پاسخ‌نامه تشریحی

۱ ۱ ۲ ۳ ۴

$$[x^۲+x]=-۱ \Rightarrow -۱ \le x^۲+x < ۰ \begin{cases} x^۲+x<۰ \Rightarrow x(x+۱)<۰ \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} -۱<x<۰ \\ -۱ \le x^۲+x \Rightarrow x^۲+x+۱ \ge ۰ \xrightarrow[\text{همواره مثبت}]{a>۰ ,\ \Delta<۰} x \in R \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{اشتراک}} -۱<x<۰$$

$$-۱<x<۰ \xrightarrow{\text{توان ۲۰}} ۰<x^{۲۰}<۱ \Rightarrow [x^{۲۰}]=۰$$

۲ ۱ ۲ ۳ ۴ روش اول:

$$\underbrace{۴n^۲-۴n+۱}_{(۲n-۱)^۲} < ۴n^۲-۳n+۱ < \underbrace{۴n^۲}_{(۲n)^۲} \to ۲n-۱ < \sqrt{۴n^۲-۳n+۱} < ۲n \Rightarrow \left[\sqrt{۴n^۲-۳n+۱}\right]=۲n-۱$$

$$\underbrace{n^۲-۴n+۴}_{(n-۲)^۲} < n^۲-۲n < \underbrace{n^۲-۲n+۱}_{(n-۱)^۲} \to n-۲ < \sqrt{n^۲-۲n} < n-۱ \Rightarrow \left[\sqrt{n^۲-۲n}\right]=n-۲$$

$$\left[\sqrt{۴n^۲-۳n+۱}\right]-۲\left[\sqrt{n^۲-۲n}\right]=(۲n-۱)-۲(n-۲)=۳$$

روش دوم: کافی است یک عدد طبیعی بزرگ‌تر از ۲ مثلاً $n=۳$ را قرار دهیم.

$$n=۳ \to \left[\sqrt{۳۶-۹+۱}\right]-۲\left[\sqrt{۹-۶}\right]=\underbrace{[\sqrt{۲۸}]}_{۵}-۲\underbrace{[\sqrt{۳}]}_{۱}=۵-۲(۱)=۳$$

۳ ۱ ۲ ۳ ۴ اگر $x^۲+x<۰$ باشد، نتیجه می‌گیریم که $-۱<x<۰$ است.

$$x^۲+x<۰ \Rightarrow x(x+۱)<۰ \Rightarrow \begin{array}{c|ccccc} x & -\infty & & -۱ & & ۰ & & +\infty \\ \text{عبارت} <۰ & & + & ۰ & - & ۰ & + & \end{array} \Rightarrow -۱<x<۰$$

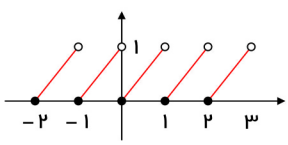
حال برای تعیین حاصل $[x]+[x^۲]+[x^۳]+[x^۴]$ کافی است حدود عبارت‌های داخل جزء صحیح را مشخص کنیم. داریم:

$$\begin{cases} -۱<x<۰ \Rightarrow [x]=-۱ \\ -۱<x<۰ \xrightarrow{\text{به توان ۲ می‌رسانیم}} ۰<x^۲<۱ \Rightarrow [x^۲]=۰ \\ -۱<x<۰ \xrightarrow{\text{به توان ۳ می‌رسانیم}} -۱<x^۳<۰ \Rightarrow [x^۳]=-۱ \\ -۱<x<۰ \xrightarrow{\text{به توان ۴ می‌رسانیم}} ۰<x^۴<۱ \Rightarrow [x^۴]=۰ \end{cases}$$

$$\Rightarrow [x]+[x^۲]+[x^۳]+[x^۴]=(-۱)+۰+(-۱)+۰=-۲$$

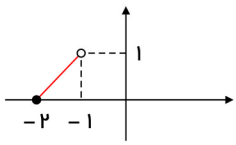
۴ ۱ ۲ ۳ ۴

نمودار تابع $y=x-[x]$ به صورت زیر است واضح است در فاصله‌ی $[-۲,۳)$، ۵ پاره‌خط به اندازه‌ی $\sqrt{۲}$ وجود دارد.



اینگونه توابع به توابع دندان اره‌ای معروف هستند.

توجه:



طول پاره‌خط $= \sqrt{۱^۲ + ۱^۲} = \sqrt{۲}$

۵ ۱ ۲ ۳ **۴**

دامنه‌ی تابع فاصله‌ای است که نمودار رسم شده باشد بجز نقاط خالی و تعریف نشده(تصویر تابع روی محور X ها همان دامنه است):

$$D = [-۳, +\infty) - \{-۲, ۰\}$$

۶ ۱ **۲** ۳ ۴

شرط تابع بودن در زوج مرتب این است که مولفه‌ی اول یکسان نداشته باشد و در صورت یکسان بودن مولفه‌ی اول، باید مولفه‌ی دوم هم برابر باشد.

$$(۲,۱)(۲,m^۲) \quad m^۲ = ۱ \rightarrow m = \pm ۱$$

$m = ۱ \rightarrow \{(۲,۱),(۵,۳),(۲,۱),(۱,۴),(۱,۳)\}$ تابع نیست

$m = -۱ \rightarrow \{(۲,۱),(۵,۳),(۲,۱),(۱,۴),(-۱,۳)\}$ تابع است

۷ ۱ ۲ **۳** ۴ باید زیر رادیکال را نامنفی قرار بدهیم (بزرگتر یا مساوی صفر).

$$\frac{x-۲}{-۴x^۲ + ۴x - ۱} \geq ۰ \quad \Rightarrow \quad \frac{x-۲}{-(۲x-۱)^۲} \geq ۰$$

$$\Rightarrow x - ۲ \leq ۰ \Rightarrow x \leq ۲ (I)$$

چون مخرج همیشه منفی است پس صورت هم باید منفی باشد تا حاصل مثبت شود.

$$۴x - ۴x^۲ - ۱ \neq ۰ \quad \Rightarrow \quad -(۲x-۱)^۲ \neq ۰ \Rightarrow x \neq \frac{۱}{۲} (II)$$

$$(I) \cap (II) = (-\infty, ۲] - \left\{\frac{۱}{۲}\right\}$$

۸ ۱ ۲ **۳** ۴

$$f(۲) = ۲x = ۲ \times ۲ = ۴ \rightarrow f^۲(-f(۲)) = f^۲(-۴)$$

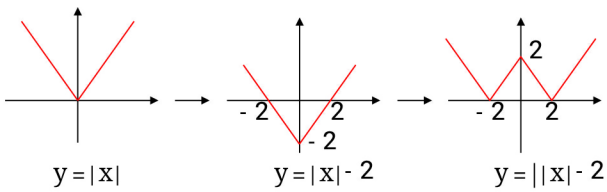
$$f(-۴) = ۳ - ۲(-۴) = ۱۱ \rightarrow f^۲(-۴) = (۱۱)^۲ = ۱۲۱$$

۹ ۱ ۲ ۳ **۴**

$$\left[x + \underbrace{۲[x]}_{\text{عدد صحیح است}}\right] = ۴ \Rightarrow [x] + ۲[x] = ۴ \Rightarrow ۳[x] = ۴$$

$$\Rightarrow [x] = \frac{۴}{۳} \notin \mathbb{Z} \Rightarrow$$ جواب ندارد

۱۰ ۱ ۲ ۳ **۴** ابتدا نمودار تابع $f(x) = |x| - ۲$ را رسم می‌کنیم و سپس آن قسمت از نمودار تابع که در پایین محور x ها قرار دارد را نسبت به محور xها قرینه می‌کنیم.

