲} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۴b_{۱} \\ ۴b_{۲} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} ۵b_{۱} - ۲b_{۲} \\ ۴b_{۱} + \mathrm{ab}_{۲} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۴b_{۱} \\ ۴b_{۲} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} ۵b_{۱} - ۲b_{۲} = ۴b_{۱} \\ ۴b_{۱} + \mathrm{ab}_{۲} = ۴b_{۲} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} b_{۱} = ۲b_{۲} \\ ۴b_{۱} + \mathrm{ab}_{۲} = ۴b_{۲} \end{cases} \xrightarrow{b_{۱} = ۲b_{۲}} ۸b_{۲} + \mathrm{ab}_{۲} = ۴b_{۲} \Rightarrow a = -۴$$

۱۸ گزینه ۲ پاسخ صحیح است. طرفین تساوی $AX = A^{-1}$ را از سمت چپ در A^{-1} ضرب می‌کنیم تا ماتریس X به دست آید.

$$AX = A^{-1} \Rightarrow X = (A^{-1})^{2} \quad (1)$$

$$A = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{2} \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{\frac{3}{4} - 1} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ -2 & \frac{3}{4} \end{bmatrix} \Rightarrow A^{-1} = -4 \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ -2 & \frac{3}{4} \end{bmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 8 & -3 \end{bmatrix}$$

$$(A^{-1})^{2} = \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 8 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 8 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 32 & -14 \\ -56 & 25 \end{bmatrix}$$

۱۹ گزینه ۳ پاسخ صحیح است. با فرض $B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$ نتیجه می‌گیریم $B^{-1} = \frac{1}{-2} \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}$ و با فرض $C = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}$ نتیجه می‌گیریم $C^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$.

حال طرفین رابطه‌ی ماتریسی داده شده را از چپ در B^{-1} و از راست در C^{-1} ضرب می‌کنیم.

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} X \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix} \Rightarrow X = B^{-1} \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix} C^{-1}$$

$$\Rightarrow X = \frac{1}{-2} \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix} \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} = -\frac{1}{4} \begin{bmatrix} 20 & -24 \\ -16 & 16 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & 6 \\ 4 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 7 \\ -4 & -4 \end{bmatrix}$$

۲۰ گزینه ۴ پاسخ صحیح است. ابتدا سطر اول ماتریس A^{2} و سپس سطر اول A^{3} را پیدا می‌کنیم.

$$A^{2} = A \times A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 \\ -3 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 \\ -3 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 2 & 24 \\ \square & & \\ \square & & \end{bmatrix}$$

$$A^{3} = A^{2} \times A = \begin{bmatrix} 6 & 2 & 24 \\ \square & & \\ \square & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 \\ -3 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 30 & 6 & 86 \\ \square & & \\ \square & & \end{bmatrix}$$

۲۱ گزینه ۴ پاسخ صحیح است. نسبت به سطر دوم که یک درایهٔ صفر دارد، دترمینان می‌گیریم.

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 3 & 0 & 5 \\ -2 & 6 & 1 \end{vmatrix} = -3 \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 6 & 1 \end{vmatrix} + 0 - 5 \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 6 \end{vmatrix} = 75 - 50 = 25$$

۲۲ گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$||A|A| = |A|^{3}|A| = |A|^{4} = 4^{4} = 256$$

۲۳ گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ابتدا حاصل‌ضرب داده شده را به دست میآوریم.

$$[x \ 2x \ -1]_{1\times3} \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 4 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}_{3\times3} = [11x - 1 \ -x - 2 \ -3x]_{1\times3}$$

$$[x \ 2x \ -1] \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 4 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ 2x \\ -1 \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow [11x - 1 \ -x - 2 \ -3x]_{1\times3} \begin{bmatrix} x \\ 2x \\ -1 \end{bmatrix}_{3\times1} = 0$$

$$\Rightarrow \left[11x^{2} - x - 2x^{2} - 4x + 3x\right]_{1\times1} = 0 \Rightarrow 9x^{2} - 2x = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ یا } x = \frac{2}{9}$$

۲۴ گزینه ۲ پاسخ صحیح است. طبق تعریف داریم:

$$A=\begin{bmatrix}۱&۲&۲\\۲&۱&۲\\۲&۲&۱\end{bmatrix}\Rightarrow A^{۲}=\begin{bmatrix}۹&۸&۸\\۸&۹&۸\\۸&۸&۹\end{bmatrix}$$

$$A^{۲}-۴A=\begin{bmatrix}۹&۸&۸\\۸&۹&۸\\۸&۸&۹\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}۴&۸&۸\\۸&۴&۸\\۸&۸&۴\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۵&۰&۰\\۰&۵&۰\\۰&۰&۵\end{bmatrix}$$

بنابراین مجموع درایه‌های قطر اصلی ماتریس $A^{۲}-۴A$، برابر ۱۵ است.

۲۵ گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است.