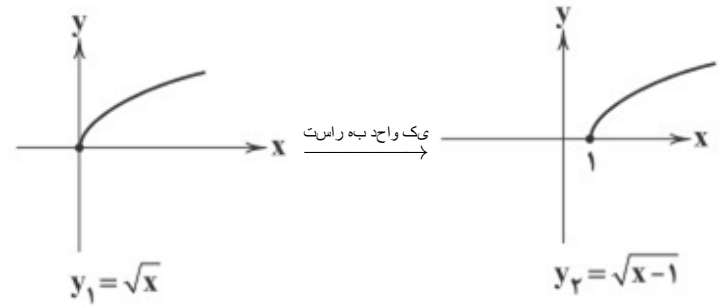


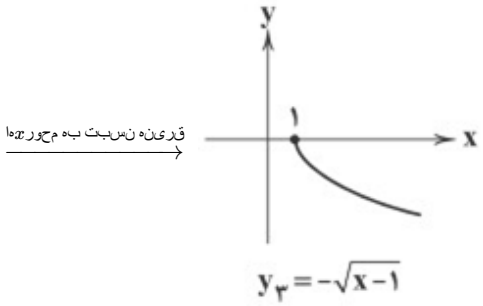
۱۱ گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

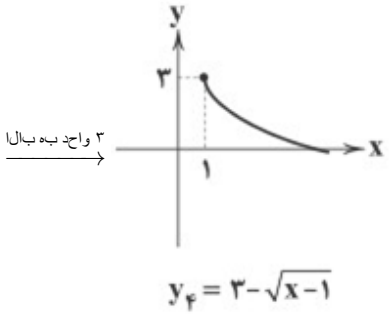
$$f(x)=\sqrt{x+۱}, g(x)=\frac{x+۱}{x-۲}$$

$$(۲f-g)(۳)=۲f(۳)-g(۳)=۲\sqrt{۳+۱}-\frac{۳+۱}{۳-۲}=۴-۴=۰$$

۱۲ گزینه ۳ پاسخ صحیح است.







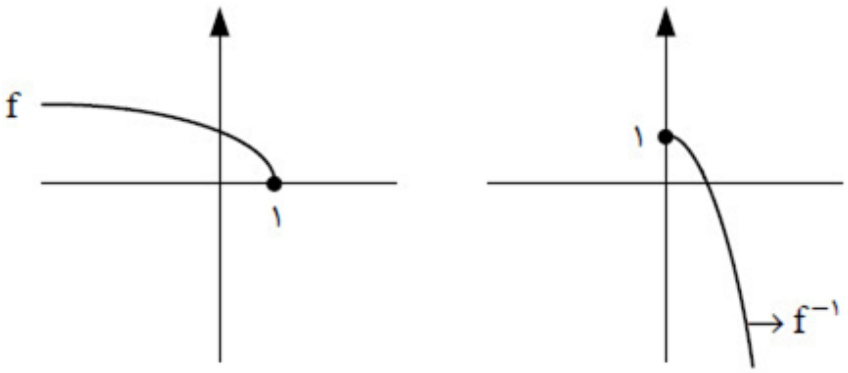
$\Rightarrow$ گزینه‌ی ۳

۱۳ گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$f(x)=\sqrt{-x+۱} \quad D_f=(-\infty,۱] \quad R_f=[۰,+\infty)$$

$$y=\sqrt{-x+۱}\Rightarrow y^۲=-x+۱\Rightarrow x=۱-y^۲\Rightarrow f^{-۱}(x)=۱-x^۲$$

$$D_{f^{-۱}}:[۰,+\infty) \ , R_{f^{-۱}}=(-\infty,۱]$$



۱۴ گزینه ۱ پاسخ صحیح است. تابع f یک به یک است. هرگاه هر خط موازی محور xها نمودار آن‌را حداکثر در یک نقطه قطع کند.

۱۵ گزینه ۱ پاسخ صحیح است. x_1 و x_2 محل برخورد سهمی با محور xها هستند.

$$y = a(x-x_1)(x-x_2) \Rightarrow y = a(x-2)(x-6) \xrightarrow{A(0,3)} 12a = 3 \Rightarrow a = \frac{1}{4}$$

$$y = \frac{1}{4}(x-2)(x-6) \Rightarrow y = \frac{1}{4}(x^2 - 8x + 12) \Rightarrow y = \frac{1}{4}x^2 - 2x + 3$$

۱۶ گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

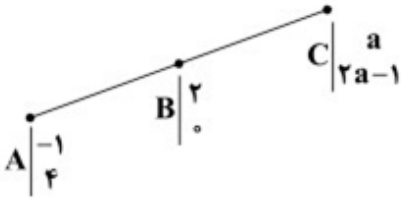
روش اول: به جای x عدد ۲ قرار داده و k را حساب می‌کنیم:

$$3(2)^2 + k(2) - 2 = 0 \Rightarrow 10 + 2k = 0 \Rightarrow k = -5$$

$$\Rightarrow 3x^2 - 5x - 2 = 0 \Rightarrow (x-2)(3x+1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -\frac{1}{3} \end{cases}$$

روش دوم: $x_1 x_2 = -\frac{2}{3} \Rightarrow 2x_2 = -\frac{2}{3} \Rightarrow x_2 = -\frac{1}{3}$

۱۷ گزینه ۳ پاسخ صحیح است. با توجه به شکل برای این‌که هر سه نقطه روی یک خط باشند باید شیب خط گذرنده از هر دو نقطه‌ی دلخواه با هم برابر باشد، پس $m_{AB} = m_{BC}$:



$$\begin{cases} m_{AB} = \frac{0-4}{2-(-1)} = -\frac{4}{3} \\ m_{BC} = \frac{2a-1-0}{a-2} = \frac{2a-1}{a-2} \end{cases} \Rightarrow \frac{2a-1}{a-2} = \frac{-4}{3} \Rightarrow 6a - 3 = -4a + 8 \Rightarrow 10a = 11 \Rightarrow a = \frac{11}{10}$$

۱۸ گزینه ۱ پاسخ صحیح است. $2y - 6x = 1 \Rightarrow 2y = 6x + 1 \Rightarrow$ شیب خط $= \frac{6}{2} = 3$

در دو خط موازی، شیب‌ها با هم برابرند، پس:

$$\begin{cases} m = 3 \\ A(2,-1) \end{cases} \xrightarrow{\text{معادله‌ی خط}} y - (-1) = 3(x-2)$$

$$\xrightarrow[x=0]{\text{عرض از مبدا}} y + 1 = 3(0-2) \Rightarrow y = -7$$

۱۹ گزینه ۲ پاسخ صحیح است. $-x^2 + 3x \geq 0 \Rightarrow x(-x+3) \geq 0$

برای حل نامعادله از جدول تعیین علامت استفاده می‌کنیم:

x		0		3	
$-x^2+3x$	-		+		-

$\Rightarrow$ جواب : $[0,3] \Rightarrow D_f = [0,3]$

۲۰ گزینه ۲ پاسخ صحیح است. می‌دانیم در معادله‌ی $ax^2 + bx + c = 0$ حاصل جمع ریشه‌ها برابر است با:

$$S = -\frac{b}{a} \Rightarrow 2 = \frac{m^2-1}{m-1} \Rightarrow -2 = \frac{(m-1)(m+1)}{m-1} \Rightarrow m + 1 = -2 \Rightarrow m = -3$$

۳۱ گزینه ۴ پاسخ صحیح است. با طرفین وسطین کردن معادله، آن را حل می‌کنیم:

$$\frac{t}{t+۱}=\frac{t+۱}{۳}\Rightarrow ۳t=(t+۱)^۲$$

$$t^۲+۲t+۱=۳t\Rightarrow t^۲-t+۱=۰\xrightarrow[ax^۲+bx+c=۰]{\text{معادله به فرم استاندارد}}\begin{cases}a=۱\\b=-۱\\c=۱\end{cases}$$

$$\Delta=b^۲-۴ac\Rightarrow\Delta=(-۱)^۲-۴\times(۱)\times(۱)=۱-۴=-۳$$

چون $\Delta<۰$، لذا معادله ریشه ندارد.

۳۲ گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$۲\times\begin{cases}۲y+x=۵\\۳y-۲x=۱۱\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}۴y+۲x=۱۰\\۳y-۲x=۱۱\end{cases}\xrightarrow[\text{با جمع}]{y=۳}۲y+x=۵\Rightarrow۶+x=۵\Rightarrow x=-۱$$

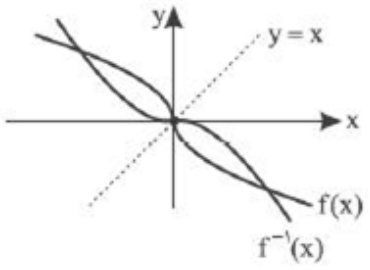
$$۷y=۲۱\Rightarrow y=۳$$

محل تلاقی دو خط ، نقطه‌ی $A(-۱,۳)$ است، پس:

فاصله‌ی A از مبدأ : $OA=\sqrt{(-۱)^۲+(۳)^۲}=\sqrt{۱۰}$

۳۳ گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

برای رسم نمودار وارون $f(x)$ باید آن را نسبت به خط $y=x$ قرینه کنیم. نمودار دو تابع در سه نقطه با هم برخورد می‌کنند. به‌علاوه می‌توانید از این نکتهٔ مهم استفاده کنید که نمودار $f(x)$ شبیه تابع $y=-\sqrt[۳]{x}$ است.



۳۴ گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

با توجه به این‌که α و β ریشه‌های معادله هستند داریم:

$$S=\alpha+\beta=\frac{-b}{a}=\frac{۵}{۲}$$

$$P=\alpha\beta=\frac{c}{a}=\frac{۱}{۲}$$

حاصل عبارت $\frac{۱}{\alpha^۲}+\frac{۱}{\beta^۲}$ برابر است با:

$$\frac{۱}{\alpha^۲}+\frac{۱}{\beta^۲}=\frac{\beta^۲+\alpha^۲}{\alpha^۲\beta^۲}=\frac{\overset{S}{\overleftrightarrow{(\alpha+\beta)^۲}}-\overset{P}{\overleftrightarrow{۲\alpha\beta}}}{\underset{P}{\overleftrightarrow{(\alpha\beta)^۲}}}=\frac{\left(\frac{۵}{۲}\right)^۲-۲\left(\frac{۱}{۲}\right)}{\left(\frac{۱}{۲}\right)^۲}=\frac{\frac{۲۵}{۴}-۱}{\frac{۱}{۴}}=۲۱$$

۲۵ گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

چون $(f\pm g)(a)=f(a)\pm g(a)$، داریم:

$$(f-g)(۲)=۶\Rightarrow f(۲)=۶\Rightarrow (۲\times ۲+۱)-(۲^{۲}-m)=۶$$
$$\Rightarrow ۵-۴+m=۶\Rightarrow m=۵\Rightarrow g(x)=x^{۲}-۵$$

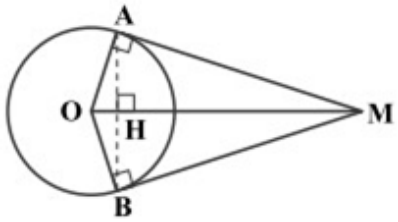
خواستهٔ سؤال برابر است با:

$$(f+g)(-۱)=f(-۱)+g(-۱)=۲(-۱)+۱+(-۱)^{۲}-۵\Rightarrow -۲+۱+۱-۵=-۵$$

۲۶ گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

نکته: قطر عمود بر وتر یک دایره، آن وتر را نصف می‌کند.