۱) $\begin{matrix}a\mid b\\a\mid c\end{matrix}\rightarrow a\mid b+c$ ۲) $a\mid b\rightarrow\begin{matrix}a\mid b^{۲}\\a\mid c\end{matrix}\rightarrow a\mid b^{۲}+c$

۳) $\begin{matrix}a\mid b\\a\mid c\end{matrix}\not\rightarrow a^{۲}\mid b+c$ ۴) $\begin{matrix}a\mid b\\a\mid c\end{matrix}\overset{\times}{\rightarrow}a^{۲}\mid bc$

۲۶ گزینه ۲ پاسخ صحیح است. فرض می‌کنیم a و b دو عدد نامنفی باشد. داریم:

$$\underbrace{\frac{a+b}{۲}}_{x}\geq\underbrace{\sqrt{ab}}_{y}\xleftarrow[\text{روش بازگشتی}]{\text{اثبات به}}a+b\geq۲\sqrt{ab}$$

$\Leftrightarrow a+b-۲\sqrt{ab}\geq۰\Leftrightarrow(\sqrt{a}-\sqrt{b})^{۲}\geq۰$ همیشه درست

۲۷ گزینه ۳ پاسخ صحیح است. بررسی گزینه‌ها:

۱) درست است. زیرا: $\begin{cases}a-b\mid a\\a-b\mid a-b\end{cases}\xrightarrow[\text{را می‌شمارد}]{\text{تفاضل}}a-b\mid b\Rightarrow a-b\mid b^{۲}$

۲) درست است. زیرا: $\begin{cases}a-b\mid a\\a-b\mid b\end{cases}\xrightarrow[\text{را می‌شمارد}]{\text{جمع}}a-b\mid a+b$

۴) درست است. زیرا: $\begin{cases}a-b\mid a\\a-b\mid b\end{cases}\xrightarrow[\text{را می‌شمارد}]{\text{ترکیب خطی}}a-b\mid ۲a+۳b$

بنابراین گزینه‌ی (۳) نادرست است.

۲۸ گزینه ۴ پاسخ صحیح است. بررسی گزینه‌ها:

۱) $x^{۲}+xy+y^{۲}\geq۰\Leftrightarrow\left(x+\frac{y}{۲}\right)^{۲}+\frac{۳y^{۲}}{۴}\geq۰$

۲) $x^{۲}+xy+y^{۲}\geq۰\Leftrightarrow ۲x^{۲}+۲y^{۲}+۲xy\geq۰$

$x^{۲}+y^{۲}+۲xy+x^{۲}+y^{۲}\geq۰\Leftrightarrow(x+y)^{۲}+x^{۲}+y^{۲}\geq۰$

۳) $x^{۲}+y^{۲}+xy\geq۰\Leftrightarrow\left(\frac{x}{۲}+y\right)^{۲}+\frac{۳x^{۲}}{۴}\geq۰$

بنابراین گزینه‌ی (۴) هم‌ارز حکم نیست.

۲۹ گزینه ۲ پاسخ صحیح است. روش اول: می‌دانیم اگر $a>0$ باشد، $a+\frac{1}{a}\geq 2$ برای اینکه نامساوی گفته شده را شبیه این نامساوی کنیم:

$$a+\frac{1}{a+1}\geq 1 \overset{+1}{\rightleftarrows} a+1+\frac{1}{a+1}\geq 2$$
$$\overset{\times(a+1)}{\rightleftarrows} (a+1)^2+1\geq 2(a+1)\rightleftarrows (a+1)^2-2(a+1)+1\geq 0$$
$$(a+1-1)^2\geq 0 \rightleftarrows a^2\geq 0$$

روش دوم:

$$a+\frac{1}{a+1}\geq 1 \rightleftarrows \frac{a^2+a+1}{a+1}\geq 1 \rightleftarrows a^2+a+1\geq a+1$$
$$\rightleftarrows a^2\geq 0$$

۳۰ گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

بررسی گزینه‌ها:

۱) $2\mid 3+5\Rightarrow 2\not| 3\,,\,2\not| 5$ نادرست

۲) $6\mid 3\times 4\Rightarrow 6\not| 3\,,\,6\not| 4$ نادرست

۳) $8\mid 2^4\Rightarrow 8\not| 2$ نادرست

۴) $ab\mid d\Rightarrow d=(ab)q\Rightarrow \begin{cases} d=a(bq)\Rightarrow a\mid d \\ d=b(aq)\Rightarrow b\mid d \end{cases}$ درست

۳۱ گزینه ۱ پاسخ صحیح است. با استفاده از رابطهٔ تکانه و نیرو داریم:

$$\vec{F}_{net}=\frac{\Delta\vec{p}}{\Delta t}\xrightarrow[P_1=m\vec{v}_1\,,\,\vec{v}_1=6\vec{i}-8\vec{j}\left(\frac{m}{s}\right)]{\Delta t=2s\,,\,m=2\,kg\,,\,F_{net}=3\vec{i}-4\vec{j}\,(N)}\vec{P}_2=18\vec{i}-24\vec{j}\left(\frac{kg.m}{s}\right)$$
$$\Rightarrow \left|\vec{P}_2\right|=\sqrt{18^2+24^2}=30\frac{kg.m}{s}$$

۳۲ گزینه ۴ پاسخ صحیح است. می‌دانیم، مساحت سطح محصور بین نمودار $F-t$ و محور زمان برای تغییر تکانه است.

بنابراین، با استفاده از این مساحت، تغییر تکانه و به دنبال آن سرعت جسم را در لحظهٔ $t=15s$ می‌یابیم:

$$\Delta p=\text{مساحت ذوزنقه}=\frac{15+(10-5)}{2}\times 10\Rightarrow \Delta p=100\,kg\,\frac{m}{s}$$

$$\Delta p=m(v_{15}-v_0)\xrightarrow[m=2\,kg]{v_0=-10\vec{i}\,\frac{m}{s}\Rightarrow v_0=-10\frac{m}{s}} 100=2\times\left[v_{15}-(-10)\right]$$
$$\Rightarrow 100=2v_{15}+20\Rightarrow 80=2v_{15}\Rightarrow v_{15}=40\frac{m}{s}$$

اکنون، انرژی جنبشی جسم را می‌یابیم:

$$K_{15}=\frac{1}{2}mv_{15}^2=\frac{1}{2}\times 2\times 40^2\Rightarrow K_{15}=1600J$$

۳۳ گزینه ۲ پاسخ صحیح است. با نوشتن رابطهٔ نیروی فنر و تغییر طول آن، طول اولیهٔ فنر را به دست میآوریم:

$$F_{e_1}=k(l_1-l_0)\xrightarrow[m_1=۴۰۰g=۰/۴\,\mathrm{kg},k=۲۰۰\frac{N}{m}]{F_{e_1}=m_1g\,,\,g=۱۰\frac{N}{\mathrm{kg}}\,,\,l_1=۲۰\,\mathrm{cm}=۰/۲m}$$

$$۰/۴\times۱۰=۲۰۰(۰/۲-l_0)\Rightarrow l_0=۰/۲-۰/۰۲=۰/۱۸m=۱۸\,\mathrm{cm}$$

$$\frac{F_{e_2}}{F_{e_1}}=\frac{k(l_2-l_0)}{k(l_1-l_0)}\xrightarrow[l_1=۲۰\,\mathrm{cm},F_{e_1}=\mathrm{mg},F_{e_2}=(m_1+m')g]{l_2=۲۶\,\mathrm{cm}\,,\,l_0=۱۸\,\mathrm{cm}}$$

$$\frac{m+m'}{m}=\frac{۸}{۲}\xrightarrow{m=۰/۴\,\mathrm{kg}}m'=۳m=۱/۲\,\mathrm{kg}$$

۳۴ گزینه ۲ پاسخ صحیح است. میدانیم، در نمودار مکان - زمان، هنگامیکه نمودار به محور افق نزدیک میشود، یعنی متحرک به مبدأ مکان (یا به $x=۰$) نزدیک شده و هنگامیکه از این محور دور میشود، متحرک از مبدأ مکان دور خواهد شد. از طرف دیگر، شیب خط مماس بر نمودار مکان - زمان در هر لحظه، سرعت در آن لحظه را نشان میدهد.

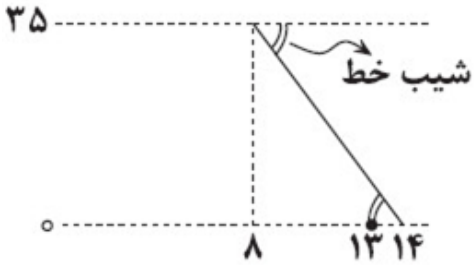
بنابراین، اگر در لحظه یا بازهای، شیب خط مماس بر نمودار مکان - زمان، مثبت (یا منفی) باشد، سرعت نیز مثبت (یا منفی) است.

با توجه به نکات فوق در مییابیم، متحرک در بازههای زمانی $(t=۱s\text{ تا }t_0=۰)$ و $(t=۵s\text{ تا }t=۴s)$ به مدت ۲ ثانیه در حالیکه $v<۰$ است به مبدأ مکان نزدیک میشود. همچنین، در بازهٔ زمانی $(t=۴s\text{ تا }t=۳s)$، متحرک به مدت ۱ ثانیه در حالیکه $v>۰$ است، از مبدأ مکان دور خواهد شد. بنابراین، نسبت مدت زمانیکه متحرک با سرعت منفی به مبدأ مکان نزدیک میشود به مدت زمانیکه با سرعت مثبت از مبدأ مکان دور میشود برابر $\frac{۲}{۱}=۲$ است.