ابتدا با استفاده از قضیه‌ی فیثاغورس طول AM را به‌دست می‌آوریم:



$$AM^{۲}+OA^{۲}=OM^{۲}\Rightarrow AM^{۲}+۹=۲۵\Rightarrow AM=۴$$

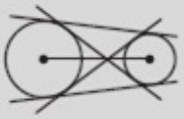
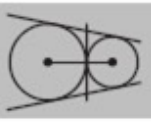
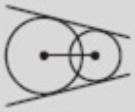
اکنون داریم:

$$S_{OAM}=\frac{۱}{۲}\times OM\times AH=\frac{۱}{۲}\times OA\times AM\Rightarrow OM\times AH=OA\times AM$$
$$\Rightarrow ۵\times AH=۳\times ۴\Rightarrow AH=۲/۴$$

طول وتر AB دو برابر AH است، پس:

$$AB=۲\times ۲/۴=۴/۸$$

۲۷ گزینه ۴ پاسخ صحیح است. نکته: دو دایرهٔ $C(O,R)$ و $C'(O',R')$ مفروض است. حالت‌های مختلف این دو دایره نسبت به هم و تعداد مماس مشترک‌های داخلی و خارجی آن‌ها به‌صورت زیر است:

شکل	مماس مشترک داخلی	مماس مشترک خارجی	وضعیت دو دایره	طول خط‌المرکزین
	۲	۲	برون هم (متخارج)	$OO'>R+R'$
	۱	۲	مماس برون	$OO'=R+R'$
	۰	۲	متقاطع	$\lvert R-R'\rvert<OO'<R+R'$
	۰	۱	مماس درون	$OO'=\lvert R-R'\rvert$
	۰	۰	متداخل	$OO'<\lvert R-R'\rvert$

طبق فرض داریم:

$$OO'=۴\ ,R=۸\ ,R'=۳$$

بنابراین:

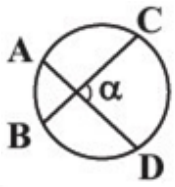
$$OO'<R-R'$$

پس دو دایره متداخل‌اند و هیچ مماس مشترکی ندارند.

۳۸ گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

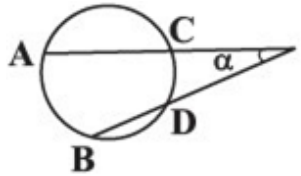
نکتهٔ ۱: اندازهٔ هر زاویهٔ محاطی، نصف کمان روبه‌روی آن است.

نکتهٔ ۲: در شکل روبه‌رو، داریم:



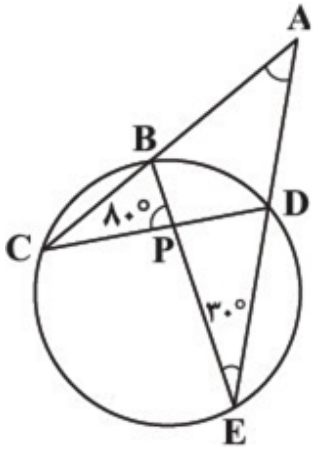
$$\alpha = \frac{\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{CD}}{۲}$$

نکتهٔ ۳: در شکل روبه‌رو، داریم:



$$\alpha = \frac{|\overset{\frown}{AB} - \overset{\frown}{CD}|}{۲}$$

زاویهٔ E محاطی و روبه‌رو به کمان BD است، پس با استفاده از نکتهٔ ۱ داریم:



$$\hat{E} = \frac{\overset{\frown}{BD}}{۲} \Rightarrow ۳۰^\circ = \frac{BD}{۲} \Rightarrow \overset{\frown}{BD} = ۶۰^\circ$$

$$B\hat{P}C = ۸۰^\circ \Rightarrow B\hat{P}D = ۱۰۰^\circ \xrightarrow{\text{نکته ۲}} \frac{\overset{\frown}{BD} + \overset{\frown}{CE}}{۲}$$

$$= ۱۰۰^\circ \xrightarrow{(*)} ۶۰^\circ + \overset{\frown}{CE} = ۲۰۰^\circ$$

$$\Rightarrow \overset{\frown}{CE} = ۱۴۰^\circ$$

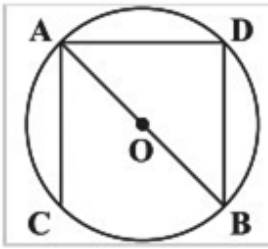
حال با استفاده از نکتهٔ ۳ داریم:

$$\hat{A} = \frac{\overset{\frown}{CE} - \overset{\frown}{BD}}{۲} \underset{(**)}{\overset{(*)}{=}} \frac{۱۴۰^\circ - ۶۰^\circ}{۲} = \frac{۸۰^\circ}{۲} = ۴۰^\circ$$

۳۹ گزینه ۴ پاسخ صحیح است. نکتهٔ ۱: اگر از دو سر یک قطر دایره، وترهایی به موازات یکدیگر رسم کنیم، طول این وترها برابر است.

نکتهٔ ۲: کمان‌های محصور بین دو وتر موازی، با هم برابرند.

نکتهٔ ۳: کمان‌های نظیر دو وتر مساوی در یک دایره، با هم برابرند و برعکس.



$$AC \parallel BD \xrightarrow{\text{نکتهٔ ۱}} AC = BD \xrightarrow{\text{نکتهٔ ۳}} \overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{BD}$$

$$AC \parallel BD \xrightarrow{\text{نکتهٔ ۲}} \overset{\frown}{AD} = \overset{\frown}{BC}$$

بنابراین گزینه‌های ۱، ۲ و ۳ درست است. گزینهٔ ۴ الزاماً درست نیست.

۳۰ گزینه ۱ پاسخ صحیح است. فرض کنیم R شعاع دایره بزرگتر و R' شعاع دایره‌ی کوچکتر باشد. چون دو دایره مماس درونی‌اند پس $OO' = R - R'$ یعنی:

$$R - R' = ۳/۵$$

از طرف دیگر:

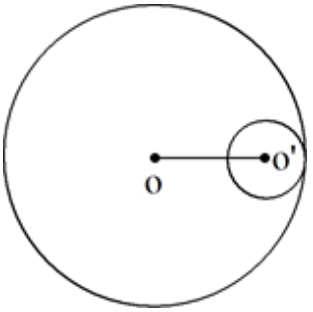
$$\text{مساحت بین دو دایره} = ۲۱\pi \Rightarrow \pi R^۲ - \pi R'^۲ = ۲۱\pi \Rightarrow R^۲ - R'^۲ = ۲۱$$

$$\Rightarrow (R - R')(R + R') = ۲۱ \xrightarrow{R-R'=۳/۵} ۳/۵(R + R') = ۲۱$$

$$\Rightarrow R + R' = \frac{۲۱}{۳/۵} = \frac{۲۱}{\frac{۷}{۲}} = ۶$$

بنابراین:

$$\begin{cases} R - R' = ۳/۵ \\ R + R' = ۶ \end{cases} \xrightarrow{\text{کم می کنیم}} ۲R' = ۶ - ۳/۵ \Rightarrow ۲R' = ۲/۵ \Rightarrow R' = \frac{۲/۵}{۲} = ۱/۲۵$$



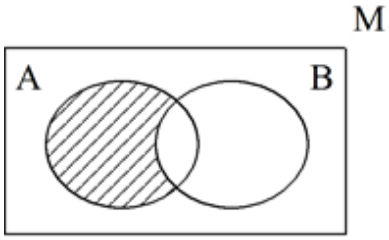
۳۱ گزینه ۲ پاسخ صحیح است. می‌توان تمامی گزینه‌ها را بررسی کرد.