۳۵ گزینه ۳ پاسخ صحیح است. با توجه به اینکه نمودار $v-t$ بین دو لحظهٔ $t=۶s$ و $t=۸s$، یک خط با شیب ثابت است، شتاب متحرک در تمام لحظههای متعلق به این بازهٔ زمانی، با شیب این خط برابر است. یعنی:

$$\text{شیب خط}=\frac{\text{ضلع مقابل}}{\text{ضلع مجاور}}=\frac{۳۵-۲۰}{۸-۶}=\frac{۱۵}{۲}\ \frac{m}{s^2}$$

چون لحظهٔ $t_1=۷s$ مربوط به این بازهٔ زمانی است، لذا $a_{t=۷s}=\frac{۱۵}{۲}\ \frac{m}{s^2}$ میباشد. به همین ترتیب، برای تعیین بزرگی شتاب در لحظهٔ $t_2=۱۳s$ که بین بازهٔ زمانی $t=۸s$ تا $t=۱۴s$ است، داریم:

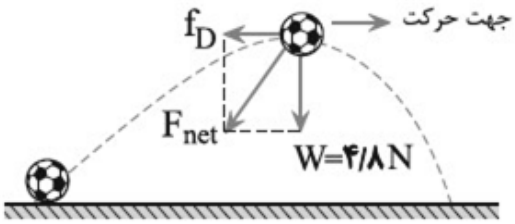


$$\text{شیب خط}=\frac{۰-۳۵}{۱۴-۸}=\frac{-۳۵}{۶}\ \frac{m}{s^2}\Rightarrow|a_{t=۱۳s}|=\frac{۳۵}{۶}\ \frac{m}{s^2}$$

در نهایت داریم:

$$\frac{|a_{t=۷s}|}{|a_{t=۱۳s}|}=\frac{\frac{۱۵}{۲}}{\frac{۳۵}{۶}}=\frac{۹}{۷}$$

۳۶ گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ابتدا با توجه به قانون دوم نیوتون نیروی خالص وارد بر توپ را می‌یابیم:



$$W = ۴/۸N \Rightarrow mg = ۴/۸ \Rightarrow m = \frac{۴/۸}{۱۰} = ۰/۴۸\,kg$$

$$F_{net} = ma \Rightarrow F_{net} = ۰/۴۸ \times \frac{۶۵}{۶} = ۵/۲N$$

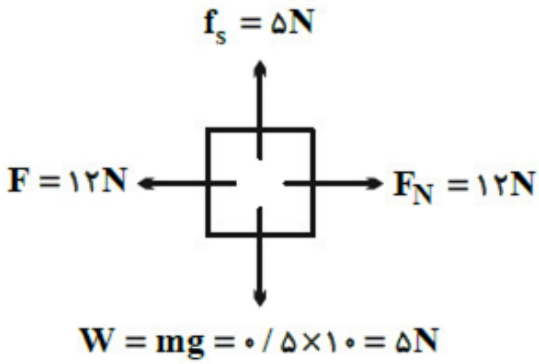
F_{net} طبق رابطهٔ فیثاغورس برابر است با:

$$F_{net} = \sqrt{f_D^{۲} + W^{۲}} \Rightarrow (۵/۲)^{۲} = (۴/۸)^{۲} + (f_D)^{۲} \Rightarrow (۱۳\times ۰/۴)^{۲} = (۱۲\times ۰/۴)^{۲} + f_D^{۲}$$

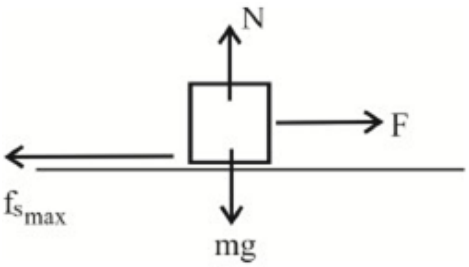
$$\Rightarrow f_D^{۲} = (۵\times ۰/۴)^{۲} \Rightarrow f_D = ۵\times ۰/۴ = ۲N$$

۳۷ گزینه ۴ پاسخ صحیح است. چون جسم ساکن است، اندازهٔ نیروی اصطکاک وارد بر جسم با نیروی وزن جسم برابر است. اندازهٔ نیرویی که دیوار به جسم وارد می‌کند، به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$R = \sqrt{f_s^{۲} + F_N^{۲}} = \sqrt{۱۲^{۲} + ۵^{۲}} \Rightarrow R = ۱۳N$$



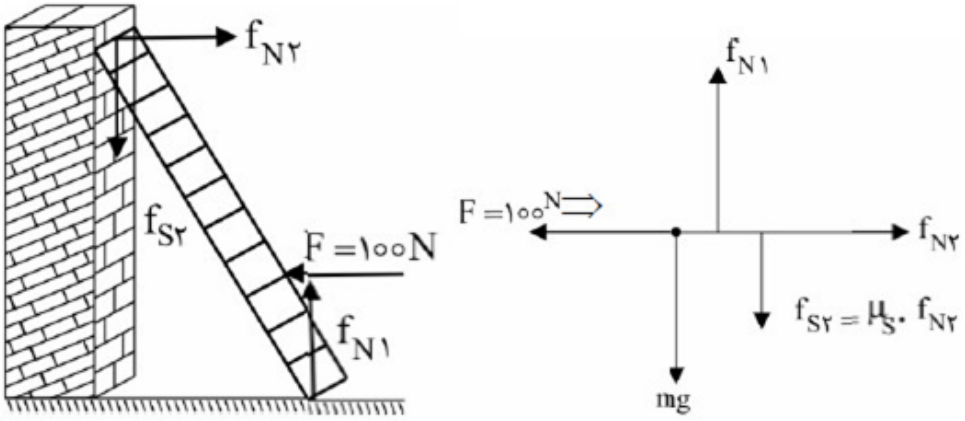
۳۸ گزینه ۱ پاسخ صحیح است. شرط توقف جسم در آستانه حرکت: $F = f_{s_{max}}$



$$\begin{cases} F = mg\mu_k \\ N = mg \end{cases} \Rightarrow ۱۵/۴ = ۳/۵\times ۱۰\times \mu_k$$

$$\Rightarrow \mu_k = \frac{۱۵/۴}{۳۵} \Rightarrow \mu_k = ۰/۴۴$$

۳۹ گزینه ۴ پاسخ صحیح است. نردبان در آستانه حرکت رو به بالا بوده و لذا نیروی اصطکاک سکونی و بیشینه رو به پایین به آن وارد می‌شود.



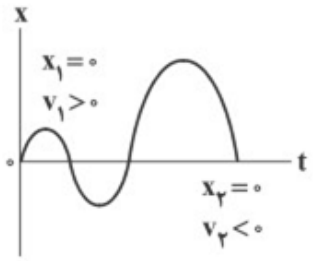
خ‌الص $F_x = ۰ \Rightarrow f_{N_۲} = F = ۱۰۰N$

خ‌الص $F_y = ۰ \Rightarrow f_{N_۱} = ۲۰۰ + ۰/۶ \times ۱۰۰ \Rightarrow f_{N_۲} = ۲۶۰N$

۴۰ گزینه ۴ پاسخ صحیح است. جسم در ابتدا ساکن است و این یعنی نیروی اصطکاک در ابتدا سکونی است. از آنجا که مشخص نیست با ۲ برابر شدن نیرو، جسم حرکت می‌کند یا خیر، نمی‌توان به طور قطعی دربارهٔ نیروی اصطکاک اظهارنظر نمود.

اگر جسم حرکت کند، این امکان وجود دارد که نیروی اصطکاک جنبشی در حالت دوم با نیروی اصطکاک سکونی در حالت اول برابر باشد.

۴۱ گزینه ۲ پاسخ صحیح است. با توجه به مکان و سرعت لحظه‌ای متحرک در لحظات $t_۱ = ۰$ و $t_۲ = ۲۰s$، در مورد سرعت متوسط و شتاب متوسط متحرک می‌توان نوشت:



$$v_{av} = \frac{x_۲ - x_۱}{t_۲ - t_۱} = ۰$$

$$a_{av} = \frac{v_۲ - v_۱}{t_۲ - t_۱} < ۰$$

بنابراین گزینه‌ی (۲) صحیح است.

۴۲ گزینه ۱ پاسخ صحیح است. شتاب حرکت، نشان‌دهنده‌ی تغییرات سرعت در واحد زمان است. هنگامی که شتاب حرکت، ثابت است، به این مفهوم است که تغییرات سرعت در زمان‌های مساوی، ثابت است و همه با هم برابرند. از سوی دیگر و طبق رابطه‌ی $\Delta \vec{p} = \overrightarrow{m\Delta v}$، تغییرات تکانه نیز متناسب با تغییرات سرعت بوده و این پارامتر نیز در زمان‌های مساوی به یک اندازه تغییر می‌کند.

۴۳ گزینه ۳ پاسخ صحیح است. چون جسم در حال تعادل است، برایند نیروهای وارد بر آن برابر صفر است $(F_{net} = ۰)$. اگر برایند چند نیرو (یا چند بردار) برابر صفر باشد و یکی از آن نیروها را حذف کنیم، برایند بقیه‌ی نیروها، هم‌اندازه و در خلاف جهت نیروی حذف شده می‌شود. بنابراین برایند سه نیروی ۲۰ و ۱۰ و ۸ نیوتون برابر ۱۵ نیوتون خواهد بود و می‌توان نوشت:

$$F_{net} = ma = m \times \frac{\Delta v}{\Delta t} \xrightarrow[\Delta t = ۲s]{F_{net} = ۱۵N \, , \, m = ۲kg} ۱۵ = ۲ \times \frac{\Delta v}{۲} \Rightarrow \Delta v = ۱۵ \frac{m}{s}$$

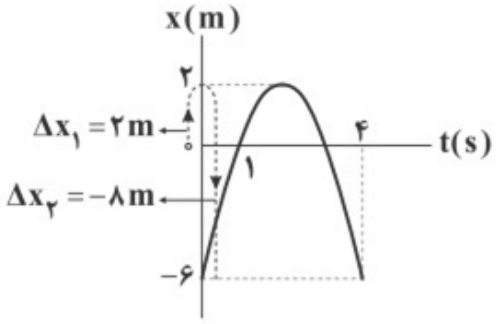
۴۴ گزینه ۴ پاسخ صحیح است. جهت تقعر منحنی رو به بالاست، پس شتاب متحرک مثبت و در جهت محور x است $(a > ۰)$.