در گزینهٔ ۱ ارزش $p \Rightarrow q$ نادرست می‌شود و ارزش کل گزاره نیز نادرست خواهد بود.

در گزینهٔ ۳ و ۴ ارزش $q \Rightarrow r$ نادرست می‌شود و در کل گزاره‌ای نادرست خواهیم داشت. اما در گزینهٔ ۲ به ارزشی درست می‌رسیم.

۳۲ گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

می‌دانیم : $A - B = A \cap B' \xrightarrow{\text{عکس}}$



فقط کافی است بررسی گزینه کنیم.

۳۳ گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

حالت‌های افراز عضوی ۵ $\rightarrow$

- ۵
- ۴ و ۱
- ۳ و ۲ $\rightarrow$ قابل قبول $\Rightarrow \binom{۵}{۲} \times \binom{۳}{۳} = ۱۰$
- ۳ و ۱ و ۱
- ۲ و ۲ و ۱
- ۲ و ۱ و ۱ و ۱
- ۱ و ۱ و ۱ و ۱ و ۱

۳۴ گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$\sim(p \Rightarrow q) \equiv \sim(\sim p \vee q) \equiv (p \wedge \sim q)$$

۳۵ گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

نکته ۱: به گزارهٔ مرکب که از ترکیب دو گزارهٔ سادهٔ p و q با رابط منطقی «یا» تشکیل شده است، ترکیب فصلی دو گزاره می‌گوییم و آن را به صورت «$p \vee q$» می‌نویسیم.

نکته ۲: هرگاه p و q دو گزاره باشند، گزارهٔ مرکب «$p \wedge q$» که خوانده می‌شود «p و q» را ترکیب عطفی دو گزاره می‌گوییم.

الف) چون عبارات $(x-۱)^۲$ و $(۲x-y)^۲$ هر دو بزرگتر یا مساوی صفر هستند، مجموعشان زمانی صفر می‌شود که هر دو صفر باشند، یعنی:

$$(x-۱=۰) \wedge (۲x-y=۰) \Rightarrow (x=۱) \wedge (y=۲)$$

ب) $x^۲+۷x=۰ \Rightarrow x(x+۷)=۰ \Rightarrow (x=۰) \vee (x+۷=۰)$

$$\Rightarrow (x=۰) \vee (x=-۷)$$

بنابراین در حل معادلهٔ الف از رابط عاطف ($\wedge$) و در حل معادلهٔ دوم از روابط فاصل ($\vee$) استفاده کردیم.

۳۶ گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ابتدا باید مشخص کنیم با وارد کردن دی‌الکتریک بین صفحه‌های خازن، ظرفیت آن چند برابر می‌شود. چون A و d ثابت‌اند، با استفاده از رابطهٔ زیر داریم:

$$C=\kappa\varepsilon_۰\frac{A}{d} \xrightarrow[d_۱=d_۲]{A_۱=A_۲} \frac{C_۱}{C_۲}=\frac{\kappa_۱}{\kappa_۲} \xrightarrow[\kappa_۲=۴]{\kappa_۱=۱} \frac{C_۱}{C_۲}=\frac{۱}{۴}$$

از طرف دیگر، چون خازن را از مولد جدا نموده‌ایم، بار الکتریکی آن ثابت می‌ماند. بنابراین با استفاده از رابطهٔ $U=\frac{Q^۲}{۲C}$ و با توجه به این‌که با افزایش ظرفیت خازن، انرژی آن کاهش می‌یابد، به صورت زیر $U_۱$ را می‌یابیم:

$$U=\frac{Q^۲}{۲C} \xrightarrow{Q_۱=Q_۲} \frac{U_۲}{U_۱}=\frac{C_۱}{C_۲} \xrightarrow[\frac{C_۱}{C_۲}=\frac{۱}{۴}]{U_۲=U_۱-۳۰۰} \frac{U_۱-۳۰۰}{U_۱}=\frac{۱}{۴} \Rightarrow ۴U_۱-۱۲۰۰=U_۱$$

$$\Rightarrow ۳U_۱=۱۲۰۰ \Rightarrow U_۱=۴۰۰\mu J$$

۳۷ گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ابتدا اختلاف پتانسیل الکتریکی بین دو نقطهٔ A و B را می‌یابیم:

$$\Delta V=V_B-V_A=-۱۲۰-(-۸۰) \Rightarrow \Delta V=-۴۰V$$

اکنون تغییر انرژی پتانسیل الکتریکی ذره در این جابه‌جایی را به دست میآوریم: دقت کنید، باید q را با قید علامت در رابطه جایگزین کنیم:

$$\Delta V=\frac{\Delta U}{q} \xrightarrow[\Delta V=-۴۰V]{q=-۵\mu C=-۵\times۱۰^{-۶}C} -۴۰=\frac{\Delta U}{-۵\times۱۰^{-۶}} \Rightarrow \Delta U=۲\times۱۰^{-۴}J$$

$$\xrightarrow{۱J=۱۰^۳mJ} \Delta U=۲\times۱۰^{-۴}\times۱۰^۳mJ \Rightarrow \Delta U=۲\times۱۰^{-۱}mJ$$

با توجه به این‌که فقط نیروی الکتریکی بر ذرهٔ باردار وارد می‌شود، انرژی مکانیکی آن پایسته می‌ماند، بنابراین می‌توان نوشت: $\Delta K=-\Delta U \Rightarrow \Delta K=-۲\times۱۰^{-۱}mJ$

چون $\Delta K<۰$ است، انرژی جنبشی ذره کاهش می‌یابد.

۳۸ گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ظرفیت خازن در حالت اول برابر است با:

$$C_۱ = \kappa\varepsilon_۰\frac{A}{d_۱} \xrightarrow[\kappa=۱, d_۱=۲\times۱۰^{-۳}m]{A=۲cm^۲=۲\times۱۰^{-۴}m^۲} C = ۱\times۹\times۱۰^{-۱۲}\times\frac{۲\times۱۰^{-۴}}{۲\times۱۰^{-۳}}$$

$$= ۹\times۱۰^{-۱۳}F = ۹\times۱۰^{-۱}\,\text{pF}$$

در حالت دوم فاصلهٔ بین صفحات خازن $۱\,\text{mm}$ کاهش می‌یابد. بنابراین ظرفیت خازن برابر است با:

$$\Rightarrow d_۲ = ۲ - ۱ = ۱\,\text{mm}$$

$$C = \kappa\varepsilon_۰\frac{A}{d} \xrightarrow[\kappa=\text{ثابت}]{A=\text{ثابت}} \frac{C_۲}{C_۱} = \frac{d_۱}{d_۲} \Rightarrow \frac{C_۲}{۹\times۱۰^{-۱}} = \frac{۲}{۱} \Rightarrow C_۲ = ۱۸\times۱۰^{-۱}\,\text{pF}$$

در نتیجه افزایش ظرفیت خازن برابر است با:

$$\Delta C = C_۲ - C_۱ = ۱۸\times۱۰^{-۱} - ۹\times۱۰^{-۱} = ۹\times۱۰^{-۱}\text{pF} = ۰/۹\,\text{pF}$$

۳۹ گزینه ۲ پاسخ صحیح است. طبق رابطهٔ قانون کولن، اندازهٔ نیروی الکتریکی بین دو بار الکتریکی نقطه‌ای با حاصل‌ضرب بارها نسبت مستقیم و با مجذور فاصلهٔ آن‌ها نسبت عکس دارد. داریم:

$$\begin{cases} q_۱ = +۸\mu C \\ q_۲ = +۲\mu C \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} q_۱' = ۸ - ۲ = ۶\mu C \\ q_۲' = ۲ + ۲ = ۴\mu C \end{cases}$$

$$\frac{F'}{F} = \frac{|q_۱'||q_۲'|}{|q_۱||q_۲|}\times\left(\frac{d}{۲d}\right)^۲ \Rightarrow \frac{F'}{۰/۳۲} = \frac{۶\times۴}{۸\times۲}\times\frac{۱}{۴} \Rightarrow \frac{F'}{۰/۳۲} = \frac{۳}{۸} \Rightarrow F' = ۰/۱۲N$$

۴۰ گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ظرفیت خازن به بار و اختلاف پتانسیل دو سر آن بستگی ندارد، داریم:

$$Q = CV \Rightarrow \Delta Q = C\Delta V \Rightarrow ۲۰۰ = C\times۲۰ \Rightarrow C = ۱۰\mu F$$

$$U = \frac{۱}{۲}CV^۲ \Rightarrow U_۲ - U_۱ = \frac{۱}{۲}C\left(V_۲^۲ - V_۱^۲\right) \Rightarrow ۴\times۱۰^{-۳} = \frac{۱}{۲}\times۱۰^{-۵}\times\left(V_۲^۲ - V_۱^۲\right)$$

$$\left(V_۲^۲ - V_۱^۲\right) = ۸۰۰ \Rightarrow (V_۲ - V_۱)(V_۲ + V_۱) = ۸۰۰ \xrightarrow{V_۲ - V_۱ = ۲۰V}$$

$$۲۰(V_۲ + V_۱) = ۸۰۰ \Rightarrow V_۱ + V_۲ = ۴۰V$$

$$\begin{cases} V_۱ + V_۲ = ۴۰ \\ V_۲ - V_۱ = ۲۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} V_۱ = ۱۰V \\ V_۲ = ۳۰V \end{cases}$$

$$Q_۱ = CV_۱ = ۱۰\times۱۰ = ۱۰۰\mu C$$

۴۱ گزینه ۲ پاسخ صحیح است. دو کمیت بار خازن و اختلاف پتانسیل دو صفحهٔ خازن، هیچ‌گونه تأثیری بر روی ظرفیت خازن ندارند، زیرا مقدار ظرفیت خازن براساس رابطهٔ $C = \frac{Q}{V}$، مقداری ثابت است. ولی با توجه به رابطهٔ $C = \kappa\varepsilon_۰\frac{A}{d}$، دو حالت افزایش مساحت صفحات خازن و فاصلهٔ بین صفحات آن‌را بررسی می‌کنیم:

$\uparrow C = \kappa\varepsilon_۰\frac{\uparrow A}{d}$ افزایش مساحت صفحه‌ها، باعث افزایش ظرفیت خازن می‌شود.

$\downarrow C = \kappa\varepsilon_۰\frac{A}{d\uparrow}$ افزایش فاصلهٔ دو صفحه از یکدیگر، باعث کاهش ظرفیت خازن می‌شود.

۴۲ گزینه ۳ پاسخ صحیح است. چون ظرفیت خازن تخت با فاصلهٔ بین صفحه‌های آن رابطهٔ عکس دارد، داریم:

$$C = \kappa\varepsilon_۰\frac{A}{d} \Rightarrow \frac{C_۲}{C_۱} = \frac{d_۱}{d_۲} \Rightarrow \frac{C_۲}{C_۱} = \frac{d}{۳d} \Rightarrow C_۲ = \frac{C_۱}{۳}$$

دقت کنید که وقتی خازن شارژ شده را از مولد جدا می‌کنیم، طبق قانون پایستگی بار، هر تغییری که در ساختمان خازن ایجاد کنیم، بار روی صفحه‌ها ثابت می‌ماند:

$$Q_۱ = Q_۲ \Rightarrow C_۱V_۱ = C_۲V_۲ \Rightarrow C_۱\times۱۲ = \frac{C_۱}{۳}V_۲ \Rightarrow V_۲ = ۳۶V$$

۴۳ گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$F = \mathrm{ma} = ۵\times۱۰^{-۶}\,\mathrm{kg}\times۵۰ = ۲۵\times۱۰^{-۵}N$$

$$F = \mathrm{qE} \Rightarrow q = \frac{F}{E} = \frac{۲۵\times۱۰^{-۵}}{۵\times۱۰^{-۲}} = ۵\times۱۰^{-۳}C$$

۴۴ گزینه ۱ پاسخ صحیح است. «معمولاً اختلاف پتانسیل پایانه‌های منبع نیروی محرکه (آرمانی یا واقعی) را به منظور ساده‌سازی به جای ΔV با V نشان می‌دهند.»

۴۵ گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$F = \frac{\mathrm{kq_۱q_۲}}{r^۲} \Rightarrow r^۲ = \frac{\mathrm{kq_۱q_۲}}{F}$$

$$r^۲ = \frac{۹\times۱۰^۹\times۵\times۱۰^{-۶}\times۸\times۱۰^{-۶}}{۴} = \frac{۳۶۰\times۱۰^{-۳}}{۴} \Rightarrow r^۲ = ۹۰\times۱۰^{-۳} = ۹\times۱۰^{-۲}m$$

$$r = \sqrt{۹\times۱۰^{-۲}} = ۳\times۱۰^{-۱} = ۰/۳m = ۳۰\,\mathrm{cm}$$

۴۶ گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$\begin{cases} q = \mathrm{ne} \\ q = ۵/۲\times۱۰^{-۹}C \\ e = ۱/۶\times۱۰^{-۱۹}C \end{cases} \Rightarrow n = \frac{q}{e} = \frac{۵/۲\times۱۰^{-۹}}{۱/۶\times۱۰^{-۱۹}} = ۳/۲۵\times۱۰^{۱۰}$$

نکته: بار الکترون منفی است اما در سؤال تعداد الکترون‌های منتقل شده، خواسته شده است و لذا علامت بار در نظر گرفته نمی‌شود و مقدار بار متصل شده و بار الکترون را مثبت فرض می‌کنیم که در جواب تأثیری ندارد.