متحرک در ابتدا خلاف جهت محور x حرکت می‌کند (شیب خط مماس بر نمودار در مبدأ زمان، یعنی سرعت اولیه‌ی متحرک منفی است)، پس $v_۰ < ۰$ است.

۴۵ گزینه ۴ پاسخ صحیح است. متحرک در لحظه‌ی $t_۱ = ۱\text{s}$ در مبدأ مکان $(x_۱ = ۰)$ و در لحظه‌ی $x_۲ = ۴\text{s}$ در مکان $x_۲ = -۶\text{m}$ قرار دارد، بنابراین:

$$v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_۲ - x_۱}{t_۲ - t_۱} = \frac{-۶ - ۰}{۴ - ۱} = -۲\ \frac{m}{s}$$

مسیر حرکت متحرک در بازه‌ی زمانی $t = ۱\text{s}$ تا $t = ۴\text{s}$ را با خط‌چین در شکل زیر نشان داده‌ایم.



پس مسافت طی‌شده توسط متحرک در این بازه‌ی زمانی برابر است با: $l = \Delta x_۱ + |\Delta x_۲| = ۲ + ۸ = ۱۰\text{m}$

بنابراین تندی متوسط متحرک برابر است با: $s_{av} = \frac{l}{\Delta t} = \frac{۱۰}{۴ - ۱} = \frac{۱۰}{۳}\ \frac{m}{s}$

۴۶ گزینه ۲ پاسخ صحیح است. وقتی متحرک در مبدأ مکان قرار می‌گیرد، $x = ۰$ می‌شود.

$$x = ۰ \Rightarrow t^۲ + ۲t - ۳ = ۰ \Rightarrow (t + ۳)(t - ۱) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} t = -۳\text{s} & \times \\ t = ۱\text{s} & \checkmark \end{cases}$$

مکان اولیه‌ی متحرک با جای‌گذاری $t = ۰$ در معادله‌ی حرکت تشخیص داده می‌شود:

$$x_۰ = (۰)^۲ + ۲\times ۰ - ۳ = -۳\text{m}$$

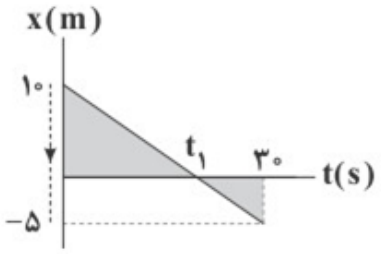
حالا باید ببینیم چند بار $x = -۳\text{m}$ می‌شود، بنابراین:

$$x = t^۲ + ۲t - ۳ = -۳ \Rightarrow t^۲ + ۲t = ۰ \Rightarrow \begin{cases} t = ۰ & \times \\ t = -۲\text{s} & \times \end{cases}$$

$t = -۲\text{s}$ که هیچی! چرا $t = ۰$ را قبول نکردیم؟ این که واضح است که متحرک در مبدأ زمان در مکان اولیه‌اش قرار دارد. اصلاً تعریف مکان اولیه همین است! ولی نمی‌گوییم جسم در مبدأ زمان از مکان اولیه‌اش عبور می‌کند. مثلاً وقتی ما از شهر تهران به شهر دیگری می‌رویم، می‌گوییم از شهر تهران شروع به حرکت کرده‌ایم، نمی‌گوییم که از شهر تهران عبور کرده‌ایم! پس این‌که متحرک در لحظه‌ی $t = ۰$ در مکان اولیه‌اش قرار دارد، ولی از این مکان عبور نمی‌کند.

۴۷ گزینه ۳ پاسخ صحیح است. شیب نمودار، همواره منفی است که به معنی حرکت دائمی متحرک در خلاف جهت محور x است، بنابراین گزینه‌های (۱) و (۲) نادرست هستند.

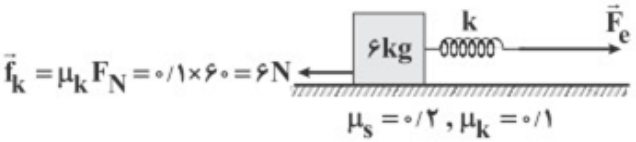
متحرک در لحظه‌ی $t_۱$ از مبدأ مکان عبور می‌کند، بنابراین با توجه به تشابه دو مثلث رنگی داریم:



$$\frac{۱۰}{۵}=\frac{t_۱}{۳۰-t_۱}\Rightarrow ۶۰-۲t_۱=t_۱\Rightarrow ۳t_۱=۶۰\Rightarrow t_۱=۲۰\text{s}$$