در حالت فرض با علامت منفی $n = \frac{q}{e} = \frac{-۵/۲\times۱۰^{-۹}}{-۱/۶\times۱۰^{-۱۹}} = ۳/۲۵\times۱۰^{۱۰}$

۴۷ گزینه ۳ پاسخ صحیح است. با توجه به این‌که تراکم خطوط میدان در مجاورت نقطه‌ی A بیشتر است، بنابراین شدت میدان الکتریکی در نقطه‌ی A بیشتر از نقطه‌ی B است، بنابراین: $E_A > E_B$

در مورد پتانسیل الکتریکی همان‌طور که می‌دانیم، با حرکت در جهت خطوط میدان الکتریکی، پتانسیل الکتریکی کاهش می‌یابد، در نتیجه پتانسیل الکتریکی نقطه‌ی A کم‌تر از پتانسیل الکتریکی نقطه‌ی B است، بنابراین:

$$V_A < V_B$$

۴۸ گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ابتدا با استفاده از رابطه‌ی $\Delta V = \frac{\Delta U_E}{q}$، تغییرات انرژی پتانسیل الکتریکی بار را به دست می‌آوریم:

$$\Delta U_E = Q\Delta V = q(V_B - V_A) \Rightarrow \Delta U_E = -۱\times(۱۵۰ - (-۱۰۰)) \Rightarrow \Delta U_E = -۲۵۰\,\mathrm{J}$$

کار میدان، قرینه‌ی تغییرات انرژی پتانسیل الکتریکی ذره است، بنابراین:

$$W_E = -\Delta U_E = ۲۵۰\,\mathrm{J}$$

۴۹ گزینه ۲ پاسخ صحیح است. برای پاسخ دادن به این سؤال، به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$\Delta U_E = q_۱(V_B - V_A) \Rightarrow \begin{cases} \Delta U_E = +۸۰\,\mathrm{J} \\ q_۱ = +۲\mu C \end{cases} \Rightarrow (V_B - V_A) = \frac{۸۰}{۲\times۱۰^{-۶}} = ۴\times۱۰^۷\,V$$

حال برای بار $q_۲$ داریم:

$$\Delta U_E = q_{۲(V_B - V_A)} = (-۴\times۱۰^{-۶})\times(۴\times۱۰^۷) = -۱۶۰\,\mathrm{J}$$

بنابراین با انتقال بار $q_۲$ از نقطه‌ی A تا نقطه‌ی B، ۱۶۰ ژول انرژی آزاد می‌شود.

۵۰ گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$C_۱ = \frac{\varepsilon_۰ A_۱}{d_۱}$$

$$\begin{cases} C_۲ = \frac{\varepsilon_۰ k A_۲}{d_۲} \\ k = ۸ \\ d_۲ = \frac{۱}{۵} d_۱ = \frac{d_۱}{۵} \\ A_۲ = \frac{۱}{۲} A_۱ = \frac{A_۱}{۲} \end{cases} \Rightarrow C_۲ = \frac{\varepsilon_۰ k \frac{A_۱}{۲}}{\frac{d_۱}{۵}} = \frac{\frac{\varepsilon_۰ k A_۱}{۲}}{\frac{d_۱}{۵}} = \frac{۵\varepsilon_۰ k A_۱}{۲ d_۱}$$

حال نسبت ظرفیت‌ها:

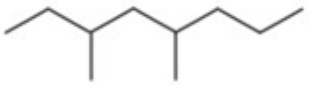
$$\frac{C_۲}{C_۱} = \frac{\frac{۵\varepsilon_۰ k A_۱}{۲ d_۱}}{\frac{\varepsilon_۰ A_۱}{d_۱}} = \frac{\frac{۵k}{۲}}{\frac{۱}{۱}} \Rightarrow \frac{C_۲}{C_۱} = \frac{۵ \times ۸}{۲} = ۲۰$$

۵۱ گزینه‌ی۲ پاسخ صحیح است. سیکلو آلکان دارای فرمول عمومی $C_n H_{۲n}$ می‌باشند، از این‌رو فرمول مولکولی سیکلوهگزان $C_۶ H_{۱۲}$ است.

۵۲ گزینه‌ی۱ پاسخ صحیح است. نفتالن$(C_{۱۰} H_۸)$ از جمله ترکیب‌های آروماتیک است و دارای حلقه‌های بنزنی است. ۱۰ اتم کربن دارد و نسبت شمار اتم‌های هیدروژن به شماره اتم‌های کربن در آن برابر $\frac{۸}{۱۰}$ یا $\frac{۴}{۵}$ می‌باشد.

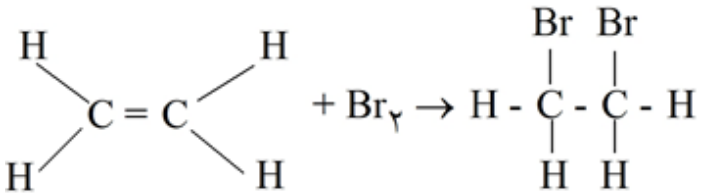
۵۳ گزینه‌ی ۱ پاسخ صحیح است. عناصر واسطه غیر از بعضی از عناصر گروه سوم فرعی با از دست دادن الکترون به آرایش گاز نجیب قبل از خود نمی‌رسند.

۵۴ گزینه ۲ پاسخ صحیح است.



$$\frac{C}{H} = \frac{۱۰}{۲۲} = \frac{۵}{۱۱}$$

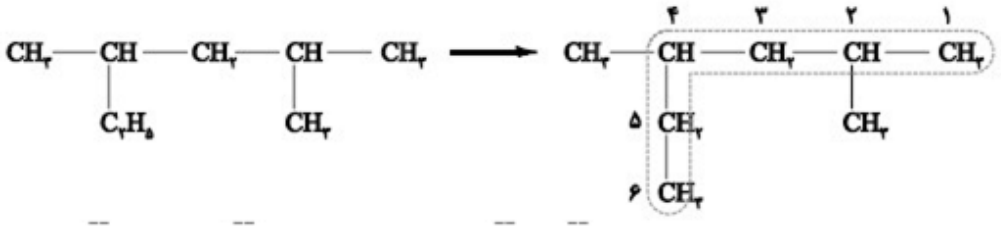
۵۵ گزینه ۱ پاسخ صحیح است.