۴۸ گزینه ۱ پاسخ صحیح است. هنگامی‌که جسم در آستانه‌ی حرکت است، نیروی فنر با بیشینه‌ی نیروی اصطکاک ایستایی برابر است و داریم:

$$F_e=f_{s,max}\Rightarrow k\Delta x_۱=\mu_s \overset{mg}{\overset{\uparrow}{F_N}}\Rightarrow k\times ۰/۰۸=۰/۲\times ۶۰\Rightarrow k=۱۵۰\frac{N}{m}$$



$$F_{net}=ma\Rightarrow F_e-f_k=ma\Rightarrow F_e-۶=۶\times ۴\Rightarrow F_e=۳۰\text{N}$$

پس داریم: $F_e=k\Delta x_۲\xrightarrow[k=۱۵۰\ \frac{N}{m}]{F_e=۳۰\text{N}}۳۰=۱۵۰\ \Delta x_۲$

$$\Rightarrow \Delta x_۲=۰/۲\text{m}=۲۰\text{cm}$$

۴۹ گزینه ۲ پاسخ صحیح است. می‌دانیم تغییرات تکانه‌ی یک جسم، برابر با حاصل‌ضرب نیروی خالص متوسط وارد بر آن جسم در مدت‌زمان اعمال نیرو است، بنابراین داریم:

$$\Delta p=F_{av}\,\Delta t\Rightarrow F_{av}=\frac{\Delta p}{\Delta t}$$

حال تکانه را در لحظات $t_۱=۲\text{s}$ و $t_۲=۵\text{s}$ به دست می‌آوریم:

$$t_۱=۲\text{s}\Rightarrow p_۱=۲^۲-۳\times ۲+۴=۲\frac{\text{kg}.m}{s}$$
$$t_۲=۵\text{s}\Rightarrow p_۲=۵^۲-۳\times ۵+۴=۱۴\frac{\text{kg}.m}{s}$$

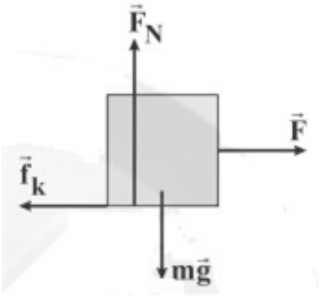
حال به کمک فرمول بالا نیروی خالص متوسط وارد بر جسم را به دست می‌آوریم:

$$F_{av}=\frac{\Delta p}{\Delta t}=\frac{۱۴-۲}{۵-۲}=\frac{۱۲}{۳}=۴\text{N}$$

۵۰ گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ابتدا باید اندازه‌ی نیروی $\vec{F}$ را به دست بیاوریم. این نیرو برابر با اندازه‌ی نیروی کشسانی فنر است، زیرا باعث افزایش طول فنر می‌شود. این افزایش طول برابر با $۲/۵\text{cm}$ یا $۲/۵\times۱۰^{-۲}\ m$ است و داریم:

$$F = \text{k}\Delta\text{x} = ۲۰۰\times\frac{۲/۵}{۱۰۰} = ۵\text{N}$$

در این حالت نیروهای وارد بر جسم را رسم می‌کنیم. از آن‌جایی که جسم با سرعت ثابت حرکت می‌کند، شتاب جسم برابر با صفر است. پس برایند نیروهای وارد بر جسم، صفر است و داریم:



$$F_{\text{net}_y} = ۰ \Rightarrow F_N = \text{mg} = ۲\times۱۰ = ۲۰\text{N}$$
$$F_{\text{net}_x} = ۰ \Rightarrow F = f_k \Rightarrow ۵ = \mu_k . F_N$$
$$\Rightarrow ۵ = \mu_k\times۲۰$$
$$\Rightarrow \mu_k = \frac{۵}{۲۰} = ۰/۲۵$$

۵۱ گزینه ۳ پاسخ صحیح است. زیرا فقط واکنش $\text{Fe}^{۲+} + \text{Ni}$ انجام‌پذیر نیست.

۵۲ گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

۵۳ گزینه ۴ پاسخ صحیح است. زیرا داریم: $\text{mol NH}_۳ = \frac{۸۹/۶L}{۲۲/۴L} = ۴\ \text{mol}$

$$\text{غلظت مولار} = \frac{۴\ \text{mol}}{۲L} = ۲\ \text{mol}.L^{-۱}$$

$$\left[\text{OH}^-\right] : ۲\times\frac{۱}{۱۰۰} = ۰/۰۲\ \text{mol}.L^{-۱}$$

$$[H^+]\left[\text{OH}^-\right] = ۱۰^{-۱۴} \rightarrow [H^+] = \frac{۱۰^{-۱۴}}{۰/۰۲} = ۵\times۱۰^{-۱۳}$$

$$\text{pH} = -\text{Log}\,(۵\times۱۰^{-۱۳}) = ۱۲/۳$$

۵۴ گزینه ۱ پاسخ صحیح است. pH اولیه $= -\text{Log}\,۰/۲ = ۰/۷$

$$\text{mol HNO}_۳ = ۰/۲\ \text{mol}$$

$$\text{mol NaOH} = \frac{۴g}{۴۰g} = ۰/۱\ \text{mol}$$

پس $۰/۱$ مول در یک لیتر محلول از اسید باقی می‌ماند و $\text{pH} = ۱$ است. پس $۰/۳$ واحد تغییر pH داریم.