۵۶ گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ترکیب «الف» و «پ» درست نام‌گذاری شده‌اند.

۵۷ گزینه ۱ پاسخ صحیح است. هر چه تعداد اتم‌های کربن در یک آلکان بیشتر باشد، فقط میزان فرّار بودن آن کاهش می‌یابد و بقیهٔ موارد افزایش خواهند داشت.

۵۸ گزینه‌ی ۴ پاسخ صحیح است. ابتدا ساختار ۲، ۴ - دی‌متیل‌پنتان را رسم می‌کنیم. حال اگر یکی از گروه‌های متیل را با اتیل جایگزین کنیم، زنجیره‌ی اصلی تغییر می‌کند:



نام ترکیب حاصل ۲، ۴ - دی‌متیل‌هگزان می‌باشد.

۵۹ گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

آلکان A، پروپان (C_3H_8) و آلکان B، بوتان (C_4H_{10}) است. آلکان سبک‌تر (A) باید دارای نقطهٔ جوش کم‌تر و گران‌روی کم‌تر باشد و میزان فرار بودن آن نیز بیش‌تر است.

۶۰ گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

معادلهٔ واکنش سوختن کامل آلکن‌ها به صورت زیر است:

$$C_nH_{۲n} + \frac{۳n}{۲}O_۲ \rightarrow nCO_۲ + nH_۲O$$

$$\frac{۳n}{۲} = ۷/۵ \Rightarrow ۳n = ۱۵ \Rightarrow n = ۵$$

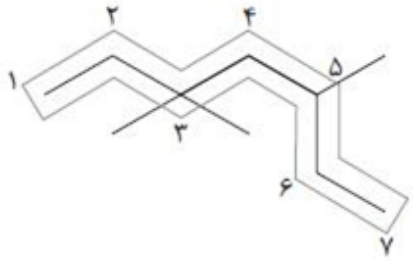
آلکن مورد نظر C_5H_{10} است.

$$C_5H_{10} + Br_۲ \rightarrow C_5H_{10}Br_۲$$

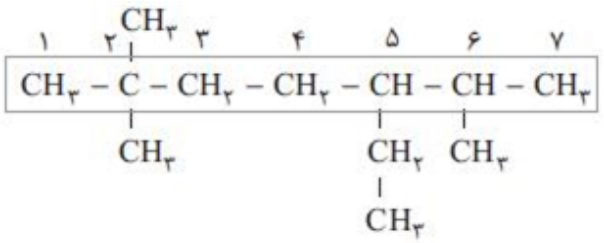
$$\text{جرم مولی} = ۲۳۰ g.mol^{-۱}$$

۶۱ گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

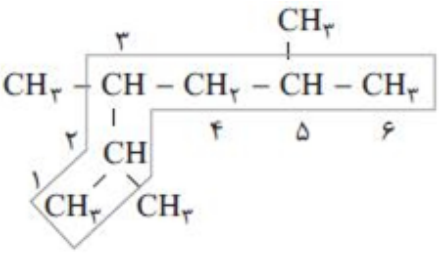
آ) ۳، ۳، ۵– تری متیل هپتان



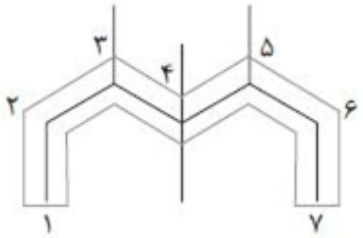
ب) ۵– اتیل - ۲، ۲، ۶– تری متیل هپتان



پ) ۲، ۳، ۵– تری متیل هگزان

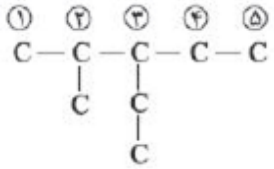


ت) ۳، ۴، ۴، ۵– تترا متیل هپتان



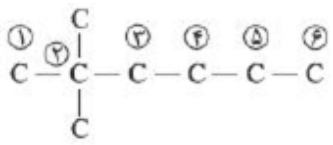
۶۲ گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

۳- اتیل ۲- متیل پنتان ⟵ C_8H_{18}

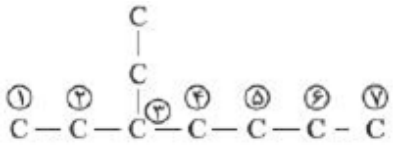


دو ترکیب در صورتی با یک‌دیگر ایزومر هستند که فرمول مولکولی آن‌ها یکسان باشد، اما فرمول ساختاری متفاوت باشد.

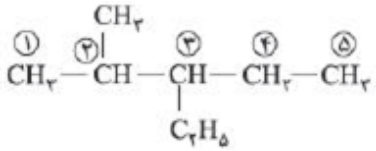
الف) ایزومر می‌باشد ⟵ C_8H_{18}



ب) ایزومر نمی‌باشد ⟵ C_9H_{20}



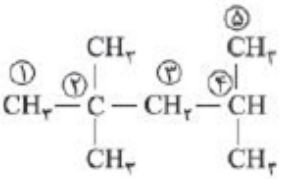
ج) ایزومر نمی‌باشد ⟵ C_8H_{18}



این ترکیب هم فرمول مولکولی یکسان و هم فرمول ساختاری یکسان با ترکیب صورت سؤال دارد. یک ترکیب با خودش ایزومر نیست.

د) ایزومر می‌باشد ⟵ C_8H_{18}

۲، ۲، ۴- تری‌متیل پنتان



۶۳ گزینه ۳ پاسخ صحیح است. بررسی عبارت‌های نادرست:

آ) برای در این عبارت می‌توان گفت: هیدروکربن زیر، خطی و فرمول مولکولی آن به صورت C_nH_{2n-2} می‌باشد، اما آلکین نیست:

$$CH_2 = CH - CH = CH_2$$

ت) در جوشکاری کاربیدی از سوختن گاز اتین، دمای لازم برای جوش دادن قطعه‌های فلزی تأمین می‌شود.

۶۴ گزینه ۲ پاسخ صحیح است. هر دو آلکان C_5H_{12} و C_8H_{18} در دمای اتاق به حالت مایع هستند. در آلکان‌های مایع با افزایش شمار اتم‌های کربن، نقطه‌ی جوش و گرانروی افزایش می‌یابد.

۶۵ گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

با توجه به نحوهٔ انتخاب زنجیر اصلی و شماره‌گذاری آن، گزینهٔ (۱) حاصل می‌شود:

۵ - اتیل - ۳ و ۳ و ۴ و ۵ - تترامتیل اوکتان