۵۵ گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

آ) Mn اکسایش یافته (نادرست) $\quad \begin{matrix}\text{Sn}^{۲+}/\text{Sn}\\ \text{Mn}^{۲+}/\text{Mn}\end{matrix}$

ب) درست

پ) درست $\quad x = ۰/۵\ \text{mol}\,e \rightarrow \frac{۰/۲۵\ \text{Mn}}{۱} = \frac{\text{xe}}{۲}$

ت) نادرست. الکترون‌ها مصرف می‌شوند و انباشته نمی‌گردند.

ث) درست

۵۶ گزینه ۲ پاسخ صحیح است. موارد اول و سوم درست است. بررسی موارد نادرست:

مورد دوم: فلز نقره در سری الکتروشیمیایی بالاتر از فلز کبالت بوده و واکنش یاد شده به طور طبیعی انجام نمی‌شود.

مورد چهارم:

$$E^\circ_{Mg-Co} = E^\circ_{\text{کاتد}} - E^\circ_{\text{آند}} = -۰/۲۸ - (-۲/۳۷) = ۲/۰۹V \Rightarrow \frac{۲/۰۹}{۱/۶۱} \simeq ۱/۲۹$$
$$E^\circ_{Mg-Zn} = E^\circ_{\text{کاتد}} - E^\circ_{\text{آند}} = -۰/۷۶ - (-۲/۳۷) = ۱/۶۱V$$

۵۷ گزینه ۱ پاسخ صحیح است. عبارت‌های الف و ت درست است. بررسی عبارت‌های نادرست:

عبارت ب: صابون در آب سخت به میزان کمتری حل می‌شود و قدرت پاک‌کنندگی آن کاهش می‌یابد.

عبارت پ: آب سخت به آبی گفته می‌شود که در آن مقادیر چشم‌گیری یون‌های $Mg^{۲+}$ و $Ca^{۲+}$ (نه یون پتاسیم!) وجود دارد.

۵۸ گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

a: اسید چرب b: استر سنگین c: پاک‌کننده صابونی

بررسی موارد:

الف) نادرست - a و b از اجزای سازنده چربی هستند.

ب) نادرست - a در آب نامحلول است.

پ) درست

ت) درست - با استفاده از صابون می‌توان کلوئید پایدار آب و چربی را تشکیل داد.

ث) نادرست - c نشان‌دهندهٔ یک پاک‌کننده صابونی است.

۵۹ گزینه ۳ پاسخ صحیح است. $A: ۱s^۲/۲s^۲۲p^۶/۳s^۲۳p^۶۳d^{۱۰}/۴s^۲۴p^۵$

$B: ۱s^۲/۲s^۲۲p^۶/۳s^۲$

درست

نادرست - فلز Mg کاهنده است.

درست

درست - فرمول ترکیب حاصل: $MgBr_۲$

۶۰ گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

درست - تمامی اتم‌ها با پیوند اشتراکی به یکدیگر متصل شده‌اند.

درست

نادرست $H_۲S: H-\ddot{S}-H$ $R-C_۶H_۴-\underset{\underset{O}{\|}}{\overset{\overset{O}{\|}}{S}}-O^-Na^+$

عدد اکسایش $S = ۶ - ۸ = -۲$ عدد اکسایش $S = ۶ - ۲ = ۴$

نادرست

نادرست جرم مولی $= ۳۲۰ g.mol^{-۱}$ $C_{۱۰}H_{۲۱} - C_۶H_۴ - SO_۳^- Na^+$

۶۱ گزینه ۳ پاسخ صحیح است. زیرا، هر یون مس دو الکترون می‌گیرد و کاهش می‌یابد.

۶۲ گزینه ۱ پاسخ صحیح است. زیرا، واکنش انجام شده، گرماده است.

۶۳ گزینه ۱ پاسخ صحیح است. زیرا، سوسپانسیون است.

۶۴ گزینه ۳ پاسخ صحیح است. زیرا، ترتیب قدرت کاهندگی فلزها به صورت $M < D < A$ است.

۶۵ گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

۶۶ گزینه ۲ پاسخ صحیح است. زیرا، الکتروشیمی افزون بر تهیه مواد جدید به کمک انرژی الکتریکی می‌تواند در راستای پیاده کردن اصول شیمی سبز گام بردارد.

۶۷ گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

۶۸ گزینه ۲ پاسخ صحیح است. زیرا، در ساختار آن سه گروه عاملی کربوکسیلات وجود دارد.

۶۹ گزینه ۴ پاسخ صحیح است. زیرا، داریم: $E_{\text{مولول}} = E_{\text{کاتد}} - E_{\text{آند}} = -۰/۴۴ - (-۲/۳۷) = ۱/۹۳V$

۷۰ گزینه ۳ پاسخ صحیح است. تیغه‌ی مس در محلول روی سولفات پس از مدت طولانی تغییری نمی‌کند.